Karel Rychlík
Anmerkungen

In: Bernard Bolzano (author); Karel Petr (other); Karel Rychlík (other): Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Functionenlehre. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1930. pp. 1–22.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400139

ANMERKUNGEN.

Die »Functionenlehre« sollte einen Teil eines größeren Werkes über Mathematik, der »Größenlehre«, bilden und etwa vom Umfange der »Wissenschaftslehre« sein. Ein Teil dieser Größenlehre, der auch die Funktionenlehre enthält, befindet sich als Manuskript in der National- (früher Hof-) Bibliothek in Wien.

Die Funktionenlehre ist in zwei Bearbeitungen erhalten: Die erste (MI) ist eigenhändig von Bolzano geschrieben, die zweite (M II) ist von Bolzano durchgesehen und eigenhändig verbessert. Diese wurde zur Herausgabe benützt.

M I besteht aus 85 Blättern in 4°, in Bolzanos Bezeichnung »Bogen 14—18«, jeder Bogen besteht aus mehreren einzelnen oder doppelten Blättern mit Beilagen.

M II besteht aus 130 Blättern in 4°.

Wie schon früher erwähnt, sollte die Funktionenlehre keine selbständige Schrift bilden, sondern vielmehr der letzte Teil der Größenlehre sein. Die Herausgabe von Bolzanos mathematischen Schriften wurde mit der Funktionenlehre begonnen, da sie den interessantesten Teil davon bildet und druckfertig scheint.

Das ganze Werk wurde von Bolzano in (mit dem Zeichen § bezeichnete) Paragraphen eingeteilt; ihre Numerierung hat aber der Herausgeber durchgeführt. Die Zitate wurden durch ein zugefügtes Zeichen § angedeutet. In den Fällen, wo sich dieses Zeichen auf die herausgegebene Schrift bezieht, wurde die entsprechende Nummer hinzugefügt. In anderen Fällen (es sind dies meistens Zitate aus der »Zahlenlehre«) wurde das Zeichen § ohne Nummer gelassen. Das wird aber hoffentlich dem Verständnisse nicht schaden. Es handelt sich meistenteils um bekannte Sätze aus der Lehre von den Grenzwerten. In einigen Fällen, wo es sich um Hinweis auf den Satz über die obere Schranke oder auf den Satz von Bolzano-Weierstraß handelt, wurde eine Erklärung in der Anmerkung hinzugefügt.

Die Rechtschreibung ist beinahe dieselbe wie in der Handschrift; nur sehr wenige Veränderungen wurden ausgeführt: so wird z. B. in der Handschrift an mehreren Stellen auch blos statt bloß, Gränze statt Grenze. nähmlich oder nehmlich statt nämlich geschrieben.

Von Bolzanos eigenen Ausdrücken, die in der vorliegenden Schrift nicht erklärt sind, hebe ich hervor:

eine wirkliche Zahl (eine natürliche Zahl),
eine meßbare Zahl (eine reelle endliche Zahl),
eine beständige Zahl (eine Konstante),
einförmig (eindeutig),
gleichförmig (linear).

Was die mathematischen Formeln betrifft, ist zu bemerken, daß Bolzano den absoluten Wert, besonders in den Ungleichungen, auf gleiche Weise wie die Zahl selbst bezeichnet. In der Handschrift sind die Indizes über die Buchstaben, auf welche sie sich beziehen, geschrieben ($\Omega^1, \Omega^2, \ldots$): statt dessen wurde die jetzt üblichere Schreibweise ($\Omega_1, \Omega_2, \ldots$) angewendet.

EINLEITUNG.

VERHÄLTNISSE ZWISCHEN VERÄNDERLICHEN ZAHLEN.

In der Handschrift steht »Fünftes Hauptstück« statt »Einleitung«, was sich auf die Größenlehre beziehen sollte. Diese Einteilung wurde aber von Bolzano selbst nicht konsequent durchgeführt.

§. 2. Der Funktionsbegriff ist bei Bolzano dem Dirichletschen sehr nahe. Vergl. Encyklop. II A 1, Pringsheim 3. Besser ist es aus I § 1 ersichtli ch

Um die Bezeichnung und einen gewissen Algorithmus für die Funktionen zweiter Gattung bemüht sich der bekannte Physiker Christian Doppler in zwei Arbeiten, die in den Abh. d. königl. böhm. Ges. d. Wiss. (5) 1, 1837—40. 78 S.; (5) 2, 1841—42, S. 545—700 erschienen sind. Ein Referat darüber s. Studnička, Bericht ü. d. math. u. naturwiss. Publ. d. königl. böhm. Ges. d. Wiss. während ihres hundertj. Bestandes. Prag 1885, S. 262—269.

§ 16. In $\Sigma^2\varphi$, $\Sigma^3\varphi$, $\ldots$ $\Sigma^m\varphi$ hängt φ auch von den zweiten, bzw. dritten, $\ldots$ m-ten Differenzen der Veränderlichen x, y, z, $\ldots$ ab.

§ 18. Bei dieser Gleichung ist zu beachten, daß $\Sigma^m\Sigma^n\varphi$, $\Sigma^{m+n}\varphi$ nicht immer existieren und, falls sie existieren, vieldeutig sind.

§ 21. Aus der im vorigen § gemachten Verabredung würde nur $\Delta\Sigma\,\Delta\Sigma \ldots \Delta\Sigma\varphi = \varphi$ folgen. Existiert $\Sigma^m\varphi$, dann ist $\Delta^{m+n}\Sigma^m\varphi = \Delta^n\varphi$, wenn wir $\Delta^0\varphi = \varphi$ setzen.

§ 26. Die Anzahl der Summanden darf nicht ohne weiteres ins unendliche vermehrt werden.

§ 33. Man muß voraussetzen, daß die Anzahl der Faktoren endlich bleibt.

ERSTER ABSCHNITT.

STETIGE UND UNSTETIGE FUNCTIONEN.

§ 1. S. 13 Z. 9 v. o. Man würde vielmehr sagen, der Ausdruck $\Delta\frac{x}{y}$ habe für $y = 0$ keine Bedeutung.

S. 14 Z. 4 v. o. Im Ausdrucke $W = ax + b$ muß b 0 vorausgesetzt werden.

Ist x von der Form $\frac{2m+1}{2n}$, so ist entweder $\Delta W = a\Delta x$ oder $= a\Delta x + b$. Ist es aber nicht von dieser Form, so ist $\Delta W = a\Delta x$ oder $= a\Delta x - b$. In beiden Fällen existiert $\lim \Delta W$ für $\Delta x \to 0$ nicht.

§ 3. S. 15 Z. 8 v. o. Hier ist das Werk von Cauchy, Cours d'Analyse, gemeint.

S. 15 Z. 22 v. o. Soll die Funktion $F(x) = x^2 \sin \log |x|$ für $x = 0$ stetig sein, so muß man ihr den Wert $F(0) = 0$ geben. Dann ist $\Delta F(x) = F(\Delta x)$ für $x = 0$. Die Funktion $F(x) = x^2 \sin \log x$ für $x > 0$, $F(0) = 0$, wäre im Punkte $x = 0$ rechtsseitig stetig.

