

José Marcial Nájares Romero; Hana Kadlecová
Pythagorejské trojice a některé jejich vlastnosti

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 2, 37–43

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153692>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Pythagorejské trojice a některé jejich vlastnosti

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10

Hana Kadlecová, 1. Základní škola, Masarykovo nám., Říčany

Pythagorejská trojice je trojice přirozených čísel (a, b, c) , která splňuje rovnost

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jestliže jsou navíc čísla a, b, c po dvou nesoudělná, nazýváme takovou trojici *primitivní pythagorejská trojice*.¹⁾

Takové trojice velmi úzce souvisejí s Pythagorovou větou.

Pythagorova věta. Mějme trojúhelník o stranách délek a, b, c , přičemž c je nejdelší strana. Trojúhelník je pravoúhlý, právě když $a^2 + b^2 = c^2$.

V práci se budeme zabývat některými vlastnostmi těchto trojic. Např. budeme zkoumat, jestli může být rozdíl největšího členu a jiného členu této trojice libovolné prvočíslo. Je známo, že pro každou pythagorejskou trojici platí, že alespoň jeden člen musí být dělitelný třemi (podobně je alespoň jeden člen dělitelný čtyřmi a alespoň jeden dělitelný pěti), viz [2]. V této práci se podíváme blíže na případ dělitelnosti třemi, zaměříme se zejména na ostatní členy trojice a jejich zbytky po dělení třemi.

Základní poznatky

Pythagorejskou trojici $(3, 4, 5)$ znali již staří Egypťané. Babyloňané používali trojici $(5, 12, 13)$. Dnes je matematikům znám způsob, jak popsat všechny primitivní pythagorejské trojice. My ho uvádíme níže jako větu 1.

Z Pythagorovy věty plyne, že každá pythagorejská trojice určuje pravoúhlý trojúhelník, který se rovněž nazývá *pythagorejský*. Největší číslo této trojice c je délkou přepony v daném trojúhelníku a hodnoty a, b představují délky odvěsen. V dalším textu budeme proto členy pythagorejské trojice a, b nazývat délka odvěsen a c délka přepony.

Následující věta ukazuje, jak získat všechny primitivní pythagorejské trojice. Důkaz věty lze najít např. v [2].

¹⁾ Stačí ověřit nesoudělnost jedné z dvojic a, b nebo b, c nebo a, c a nesoudělnost zbylých dvou už z toho plyne.

Věta 1. Jestliže m, n jsou dvě nesoudělná přirozená čísla různé parity, $m > n$, pak platí, že $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivní pythagorejská trojice. I naopak platí, že pro každou primitivní pythagorejskou trojici (a, b, c) existuje dvojice přirozených čísel m, n splňující předchozí předpoklady taková, že $c = m^2 + n^2$ a $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, nebo $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$.

Rozdíl mezi délkou přepony a délkou jedné z odvěsen

Pokud je (a, b, c) primitivní pythagorejská trojice, pak c je liché přirozené číslo a právě jedno z čísel a, b je rovněž liché přirozené číslo, viz [2]. Nejprve budeme řešit otázku, zda existují primitivní pythagorejské trojice, pro které platí, že rozdíl mezi délkou přepony a delší odvěsny je jedna. K tomuto účelu budeme uvažovat rozdíl druhých mocnin dvou přirozených po sobě jdoucích čísel, tedy $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$.

Protože existuje nekonečně mnoho lichých přirozených čísel, která jsou druhou mocninou jiného přirozeného čísla, tedy $2k + 1 = d^2$, kde d je přirozené číslo, lze najít nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic $(\sqrt{2k + 1}, k, k + 1)$, pro něž platí, že rozdíl mezi délkou přepony a delší odvěsny je 1.

Podívejme se, jak získat primitivní pythagorejské trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a odvěsny je 2. Položme ve větě 1 $n = 1$ a m ať je libovolné sudé přirozené číslo. Pak trojice $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$ je primitivní pythagorejská trojice, pro niž platí, že rozdíl mezi délkou přepony a jedné z odvěsen je 2.

