

Exotická posloupnost

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 2, 44–45

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153693>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Exotická posloupnost

Uvažujme následující netradičně definovanou posloupnost přirozených čísel $(g_n)_{n=1}^{\infty}$. Její první člen je $g_1 = 290$. Abychom vyrobili následující člen, tak prvně přepíšeme naše číslo ve dvojkové soustavě následujícím způsobem:

$$g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2.$$

Kdykoli se ve dvojkovém zápisu některého exponentu objeví exponent větší než 2, i tento exponent nahradíme jeho dvojkovým zápisem. Pokračujeme, dokud nedostaneme výraz obsahující pouze číslice 1 a 2. Získáme tudíž následující výraz

$$g_1 = 290 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+1} + 2.$$

Nyní vezmeme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepíšme je na 3 a od výsledku odečteme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti:

$$g_2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^3+1} + 3 - 1 \doteq 4,43 \cdot 10^{38}.$$

Abychom získali g_3 , vezmeme g_2 , přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$$\begin{aligned} g_2 &= 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^3+1} + 2, \\ g_3 &= 4^{4^{4+1}} + 4^{4^4+1} + 2 - 1 \doteq 3,23 \cdot 10^{616}. \end{aligned}$$

Další členy g_i generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní g_{i-1} v soustavě i (včetně všech exponentů a exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance i nahradíme za $i + 1$ a od tohoto výsledku odečteme 1.

Je patrné, že tato posloupnost nabývá hodně vysokých hodnot opravdu rychle. Ale jak je to s jejím limitním chováním? K jaké hodnotě se blíží, když n roste nade všechny meze? Je to nekonečno? A to je právě úkol pro čtenáře:

Úloha

Spočítejte limitu posloupnosti $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

Úloha z minulého čísla zněla:

Jaký je součet všech prvočísel, která jsou menší než 1 000? Napovíme, že jich je 168 a že 25 z nich je menších než 100.

- a) 14 865
- b) 54 382
- c) 76 127
- d) 81 994
- e) 126 668

Řešení podle José Marciala Nájarese Romera Při řešení budeme postupovat tak, že nejdříve určíme paritu součtu, poté využijeme znalost prvočísel menších než 30 a pak odhadneme zdola tento součet.

Určení parity: Prvočísla jsou lichá až na prvočíslo 2. Jelikož podle zadání víme, že máme celkem 168 prvočísel, z nichž pouze jedno je sudé, pak nutně jejich součet musí být liché číslo. (Sečteme 167 lichých prvočísel a přičteme prvočíslo 2, což je celkově liché číslo.) Tím vyloučíme z daných možností sudá čísla a zůstanou jako možné výsledky 14 865 a 76 127.

Odhad součtu zdola: Opět podle zadání víme, že $168 - 25 = 143$ prvočísel v našem seznamu je větších než 100. Součet těchto 143 prvočísel je větší než $143 \cdot 101 = 14\,443$. Dále již ze základní školy známe prvočísla menší než 30, je jich deset: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a jejich součet je 129. Nakonec využijeme, že $25 - 10 = 15$ prvočísel je větších než 30 a menších než 100, proto jejich součet je větší než $31 \cdot 15 = 465$.

Nyní nejdříve sečteme prvočísla menší než 30, pak dolní odhad součtu prvočísel větších než 30 a menších než 100 a nakonec dolní odhad součtu prvočísel větších než 100 a menších než 1 000 a dostaneme:

prvočísla	součet
menší než 30	129
větší než 30 a menší než 100	> 465
větší než 100 a menší než 1 000	> 14 443
celkem	> 15 037

Což je více než možnost a) 14 865. Proto součet všech prvočísel menších než 1 000 je nutně 76 127.