Die Behauptung, daß »zu jedem auch noch so kleinen Δx ein noch kleineres angeblich ist, bey welchem dieser Unterschied $F(\Delta x)$, (gemeint ist $|F(\Delta x)|$) wieder größer wird«, ist nicht richtig. Setzen wir $x_1 = e^{\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ (n eine ganze Zahl), dann ist $F(x_1) = \pm x_1^2$. Für $x_2 < x_1$ ist dann $|F(x_2)| \leqq |x_2^2| < |x_1^2|$, d. h. $|F(x_2)| < |F(x_1)|$.

Man kann nur behaupten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man x_1, x_2, $0 < x_1 < x_2$, so bestimmen, daß für jedes x aus $[x_1, x_2]$*) $|F(x)| < \varepsilon$ gilt und $F(x)$ in diesem Intervalle entweder stets wächst oder stets abnimmt.

§ 4. S. 17 Z. 3 v. o. In dem Ausdrucke $W = \frac{ax - bx}{cx}$ muß $c \neq 0$ angenommen werden und $W = \frac{a-b}{c}$ für $x = 0$ gesetzt werden.

§ 6. In der »Zahlenlehre« ist der folgende Satz angeführt:

»Wenn a und b ein Paar absolute oder additive meßbare Zahlen, n aber eine wirkliche Zahl > 1 bezeichnet: so ist jederzeit $(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b$ und $< a^n + n(a+b)^{n-1}b$.«

Der Beweis wird durch vollständige Induktion erbracht. (Auf Grund dieses Satzes wird bewiesen, daß a^n bei $a > 1$ mit n ins Unendliche wächst). Setzen wir a statt $a+b, b$ statt a, so erhalten wir die Beziehung $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$, die nach dem Vorhergehenden für $a > b > 0$ giltig ist. Diese Ungleichung ist hier vielleicht von Bolzano gemeint worden.

Die Beziehung folgt aber unmittelbar aus der Identität $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.

Für $x > 0$ setzen wir

$$a = x + \Delta x,\ b = x, \text{ wenn } \Delta x > 0,$$
$$a = x,\ b = x + \Delta x, \text{ wenn } \Delta x < 0 \text{ ist,}$$

wobei wir Δx in der Art wählen wollen, daß $x + \Delta x > 0$ wird. Dann wird $(x + \Delta x)^n - x^n$ zwischen $nx^{n-1}\Delta x$ und $n(x+\Delta x)^{n-1}\Delta x$ liegen. Daraus folgt unmittelbar nicht nur die Stetigkeit von x^n für $x > 0$, sondern auch der Satz, daß die Ableitung von x^n gleich nx^{n-1} ist.

Der Fall $x < 0$ wird unmittelbar auf den vorigen zurückgeführt, da dann $x^n = (-1)^n |x|^n$ ist. Für $x = 0$ ist die Stetigkeit von x^n und die Existenz der Ableitung ($= 0$) selbstverständlich.

Vergl. auch II § 36.

§ 9. Nach der jetzigen Auffassung wird die Stetigkeit für eine in einer Menge $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $F(x)$ entweder nur in den Punkten von $\mathfrak{M}$ erklärt, die zugleich Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ sind (Pierpont, Lectures, I S. 208), oder es wird die gewöhnliche Definition der Stetigkeit für alle Punkte von $\mathfrak{M}$ beibehalten (daselbst, II S. 452).

In einem isolierten Punkte (z. B. $x = 0$ für $F(x) = ix$ im Bereich der reellen Zahlen) würde Bolzano die Funktion als unstetig erklären; nach der

*) Für die verschiedenen Arten von Intervallen benütze ich die Bezeichnung:

(a, b)	bezeichnet das offene	Intervall	$a < x < b$
$[a, b]$	„ „ geschlossene	„	$a \leqq x \leqq b$
$(a, b]$	„ „ halboffene	„	$a < x \leqq b$
$[a, b)$	„ „ „	„	$a \leqq x < b$.

(Die durch Hahn modifizierte Bezeichnung von Kowalewski; vgl. Encyklop. II C9a Montel, Rosenthal, 3.)

ersten Auffassung könnte man von Stetigkeit überhaupt nicht sprechen, nach der zweiten wäre die Funktion in einem solchen Punkte stetig.

Bei der Funktion $F(x)=\sqrt{1-x^2}$, $F(x)\geqq 0$ kann nach der ersten Auffassung im Punkte $x=1$ von der rechtsseitigen Stetigkeit überhaupt nicht gesprochen werden, nach der zweiten ist sie in diesem Punkte beiderseitig stetig. Über die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ siehe weiter II § 13, 2.

§ 13. Die Funktion $F(x)$ sei definiert in der Menge $\mathfrak{M}$. Die Bedingungen:

1. $F(x)$ ist stetig in $\mathfrak{M}$,
2. sind x und $x+\Delta x$ Punkte aus $\mathfrak{M}$, so kann zu jedem $\varepsilon>0$ ein $e>0$ unabhängig von x aus $\mathfrak{M}$ auf solche Art bestimmt werden, daß es nicht nötig ist, $|\Delta x|$ kleiner als e zu wählen, wenn $|\Delta F(x)|<\varepsilon$ sein soll,

sind nicht äquivalent mit der gleichmäßigen Stetigkeit von $F(x)$ in $\mathfrak{M}$.

Ist $F(x)$ gleichmäßig stetig in $\mathfrak{M}$, so kann zu jedem $\varepsilon>0$ ein $e>0$ unabhängig von x bestimmt werden, so daß $|\Delta F(x)|<\varepsilon$ für $|\Delta x|<2e$ gilt. Es wird also auch $|\Delta F(x)|<\varepsilon$ für $|\Delta x|\geqq e$ (und $<2e$) gelten, sobald ein solcher Punkt $x+\Delta x$ in $\mathfrak{M}$ existiert (was immer stattfinden wird, wenn $\mathfrak{M}$ ein Intervall ist).

Betrachten wir dagegen die Funktion $F(x)=\frac{1}{1-x^2}$ im offenen Intervalle $(-1, 1)$, so ist sie daselbst nicht gleichmäßig stetig, obwohl die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind.

Es folgt nämlich aus der Stetigkeit von $F(x)$ im Punkte $x=0$, daß zu jedem $\varepsilon>0$ ein $e>0$ bestimmt werden kann, so daß $|F(\Delta x)-F(0)|<\varepsilon$ für $|\Delta x|<2e$, $0<e<1$, also auch für $|\Delta x|\geqq e$ (und $<2e$) gilt. Für x aus $(-1, -e]$ ist $F(x)$ stetig; man kann also zu ε ein x' aus $(-1, -e]$ bestimmen, so daß $|F(x')-F(x)|<\varepsilon$ ist. Setzen wir $x+\Delta x=-x'$, so ist $F(x+\Delta x)=F(x')$. Es ist also $(x+\Delta x)-x=\Delta x\geqq 2e$ und also auch $|\Delta F(x)|<\varepsilon$ für ein $|\Delta x|>e$, so daß die Bedingungen 1., 2. für x aus $(-1, -e]$ erfüllt sind. Auf gleiche Weise würde man beweisen, daß $F(x)$ diese Bedingungen für $[e, 1)$ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, daß diese Bedingungen auch für jedes x aus dem Intervalle $(-1, 1)$ erfüllt sind.

Im Beispiele (S. 24 Z. 10 v. o.) wird $i>0$, $\Delta x>0$, $i-\Delta x>0$ vorausgesetzt.