Nyní se podíváme, co platí v případě, kdy je rozdíl mezi délkou přepony a odvěsny roven 3. Pak zobecníme tento výsledek na libovolné liché prvočíslo. Následně ukážeme, které liché hodnoty mohou být rozdílem délky přepony a odvěsny.

Tvrzení 1. Neexistuje primitivní pythagorejská trojice, pro kterou platí, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen je roven třem.

Důkaz. Nechť (a, b, c) je pythagorejská trojice, kde $c = b + 3$, pak

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 = (b + 3)^2 = b^2 + 6b + 9 \\ 6b &= a^2 - 9. \end{aligned}$$

Levá strana je dělitelná 6, proto je zřejmé, že a musí nutně být liché přirozené číslo větší než tři a zároveň násobkem 3. Pak je ale pravá strana dělitelná devíti, tudíž b musí být násobkem 3. Proto tato trojice není primitivní. $\square$

Věta 2. *Neeexistuje primitivní pythagorejská trojice, pro kterou by platilo, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen je roven p , kde p je liché prvočíslo.*

Důkaz. Postupujeme podobně jako v důkazu tvrzení 1:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 = (b + p)^2 = b^2 + 2pb + p^2 \\2pb &= a^2 - p^2.\end{aligned}$$

Opět snadno nahlédneme, že a musí být liché přirozené číslo větší než p a musí být násobkem p , pak ale nutně i b je násobkem p . Proto tato trojice není primitivní. $\square$

Věta 3. *Nechť d je liché přirozené číslo. Pak existuje primitivní pythagorejská trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a délkou jedné z odvěsen je d^2 .*

Důkaz.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 = (b + d^2)^2 = b^2 + 2bd^2 + d^4 \\2d^2b &= a^2 - d^4.\end{aligned}$$

Nutně $a = ed$, kde e je liché a nesoudělné s d , navíc $e > d$.

$$b = \frac{a^2 - d^4}{2d^2} = \frac{e^2d^2 - d^4}{2d^2} = \frac{e^2 - d^2}{2}.$$

Zbývá dokázat nesoudělnost a , b . Předpokládejme pro důkaz sporem, že a , b mají společného dělitele $p > 1$, kde p je prvočíslo. Protože p dělí a , musí dělit buď d , nebo e . Předpokládejme, že p dělí e . Jak snadno nahlédneme z rovnice

$$2b = e^2 - d^2,$$

p musí nutně dělit i d^2 , tudíž p dělí i d , jelikož dělí b . To je spor, protože e je nesoudělné s d .

Obdobně postupujeme v případě, kdy předpokládáme, že p dělí d . Proto jsou a , b nesoudělná, a tím pádem je tato pythagorejská trojice primitivní. $\square$

Úloha 1 pro čtenáře. Pro jaká všechna přirozená čísla k může být rozdíl mezi délkou přepony a některé z odvěsen roven k ?

Pythagorejské trojice a jejich dělitelnost třemi

Jak je známo, v každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné 3. My toto tvrzení dokážeme, viz tvrzení 2. Následně se budeme věnovat otázkám, co platí pro zbývající čísla a jaký je jejich zbytek po dělení třemi. Je možné, aby jedno číslo mělo zbytek jedna a druhé dva? Mohou mít obě čísla stejný zbytek po vydělení třemi? Při hledání odpovědí budeme vycházet ze známého způsobu generování pythagorejských trojic $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$, který jsme ukázali ve větě 1.

Lemma 1. *Nechť n je přirozené číslo, které není dělitelné třemi, pak $n^2 \bmod 3 = 1$.*

Důkaz. Je ponechán čtenáři.