§ 15. Konvergiert die Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ für $x=1$, so existiert nach dem Satze von Abel (Crelles Journal 1, 1826, S. 314; Oeuvres I, S. 223) $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x)$ und ist gleich $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. Ist $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ nicht konvergent, konvergiert dagegen die Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ für $|x|<1$ und existiert $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x)$, so wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ nach der Abelschen Summationsmethode summierbar genannt mit der Summe $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x)$. Nach dieser Methode ist die Summe der Reihe $1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$. (Vergl. Encyklop. II C 4 Bieberbach, 52.).

§ 16. S. 26 Z. 5 v. u. Im Ausdrucke $\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-x^2}$ soll $a\neq 0$ vorausgesetzt werden.

§ 18. Es sei $F(x)$ stetig im Intervalle (a, b). Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge der Punkte aus (a, b), für die $F(x)=M$ ist. Bolzano glaubt irrtümlich, daß die Menge $\mathfrak{M}$, falls sie unendlich ist, im Innern des Intervalles (a, b) keine Häufungspunkte besitzen darf, wenn nicht für alle x eines Teilintervalles von (a, b) $F(x)=M$ gelten soll. Daß diese Behauptung nicht wahr ist, zeigt die Funktion: $F(x)=x\sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $F(0)=0$, wenn man sie im Intervalle $(-1, 1)$ betrachtet. Die Nullstellen haben den Punkt $x=0$ zum Häufungspunkte.

Bolzanos Irrtum ist um so merkwürdiger, als er selbst Funktionen angibt (W aus § 70, die Funktion aus § 71), mit deren Hilfe er leicht Funktionen hätte konstruieren können, die ihn von seinem Irrtum überzeugt hätten.

§ 19. S. 28 Z. 11 v. o. Beispiel. Es wird $a \neq 0$ vorausgesetzt.

§ 20. Bei dem Beweise wird von Bolzano der Satz gebraucht, daß jede beschränkte Folge mindenstens einen Häufungspunkt besitzt.

Die Fußnote, NB, in der Handschrift von Bolzano eigenhändig zugefügt, weist auf die »Lehre von der Meßbarkeit der Zahlen« hin. Damit ist vielleicht der Abschnitt »Über unendliche Zahlenbegriffe« gemeint, wo in der zweiten Bearbeitung in der Klammer die Note »Über meßbare Zahlen« steht. In der dritten Bearbeitung, die mir zugänglich war, habe ich den Satz nicht finden können. Auch H. Jašek konnte mir keine Auskunft geben, wo man in Bolzanos handschriftlichem Nachlasse den Beweis jenes Satzes finden könnte.

Es ist merkwürdig, daß in vielen Lehrbüchern, vielleicht auf Grund des Artikels von Schönfließ (Encyklop. I A 5, *1*), dieser Lehrsatz als »Satz von Bolzano-Weierstraß« bezeichnet wird, obwohl er in den gedruckten Schriften von Bolzano, über welche Stolz (Math. Ann. 18) berichtet, nicht erwähnt wird.

§ 21. Ist die Funktion $F(x)$ im abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ stetig, so ist sie dort beschränkt.

§ 22. Ist die Funktion $F(x)$ stetig im Intervalle $[a, b]$ und »nähert sich $F(x)$ für die Werte x aus $[a, b]$ unendlich der Zahl C«, so existiert in $[a, b]$ ein Punkt c, für den $F(c)=C$ ist.

Dabei bedeutet »$F(x)$ nähert sich unendlich C für Werte x aus $[a, b]$,« daß man für jedes $\varepsilon>0$ ein x aus $[a, b]$ finden kann, so daß $|F(x)-C|<\varepsilon$ gilt. Es kann also eine Folge $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ aus $[a, b]$ gefunden werden, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)=C$ gilt.

Bolzano benützt hier den Satz aus § 14 in der Form:

Ist die Funktion $F(x)$ stetig im Punkte $x=c$ und ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)=F(c)$. Durch Umkehrung dieses Satzes erhält man die Definition der Stetigkeit von Heine (Crelles Journal 74, 1872, S. 182).

§ 24. Von der Funktion $F(x)$ genügt es vorauszusetzen, daß sie stetig ist im Intervalle $[a, b]$, d. h. stetig im Intervalle (a, b), rechtsseitig stetig im Punkte a und linksseitig stetig im Punkte b.

S. 31 Z. 4 v. o. Hier wird der Satz von der oberen Schranke benützt, der schon in Bolzanos Abhandlung »Rein analytischer Beweis...« § 12 vorkommt (S. auch Stolz, Math. Ann. 18, S. 257). Deutlicher wird dieser Satz in der Zahlenlehre II formuliert:

»Wenn wir von einer gewissen Beschaffenheit B bloß wissen, daß sie nicht allen Werten einer veränderlichen meßbaren Zahl x, die größer (oder kleiner) wohl aber allen, die kleiner (größer) als eine gewisse Zahl U sind, zukomme: so können wir mit Gewißheit behaupten, daß es eine meßbare Zahl A gibt, welche die größte (kleinste) derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle kleinere (größere) x die Beschaffenheit B haben: wobei noch unentschieden bleibt, ob der Wert $x = A$ auch selbst diese Beschaffenheit habe.«

§ 26. S. 32 Z. 15 v. o. Es wird $a \neq 0$ vorausgesetzt.

§ 27. S. 32 Z. 14 v. u. Es wird $c \neq 0$ vorausgesetzt.

§ 29. Über $F(x)$ kann dieselbe Voraussetzung wie in § 24 gemacht werden. S. 34 Z. 2 v. o. Es wird wieder der Satz von der oberen Schranke benützt.

§ 31. Der angeführte Satz ist vielleicht richtig gemeint, aber nicht ganz klar formuliert.

Für einseitig stetige Funktionen wäre er nicht unbeschränkt richtig:

Setzen wir $y = f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $y = f(x) = 0$ für $x = 0$, $F(y) = |y|$. Die Funktion $f(x)$ ist für $x = 0$ stetig, $F(y)$ ist für den zugehörigen Wert von y, $y = 0$, rechtsseitig stetig, $\Phi(x) = F(f(x))$ ist aber im Punkte $x = 0$ rechtsseitig unstetig. Es ist nämlich $\Phi(0) = 0$. Setzen wir aber $\frac{1}{x_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n positiv ganzzahlig), also $x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$, so erhalten wir $\Phi(x_n) = |x_n \sin \frac{1}{x_n}| = -1$, also auch $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(x_n) = -1$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Einfacher könnte man den Satz aussprechen: Ist die Funktion $F(y)$ im Punkte y beiderseitig stetig und $f(x)$ für den Wert x, für welchen $f(x) = y$ gilt, beiderseitig (bzw. rechts-, linksseitig) stetig, so ist die zusammengesetzte Funktion $F(f(x))$ für diesen Wert x auch beiderseitig (bzw. rechts-, linksseitig) stetig.

§ 32. In der Handschrift steht $y = 4x^2 \pm \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$ und $F(f(x)) = \sqrt{(1 - 4x^2 \mp \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4})})}$. Sollte in y auch das negative Zeichen zugelassen werden, so würde man für $x = \frac{1}{2}$, $\Delta y = 4\Delta x + 4\Delta x^2 - \sqrt{\Delta x + \Delta x^2}$ erhalten, so daß für ein positives, hinreichend kleines Δx, der Ausdruck $\Delta y < 0$ wäre, wie gleich ersichtlich, wenn man Δy in der Form schreibt: $\frac{16(\Delta x + \Delta x^2)^2 - (\Delta x + \Delta x^2)}{4(\Delta x + \Delta x^2) + \sqrt{\Delta x + \Delta x^2}} = \frac{-\Delta x + \text{Glieder höherer Ordnung in } \Delta x}{4(\Delta x + \Delta x^2) + \sqrt{\Delta x + \Delta x^2}}$.

§ 33. S. 38 Z. 9 v. o. Die zusammengesetzte Funktion $F(f(x))$, wo $F(y) = \frac{1}{1-y}$, $y = \frac{1}{x}$ ist, wäre für $x = 0$ nicht definiert. Geben wir ihr für $x = 0$ den Wert 0, so wird sie für $x = 0$ stetig sein.

§ 35. S. 39 Z. 13 v. o. Ein unpassendes Beispiel, da die Reihe für jedes y divergiert. Den angeführten Bedingungen genügen die durch die Reihen

$$x^2 + \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) + \left(\frac{1}{2-y} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3-y} - \frac{1}{3}\right) + \cdots,$$

$$x^2 + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(2-y)^2} + \frac{1}{(3-y)^2} + \cdots$$

definierten Funktionen oder auch die Funktion $\operatorname{cotg} \pi y$.

§ 36. S. 40 Z. 1 v. o. Soll die Funktion $W = F(x, y)$ den gestellten Bedingungen genügen (die Stetigkeit im Sinne von Bolzano verstanden), muß man

$(a+\alpha)^2 = (c+\gamma)^2$ wählen. Dann müßte man $F(x, c+\gamma) = x^2$, $F(a+\alpha, y) = y^2$ setzen und für andere (x, y) aus dem Bereich $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, die Funktion $F(x, y)$ als nicht »meßbar« betrachten.

§ 38, 39. Sei $F(x, y, z, \ldots)$ eine in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ des n dimensionalen Raumes definierte Funktion. Diese Funktion ist stetig im Punkte $(x, y, z, \ldots)$ der Menge $\mathfrak{M}$, wenn es möglich ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ so zu bestimmen, daß $|F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots)| < \varepsilon$ gilt für alle Punkte $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)$ aus $\mathfrak{M}$, welche den Bedingungen

$$|\Delta x| < \eta, \; |\Delta y| < \eta, \; |\Delta z| < \eta, \ldots$$

genügen.

Als $\mathfrak{M}$ könnte man auch einen Teil der Umgebung von $(x, y, z, \ldots)$ wählen. Z. B. könnten wir im Falle von zwei Veränderlichen x, y die »Stetigkeit im Punkte (x, y) in Bezug auf die Halbebene, wo $\Delta x \geqq 0$ ist,« betrachten, wenn wir für $\mathfrak{M}$ jenen Teil der Umgebung von (x, y) wählen, wo $\Delta x \geqq 0$ ist, oder die »Stetigkeit im Punkte (x, y) in Bezug auf die Viertelebene, wo $\Delta x \geqq 0$, $\Delta y \geqq 0$ ist,« betrachten, wenn wir für $\mathfrak{M}$ jenen Teil der Umgebung von (x, y) wählen, wo $\Delta x \geqq 0$, $\Delta y \geqq 0$ ist.

Bolzano definiert die Stetigkeit einer Funktion von mehreren Veränderlichen (im Falle, daß es sich um die Stetigkeit in Bezug auf die vollständige Umgebung handelt) ebenso wie Cauchy (Anal. alg. § 2) nach der Erörterung von Pringsheim (Encyklop. II A 1, 22). Dann ist aber der Satz von § 39 nicht eine Folge der Definition in § 38, der angeführte Beweis ist nicht richtig.

Bei der Funktion $F(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $F(0, 0) = 0$ ist $F(x, 0) = 0$ eine stetige Funktion von x und $F(0, y)$ eine stetige Funktion von y; es ist sogar $F(x, y)$ stetig in x für jedes y und stetig in y für jedes x; trotzdem ist $F(x, y)$ keine stetige Funktion von (x, y) im Punkte $(0, 0)$. Um dies einzusehen, genügt es, (x, y) auf solche Weise gegen $(0, 0)$ konvergieren zu lassen, daß $\frac{y}{x} = m$ (m konstant) bleibt. Dann ist $F(x, y) = \frac{m}{1+m^2}$, also auch $\lim F(x, y) = \frac{m}{1+m^2}$, so daß der Grenzwert $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} F(x, y)$ nicht existiert.

Literatur: Neben dem angeführten Artikel von Pringsheim vgl. Genocchi-Peano S. 160, Pascal S. 25—33, Fouët S. 87, Petr S. 305.

§ 40. Vgl. § 31. Es würde aber der Satz gelten:

Ist die Funktion $F(y, z)$ im Punkte (y, z) stetig und sind die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ für den Wert x, für welchen $f(x) = y$, $\varphi(x) = z$ gilt, beiderseitig (bzw. rechts-, linksseitig) stetig, so ist die Funktion $F(f(x), \varphi(x))$ für diesen Wert von x ebenfalls beiderseitig (bzw. rechts-, linksseitig) stetig.

§ 43. Man müßte mit Hilfe der § 23 und 34 der Einl. die Stetigkeit der Funktionen $x+y+z+\cdots$, $xyz\cdots$ beweisen. Weiter müßte man auch die Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion $F(u, v \ldots)$ betrachten, wo $u, v, \ldots$ Funktionen von mehreren Veränderlichen sind.

§ 48. Als Beispiel einer Funktion, die nicht in allen Punkten des Intervalles $[-1, 1]$ stetig ist und trotzdem alle Werte zwischen $F(\alpha)$ und $F(\beta)$ $-1 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ annimmt, führen wir an: $F(x) = \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

Auf Grund der Betrachtungen von Bolzano könnte man leicht eine Funktion konstruieren, die im Intervalle $[-1, 1]$ alle Werte von -1 bis 1 annimmt und trotzdem in allen Punkten jenes Intervalles unstetig ist:

$$F(x) = x \text{ für alle } x \text{ von der Form } \frac{2m+1}{2^n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$F(0) = -1, \quad F(-1) = 0$$

$$F(x) = -x \text{ für alle übrigen Werte von } x$$

oder einfacher

$$F(x) = x \text{ für jedes rationale von } 0 \text{ verschiedene } x, -1 < x \leq 1$$

$$F(0) = -1, \quad F(-1) = 0,$$

$$F(x) = -x \text{ für jedes irrationale } x.$$

Bolzano versucht aber (S. 45 Z. 17 v. u.) eine Funktion $F(x)$ des Intervalles $[a, b]$ zu konstruieren, die in jedem Punkte jenes Intervalles unstetig ist und im Intervalle $[\alpha, \beta]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$ alle Werte zwischen $F(\alpha)$ und $F(\beta)$ annimmt. In dieser Richtung ist aber seine Überlegung nicht befriedigend.

Lebesgue (Leçons s. l'intégration, S. 105) konstruiert eine Funktion, die in keinem Punkte des Intervalles $[a, b]$ stetig ist und in jedem Intervalle $[\alpha, \beta]$, $a \leq a < b \leq b$ alle Werte von 0 bis 1 annimmt.