Tvrzení 2. *V každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné třemi. Navíc v každé primitivní pythagorejské trojici je právě jedna z délek odvěsen dělitelná třemi a délka přepony ani délka druhé z odvěsen není dělitelná třemi.*

Důkaz. Předpokládejme, že ani jedno z čísel a, b, c není dělitelné třemi. Pak podle lemmatu 1 je levá strana rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ modulo 3 rovna 2, zatímco pravá strana je rovna 1, což je spor. Pokud uvažujeme primitivní pythagorejskou trojici a pokud by bylo pouze c dělitelné třemi, pak v levé straně rovnosti modulo 3 dostaneme 2 a pravá strana je zřejmě rovna nule, což nelze. Proto nutně musí být buď a , nebo b dělitelné 3. Tím je důkaz tvrzení hotový. $\square$

Tvrzení 3. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 3 = 0$, $b \bmod 3 = 1$ a $c \bmod 3 = 2$.*

Důkaz. Položme $m = 3k + 2$, $n = 3k + 1$, kde k je celé nezáporné číslo, pak zřejmě m, n jsou nesoudělná a různé parity a navíc m je větší než n . Podle lemmatu 1 platí

$$m^2 - n^2 \bmod 3 = 0, \quad m^2 + n^2 \bmod 3 = 2.$$

Dokažme, že $2mn \bmod 3 = 1$ a položíme $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ a $c = m^2 + n^2$. Tím bude náš důkaz hotov.

$$2mn = 2(3k + 2)(3k + 1) = 18k^2 + 18k + 4 = 3(6k^2 + 6k + 1) + 1,$$

tedy b má po vydělení třemi skutečně zbytek 1. $\square$

Příklady: Podívejme se na několik trojic, které dostaneme z tvrzení 3.

$$a = (3k + 2)^2 - (3k + 1)^2 = 6k + 3$$

$$b = 2(3k + 2)(3k + 1)$$

$$c = (3k + 2)^2 + (3k + 1)^2$$

	a	b	c
$k = 0$	3	4	5
$k = 1$	9	40	41
$k = 2$	15	112	113

Tvrzení 4. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 3 = 0$, $b \bmod 3 = 2$ a $c \bmod 3 = 1$.*

Důkaz. Položme $m = 3k + 3$, $n = 3k - 2$ pro přirozené číslo k . Pak zřejmě platí, že $a = 2mn = 6(k + 1)(3k - 2)$ je dělitelné 3,

$$b = m^2 - n^2 = 9k^2 + 18k + 9 - 9k^2 + 12k - 4 = 30k + 5 = 3(10k + 1) + 2,$$

tedy $b \bmod 3 = 2$,

$$\begin{aligned} c &= m^2 + n^2 = 9k^2 + 18k + 9 + 9k^2 - 12k + 4 = 18k^2 + 6k + 13 = \\ &= 3(6k^2 + 2k + 4) + 1, \end{aligned}$$

proto $c \bmod 3 = 1$.

Zřejmě m a n jsou různé parity, jejich rozdíl je 5, m je vždy dělitelné 3 a n nikoliv. Ovšem m a n mohou být dělitelné 5, ale určitě existuje nekonečně mnoho k tak, že n a m jsou nesoudělná. Například stačí zvolit $k = 5h$, kde h je libovolné přirozené číslo. $\square$

Příklady.

$$a = 6(k + 1)(3k - 2)$$

$$b = 3(10k + 1) + 2$$

$$c = 3(6k^2 + 2k + 4) + 1$$

	a	b	c
$k = 1$	12	35	37
$k = 2$	72	65	97
$k = 3$	168	95	193

Tvrzení 5. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 3 = 0$, $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 1$.*

Důkaz. Položme $m = 3k + 1$ a $n = 3k$, kde k je přirozené, pak zřejmě m , n mají různou paritu, jsou nesoudělná a m je větší než n . Definujme $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ a $c = m^2 + n^2$. Pak podle lematu 1 je $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 1$ a zřejmě $a \bmod 3 = 0$. $\square$

Příklady:

$$a = 2(3k + 1)3k$$

$$b = (3k + 1)^2 - 9k^2 = 6k + 1$$

$$c = (3k + 1)^2 + 9k^2$$

	a	b	c
$k = 1$	24	7	25
$k = 2$	84	13	85
$k = 3$	180	19	181

Tvrzení 6. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 3 = 0$, $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 2$.*