§ 62. Unter dem Einfluß des unrichtigen Satzes aus § 18 gelangt Bolzano nicht zu der Betrachtung des allgemeinen Falles der uneigentlichen Extrema. Für $x = b$ hat die Funktion $F(x)$ ein uneigentliches Maximum (Minimum), wenn $F(x) \leq F(b)$ [bzw. $F(x) \geq F(b)$] für alle x einer gewissen Umgebung von b und $F(x) < F(b)$ [bzw. $F(x) > F(b)$] wenigstens für ein x jener Umgebung ist. Bolzano versteht unter dem Begriff eines »einseitigen Extremums« nur den Fall, wo b von einer Seite ein Ende eines Konstanzintervalles ist, von der anderen Seite aber für eine gewisse Umgebung von b $f(x) < f(b)$, bzw. $f(x) > f(b)$ gilt.

S. 54 Z. 13 v. o. Busse, Neue Methode. Gleich auf der ersten Seite des Vorwortes: Eminenzien, eminenter Differentialquotient.

§ 63. Der letzte Fall des Satzes (S. 55 Z. 5—8 v. o.) und sein Beweis (T. 4 S. 56) ist unrichtig. Der größte und kleinste Wert können auch uneigentliche Extrema sein.

§ 64. Es genügt, daß $F(x)$ monoton in $[a, b]$ ist. Der Satz ist beinahe selbstverständlich, sein Beweis ist aber nicht ganz richtig. Aus $F(a + \omega) < F(x) <$ $< F(b - \omega)$ würde für $\omega \gtrless 0$ nur $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ folgen.

§ 65. Im Lehrsatze (ebenso wie im § 68, 69, 70) wird $m < M$ vorausgesetzt. Die im Beweise betrachtete Funktion $y = F(x)$ wird dargestellt durch die gebrochene Linie mit den Ecken

$$(0, 0),\ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{3}{4}, 0),\ (\tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{15}{16}, 0), \ldots,\ \left(\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}, \tfrac{1}{2}\right),\ \left(\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}, 0\right), \ldots \quad \text{(Abb. 1.)}$$

Sie ist stetig im Intervalle $[0, 1)$; im Punkte $x = 1$ kann sie nicht als stetig definiert werden. In den Punkten

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{7}{8}, \ldots \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}, \ldots,$$

welche von links an 1 heranrücken, ist nämlich $F(x) = \frac{1}{2}$, so daß auch $\lim F(x) = \frac{1}{2}$ ist, während in den Punkten

$$0,\ \tfrac{3}{4},\ \ldots\ \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}},\ \ldots,$$

welche von links gegen 1 konvergieren, $F(x) = 0$, also auch $\lim F(x) = 0$ ist.

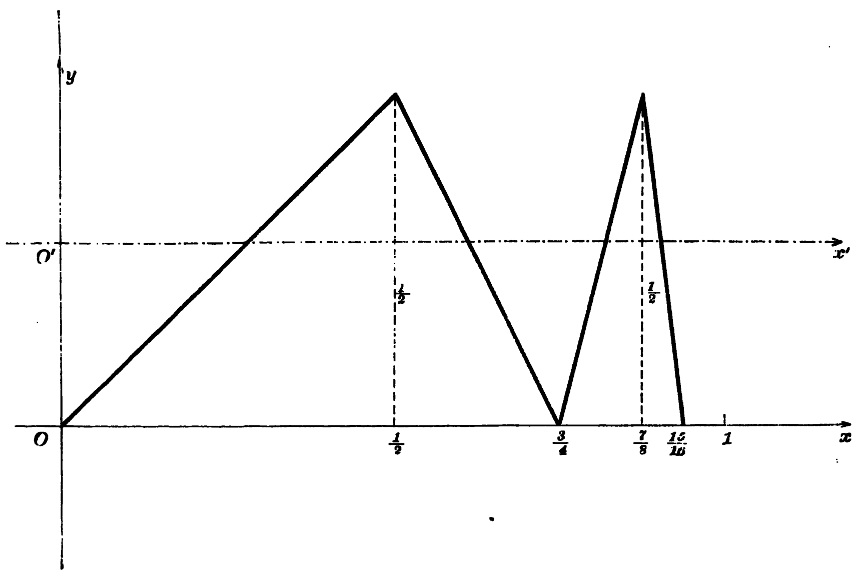

Abb. 1.

§ 66. Ein einfacheres Beispiel ist $F(x) = \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

§ 68. Ein ähnlicher Fehler wie im § 18. Der letzte Teil des Satzes (S. 59 Z. 10—12 v. o.) ist nicht richtig. Nach diesem Satze könnten die Nullpunkte einer im Intervalle $[a, b]$ stetigen Funktion keinen Häufungspunkt im Inneren des Intervalles besitzen, was doch nicht wahr ist. Ein Beispiel s. § 18 Anm.

§ 69. S. 60 Z. 11 v. o. Hier wird wieder der Satz von Bolzano-Weierstraß zitiert (S. § 20 Anm.).

§ 70. Die im Beispiel (S. 63) definierte Funktion W ist stetig im Intervalle $[0, 1]$. Sie wird graphisch durch Abb. 2 dargestellt.

Konstruieren wir die Funktion $F(x)$, welche im Intervalle $[0, 2]$ folgendermaßen definiert ist: Im Intervalle $[0, 1]$ ist $F(x) = W$, im Intervalle $[1, 2]$ $F(x) = F(2-x)$. (Die durch $F(x)$ dargestellte Kurve hat die Gerade $x = 1$ zur Symmetrieachse). Die Funktion $F(x)$ ist im Intervalle $[0, 2]$ stetig. Die Menge der Punkte x, für welche $F(x) = \frac{1}{3}$ gilt, hat den Punkt $x = 1$ zum Häufungspunkte. (Vergl. § 18).

§ 71. $F(x) = (1-x)^2 \sin\log(1-x)$ für $x < 1$, $F(1) = 0$. Wie im vorhergenden § könnten wir $F(x)$ zu einer im Intervalle $[0, 2]$ stetigen Funktion ergänzen, für die $x = 1$ der Häufungspunkt der Nullstellen wäre.

§ 72. Die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} (F(x_{n+1}) - F(x_n)) = 0$ ist zwar notwendig, nicht aber hinreichend.

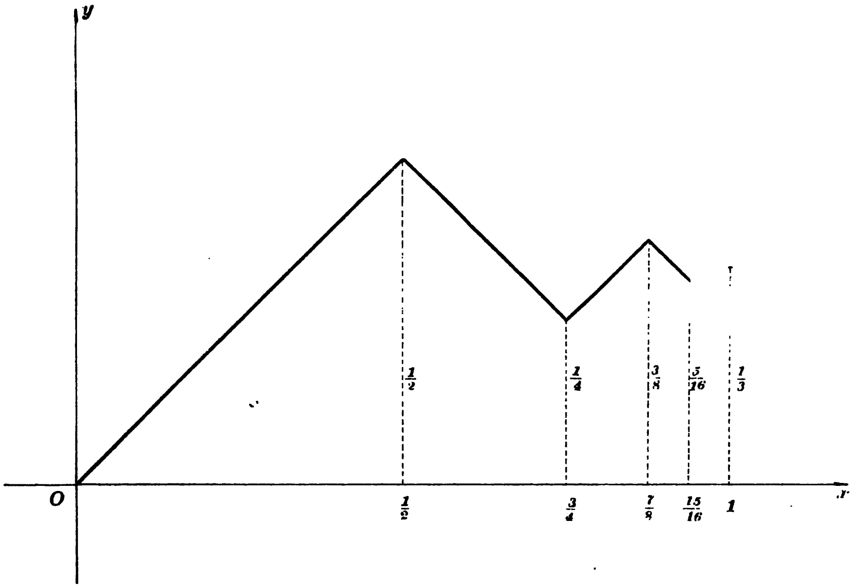

Abb. 2.

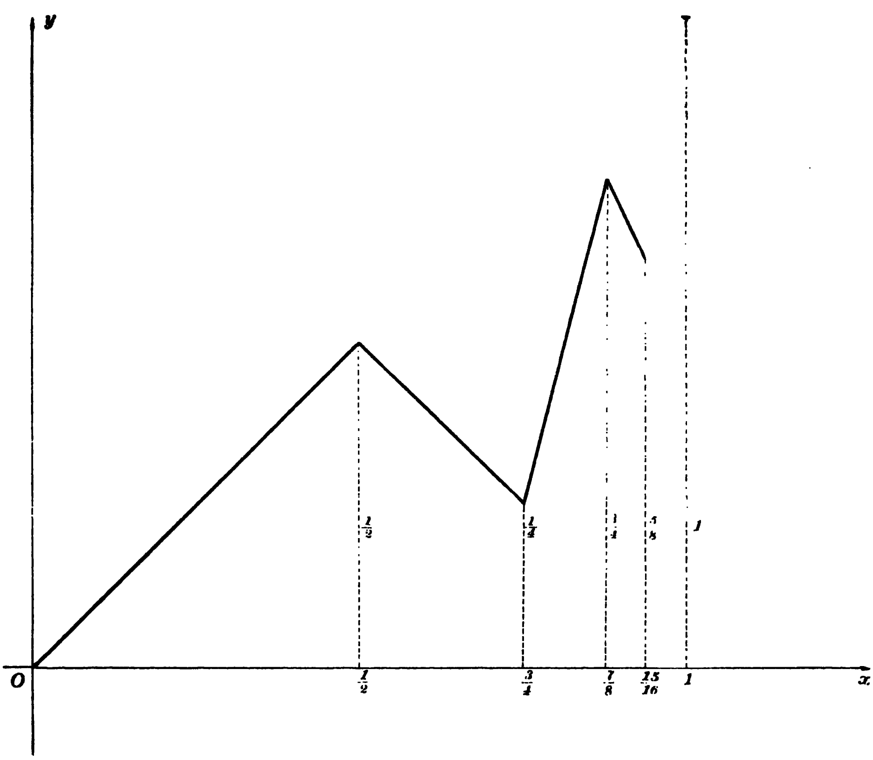

Abb. 3.

§ 73. Die Funktion H (S. 63, Z. 18 v. o.) wird graphisch durch Abb. 3 dargestellt.

§ 75. Die Funktion von Bolzano. (S. auch II § 19).

Die Funktion von Bolzano wird hier als Beispiel einer im Intervalle $[a, b]$ stetigen Funktion betrachtet, die in keinem Teilintervalle $[\alpha, \beta]$, $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$, monoton ist. Von diesem Standpunkte aus wird sie von H. Dr. Jašek in der Abhandlung betrachtet: O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana. Časopis pro pěst. mat. a fys. 53, 1922, S. 102—110.

Der Beweis der Stetigkeit ist nicht stichhaltig. Bolzano glaubt nämlich irrtümlich, die Stetigkeit der betrachteten Funktion folge daraus, daß sie als Limes einer Folge von stetigen Funktionen gegeben ist. (Ebenso wie Cauchy, Cours d'Analyse. VI § 1; näheres über diese Frage s. Encyklop. II A 1 Pringsheim *17*, II C 9 Fréchet-Rosenthal *49*).

Der hier angestellten Erörterung entspräche vielleicht am ehesten der folgende Beweis:

Die Ecken aller gebrochenen Linien $y_1, y_2, \ldots$ bilden eine Funktion $F^*(x)$. Diese ist in einer überall dichten Menge des Intervalles $[a, b]$ definiert. Damit man $F^*(x)$ zu einer stetigen Funktion im Intervalle $[a, b]$ erweitern kann, würde es genügen zu beweisen, daß die Funktion $F^*(x)$ in der Menge, in welcher sie definiert ist, gleichmäßig stetig ist. (Vergl. dazu Hausdorf S. 368, Hahn, I. S. 136, Hobson. 2. Aufl., I. S. 364).

Es gibt Funktionen, die in jedem Punkte des Intervalles $[a, b]$ eine Ableitung besitzen und trotzdem in keinem Intervalle $[\alpha, \beta]$, $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ monoton sind. Vgl. Köpcke, Math. Ann. 35, 1890. S. 109. Ein von Peano vereinfachtes Beispiel bei Hobson. 2. Aufl. II. S. 412. Vgl. auch Encyklop. II A 1. Pringsheim *11*. Der unrichtige Satz in II § 81 läßt die Existenz von solchen Funktionen nicht zu.

§ 76. In M II ist vor diesen Paragraphen § 78 gestellt, (so daß dort die Paragraphen in der Reihenfolge §§ 75, 78, 76, 77, 79 stehen). In M I ist aber § 78 auf den Rand des Blattes bei § 76 geschrieben. Deswegen wurden die Paragraphen dem Zusammenhange nach geordnet.

Ist die Funktion $F(x)$ stetig im Intervalle $[a, b]$, besitzt $F(x)$ dort für c und $c + \gamma$ je ein Maximum und ist $F(x)$ im Intervalle $[c, c + \gamma]$ nicht konstant, so hat $F(x)$ zwischen c und $c + \gamma$ mindestens ein (eigentliches oder uneigentliches) Minimum. Davon könnte man sich leicht durch Betrachtung der unteren Schranke von $F(x)$ im Intervalle $[c, c + \gamma]$ überzeugen. Hieraus folgt unmittelbar der angeführte Satz.

S. 70 Z. 11 v. u. Es wird der Satz von der oberen Schranke benützt. (Vergl. § 24 Anm.).

§ 79. Der Satz ist nicht richtig. Eine monotone Funktion kann nur abzählbar unendlich viele Unstetigkeitspunkte besitzen.

§ 80. Auch dieser Satz ist nicht richtig. Es genügt, die Funktion $F(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $F(0) = 0$ zu betrachten.

§ 82. Eine graphische Darstellung der im Beweis 1. (S. 77) betrachteten Funktion $F(x)$ bringt die Abb. 4.