Důkaz. Položme $m = 3k + 4$ a $n = 3k + 1$. Jistě jsou m, n nesoudělná. Zvolme $a = m^2 - n^2$, $b = 2nm$ a $c = m^2 + n^2$. Podle lemmatu 1 je $a \bmod 3 = 0$, $c \bmod 3 = 2$ a nakonec

$$2mn = 2(3k + 4)(3k + 1) = 2(9k^2 + 3k + 12k + 4) = 3(6k^2 + 10k + 2) + 2.$$

Tedy $b \bmod 3 = 2$, což jsme měli dokázat. $\square$

Příklady:

$$a = (3k + 4)^2 - (3k + 1)^2 = 18k + 15$$

$$b = 2(3k + 4)(3k + 1)$$

$$c = (3k + 4)^2 + (3k + 1)^2 = 18k^2 + 30k + 17$$

	a	b	c
$k = 0$	15	8	17
$k = 1$	33	56	65
$k = 2$	51	140	149

Úloha 2 pro čtenáře. Označme si A_{011} množinu všech primitivních pythagorejských trojic, kde $a \bmod 3 = 0$, $b \bmod 3 = 1$, $c \bmod 3 = 1$. Podobně si označme A_{012} , A_{021} , A_{022} . Dokázali jsme, že všechny tyto množiny jsou nekonečné. Snadno nahlédneme, že množinu všech primitivních pythagorejských trojic dostaneme jako sjednocení těchto množin. Tyto množiny jsou navíc zřejmě disjunktní. Pro zajímavost si čtenáři mohou zkusit vyšetřit, jak přesně množiny vypadají, když uvažujeme délku přepony maximálně N , tj. $c \leq N$, kde N je přirozené číslo, které si čtenář zvolí. Třeba se vám podaří vykukat i přesný popis takových množin.

Dělitelnost čtyřmi

Nyní se velice krátce podíváme na případ dělitelnosti čtyřmi. Víme, že v každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné 4. Stejně jako v případě dělitelnosti třemi lze dokázat, že číslo dělitelné 4 v primitivním pythagorejském trojúhelníku je délka jedné z odvěsen, viz [2]. Uvedená tvrzení nebudeme dokazovat, uvedeme pouze návody. Formální důkazy přenecháme čtenářům, stejně jako zkoumání dělitelnosti dalšími čísly.

Tvrzení 7. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 4 = 0$, $b \bmod 4 = c \bmod 4 = 1$.*

Návod. Položme $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ a $c = m^2 + n^2$. Zvolme $m = p$, kde p je liché prvočíslo a $n = 2$.

Tvrzení 8. *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic (a, b, c) takových, že $a \bmod 4 = 0$, $b \bmod 4 = 3$, $c \bmod 4 = 1$.*

Návod. Jako v předchozím případě stačí položit $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ a poté zvolit $n = 2k - 1$ a $m = 2k$, kde k je libovolné přirozené číslo.

Závěr

V tomto článku jsme se seznámili s některými vlastnostmi primitivních pythagorejských trojic. Dozvěděli jsme se například, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen nemůže být liché prvočíslo. Naopak pokud liché přirozené číslo k je druhá mocnina jiného přirozeného čísla, pak existuje primitivní pythagorejská trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a jedné z odvěsen je roven k . V další části jsme se věnovali studiu primitivních pythagorejských trojic z pohledu dělitelnosti třemi. Zjistili jsme například, že jedna z odvěsen má délku dělitelnou třemi a délky zbylé odvěsny a přepony mohou nabývat 1 i 2 jako zbytek po dělení třemi. Dále jsme zformulovali úlohy pro čtenáře a budeme rádi, když čtenáři vymyslí i další vlastní otázky a o svých zjištěních nám napíší.

Literatura

- [1] Sierpiński, W.: *Pythagorean Triangles*. Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y., 2003.
- [2] Sláma, M.: *Pythagorejské trojúhelníky*. Bakalářská práce, PedF UK, Praha, 2015. https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/72716/BPTX_2014_2_11410_0_320762_0_164175.pdf