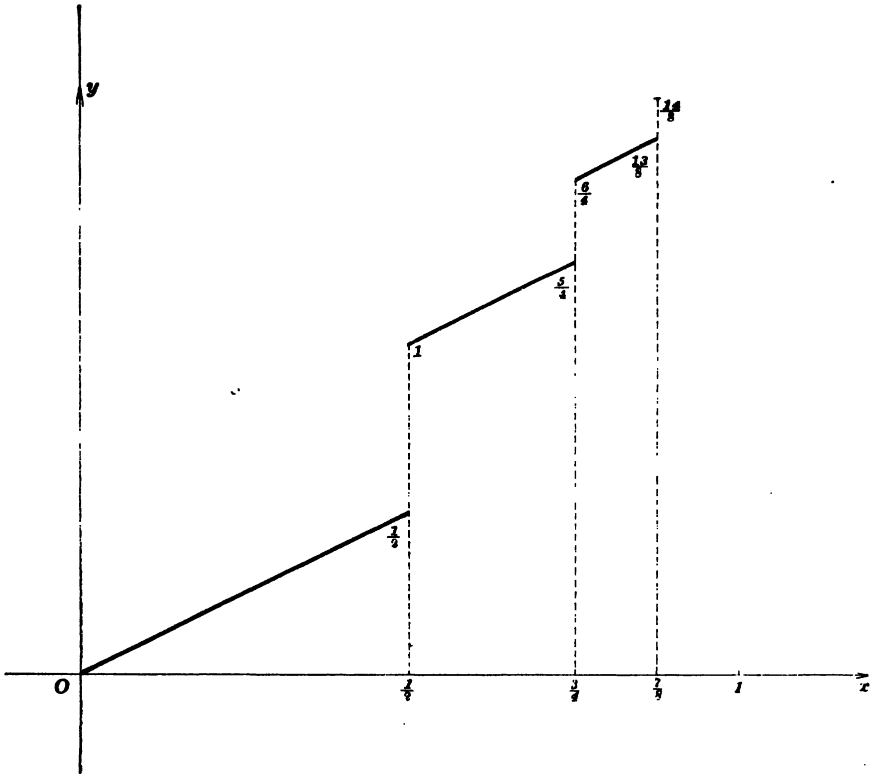

Abb. 4.

ZWEITER ABSCHNITT.

ABGELEITETE FUNCTIONEN.

§ 2. S. 82 Z. 12 v. o.

Die Ableitung von $\frac{1}{1-x}$ im Punkte $x=1$ kann nicht definiert werden.

Hat die Funktion $F(x)$ im Punkte x eine Ableitung, so sagt Bolzano auch, sie sei stetig im (vom) zweiten Grade. Die Stetigkeit vom ersten Grade ist dann die Stetigkeit im gewöhnlichen Sinne.

§ 4. S. 85 Z. 12 v. u. Für $x=2$ ist die rechtsseitige Ableitung $F'+(2)$ gemeint. Hier ist $F'+(x)$ stetig für $x<2$ und für $x>2$ (sogar für $x \leqq 2$), es existieren $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} F'+(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} F'+(x)$ und sind von einander verschieden. Dieser Fall könnte bei einer beiderseitigen Ableitung nicht eintreten. Es gilt nämlich der Satz (ein Spezialfall des Satzes von Dini, vgl. § 22 Anm.):

Existiert $F'(x)$ (endlich) für alle x einer gewissen Umgebung von $x=a$ und existieren $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} F'(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} F'(x)$ (endlich), so ist $F'(x)$ stetig für $x=a$, so daß jene Grenzwerte einander gleich sind.

Es ist nämlich $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a+\vartheta h), 0<\vartheta<1$, wenn man h klein genug wählt. Läßt man h gegen 0 konvergieren einerseits durch positive, andererseits durch negative Werte, so erhält man $F'(a)=\lim\limits_{x\underset{\to}{<}a} F'(x)=\lim\limits_{x\underset{\to}{>}a} F'(x)$, so daß $F'(x)$ für $x=a$ stetig ist.

Man könnte leicht den Satz auf den Fall erweitern, wo $F'(x)$ sowie jene zwei Grenzwerte unendliche Werte von bestimmtem Vorzeichen annehmen. Man müßte dann die Stetigkeit von $F(x)$ in einer Umgebung von $x=a$ voraussetzen.

§ 7. Der Satz gilt, wenn $f(x), \varphi(x)$ zugleich rechtsseitige (bzw. linksseitige oder beiderseitige) Ableitungen sind.

§ 8 Ein unpassendes Beispiel, da das Produkt $(x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ldots$ nicht konvergiert. Es würde genügen, $\varphi(x)=f(x)+\sin \pi x$ zu setzen.

§ 11. S. I § 4 (Anm.).

§ 12. (2) Ein unpassendes Beispiel. Ein einfaches Beispiel für eine solche Funktion ist $F(x)=x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}$ für $x\neq 0, F(0)=0$. Diese Funktion ist stetig für $x=0$, hat aber in diesem Punkte keine Ableitung (weder endliche noch bestimmt unendliche). $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{-\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{\Delta x}$ existiert nämlich nicht.

§ 13 (2). Hier kommt eine sogenannte Cantorsche Reihe vor (Cantor, Über die einfachen Zahlensysteme, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **14, 1869**, S. 121—128; S. a. Perron, Irrationalzahlen, 111—116). Die Cantorschen Reihen betrachtet Bolzano ausführlicher in der Zahlenlehre II.

S. 91 Z. 7 v. u. Für $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ ist y auf Grund der Formel $\Delta y\ (2y+\Delta y)=-\Delta x\ (2x+\Delta x)$ eine beständig abnehmende Funktion von x, die alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann; daraus folgt die Stetigkeit von y als Funktion von x. S. 92, Z. 8 v. u. Siehe dazu § 70, I. Abschn. In der Anmerkung zu diesem § befindet sich die graphische Darstellung dieser Funktion.

S. 93 Z. 11 v. o. Der Beweis, daß die Funktion $y=F(x)$ im Punkte $x=1$ keine Ableitung besitzt, ist nicht richtig.

$$\text{Für } x=1 \text{ und } \Delta x=-\frac{1}{2^{2n}} \text{ ist } \Delta y=-\frac{1}{3.2^{2n}},\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{3},$$

$$\text{für } \Delta x=-\frac{1}{2^{2n+1}} \text{ ist } \Delta y=\frac{1}{3.2^{2n+1}},\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{3}.$$

$\lim\limits_{\Delta x\underset{\to}{\lessgtr}0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert also nicht. Weiter ist $-\frac{1}{3}\leqq\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqq\frac{1}{3}$, also $F^{-}(1)=\frac{1}{3}$. $F_{-}(1)=-\frac{1}{3}$.

§ 14. Es ist wieder Cauchy, Cours d'Analyse, gemeint. Zwei unendlich kleine Größen (nach der Definition von Cauchy), λ von der Ordnung n, λ' von der Ordnung n', können in der Form dargestellt werden: $\lambda=kx^n(1+\varepsilon)$, $\lambda'=k'x^{n'}(1+\varepsilon')$, wo k, k' endliche, von Null verschiedene Konstanten und $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon=\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon'=0$ ist. Ihr Verhältnis $\frac{\lambda'}{\lambda}$ hat für $x\to 0$ den Grenzwert $\frac{k'}{k}$ für $n=n'$, 0 für $n'>n$, $\pm\infty$ für $n'<n$. Der Satz gilt nur für unendlich kleine

Größen von bestimmter Ordnung nach der angeführten Definition von Cauchy, was Cauchy nicht ausdrücklich erwähnt.

§ 17. In M II stehen die Paragraphen in der Ordnung: § 17. § 19, § 18. § 18 beginnt ebenso wie § 17 mit den Worten: »Der letzte Teil... voraussetzen, *als wie 18$\frac{5}{5}$* überhaupt verletzen«, was wohl ein Hinweis für den Abschreiber sein sollte, daß dasselbe wie auf Bogen 18, Blatt 5 folgen soll. Die Paragraphen würden dem Zusammenhange nach geordnet, was überdies dadurch gerechtfertigt werden kann, daß § 19 in M I auf ein eingelegtes Blatt geschrieben ist.

§ 18. Anfang dieses Paragraphen S. 96 Z. 7 v. u. In der Handschrift wird genau nach den Annalen von Gergonne irrtümlich Galais statt Galois geschrieben. Es ist aber der durch seine Arbeiten über algebraische Gleichungen bekannte Évariste Galois gemeint. Vergl. Oeuvres Mathématiques d'Évariste Galois, p. p. Picard, S. 9. Fußnote.

§ 19. Die Funktion von Bolzano (S. auch I § 75).

Sei $y = F(x)$ die im Intervalle $[a_0, a_1]$ durch die Strecke $\overline{N_0 N_1}$ dargestellte Funktion, wobei N_0, N_1 die Koordinaten N_0 (a_0, A_0), N_1 (a_1, A_1), haben. $y = BF(x)$ sei die durch die gebrochene Linie $N_{10}\, N_{11}\, N_{12}\, N_{13}\, N_{14}$ dargestellte Funktion, wo $N_{10} = N_0, N_{14} = N_1$ und die anderen Ecken die Koordinaten

$$N_{11}(a_0 + \tfrac{3}{8}\delta,\ A_0 + \tfrac{5}{8}\Delta),$$
$$N_{12}(a_0 + \tfrac{1}{2}\delta,\ A_0 + \tfrac{1}{2}\Delta),$$
$$N_{13}(a_0 + \tfrac{7}{8}\delta,\ A_0 + \tfrac{9}{8}\Delta),$$
$$\delta = a_1 - a_0, \quad \Delta = A_1 - A_0$$

haben. Bezeichnen wir diese gebrochene Linie auch mit $B\,\overline{N_0 N_1}$. (Abb. 5a, 5b). Ist $y = F(x)$ eine durch die gebrochene Linie $N_0 N_1 N_2 \dots N_k$ dargestellte Funktion, so erhalten wir $y = BF(x)$, wenn wir jede der Strecken $\overline{N_0 N_1}, \overline{N_1 N_2}, \dots$ $\dots \overline{N_{k-1} N_k}$ durch die gebrochene Linie $B\,\overline{N_0 N_1}, B\,\overline{N_1 N_2}, \dots B\,\overline{N_{k-1} N_k}$ ersetzen.

Sei jetzt $y = f_0(x)$ die durch die Strecke $\overline{M_{00} M_{01}}$, $M_{00}\,(0, 0)$, $M_{01}\,(1, 1)$ dargestellte Funktion. Wir definieren $f_n(x) = B^n f_0(x)$ für jedes ganzzahlige $n \geq 0$ durch die Bedingungen $B^0 f_0(x) = f_0(x)$, $B^{n+1} f_0(x) = B[B^n f_0(x)]$.

Zunächst kann man beweisen:

Die Folge $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ konvergiert im Intervalle $[0, 1]$ gleichmäßig; es ist also $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ eine stetige Funktion im Intervalle $[0, 1]$.

In jenem Intervalle ist nämlich $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < (\tfrac{5}{8})^{n+1}$, so daß die Reihe $f_0(x) + [f_1(x) - f_0(x)] + [f_2(x) - f_1(x)] + \dots$ nach dem Kriterium von Weierstraß gleichmäßig konvergiert. Auf diese Weise kann die Lücke des Beweises von Bolzano (I § 75) ausgefüllt werden.

Die Werte der Funktion $f(x)$ sind uns unmittelbar für eine überall dichte Menge $\mathfrak{A}$ des Intervalles $[0, 1]$ bekannt. Diese Menge wird durch die Abszissen der Eckpunkte M_{ni} $(i = 0, 1, \dots 4^n)$ der gebrochenen Linien gebildet.

Die Koordinaten von M_{ni} seien (a_{ni}, A_{ni}).

Die Extrema der Funktion von Bolzano bestimmt H. Jarník folgendermaßen: Die Funktion $f(x)$ hat im Intervale $[0, 1]$ ein absolutes Minimum von der Größe 0 für $x = 0$ und ein absolutes Maximum von der Größe $\frac{4}{3}$ für $x = \frac{4}{5}$. Die relativen Extrema könnten auf folgende Weise erhalten werden: Ist $[a_{ni}, a_{n,i+1}]$, $i = 0, 1, \dots 4^n - 1$, ein Teilintervall, so hat die Funktion im Punkte

$$x = a_{ni} + \tfrac{4}{5}\delta_{ni},\ y = A_{ni} + \tfrac{4}{3}\Delta_{ni}$$

$$(\delta_{ni} = a_{n,i+1} - a_{ni},\ \Delta_{ni} = A_{n,i+1} - A_{ni})$$

ein relatives Extremum und zwar ein Maximum oder ein Minimum, je nach dem $\Delta_{ni} > 0$ oder < 0 ist. Andere Extrema gibt es nicht. Die Abszissen der Extrema bilden eine überalldichte Menge $\mathfrak{B}$ des Intervalles $[0, 1]$

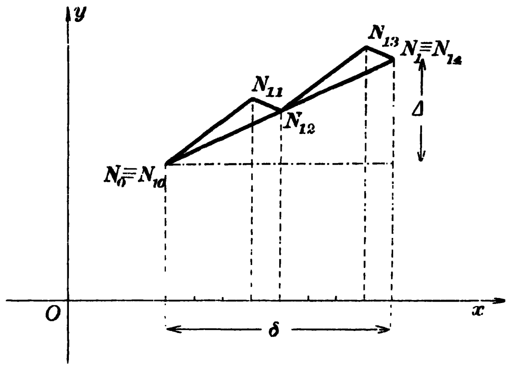

Abb. 5a

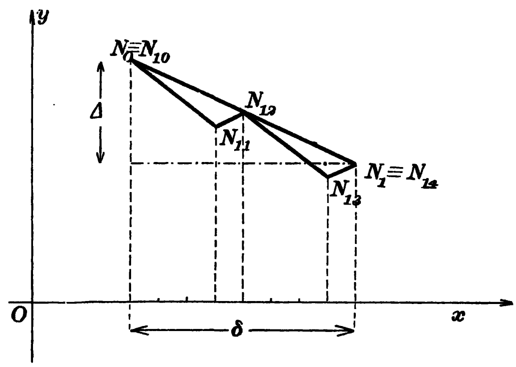

Abb. 5b.

Die Funktion von Bolzano $y = f(x)$ kann mit Hilfe eines Parameters auch durch zwei Funktionen der von Steinitz betrachteten Art (Math. Ann. 52, 1894, S. 58) dargestellt werden. Wir setzen $\varphi_n\left(\frac{l}{4^n}\right) = a_{nl}$, $\Phi_n\left(\frac{l}{4^n}\right) = A_{nl}$. Dabei seien $\varphi_n(\xi)$, $\Phi_n(\xi)$ in den Intervallen $\left[\frac{l}{4^n}, \frac{l+1}{4^n}\right]$, $l = 0, 1, \ldots 4^n - 1$, lineare Funktionen. Dann sind $\varphi_n(\xi)$, $\Phi_n(\xi)$ eindeutige stetige Funktionen im Intervalle $[0, 1]$. Die Funktion $y = f_n(x)$ ist dann in Parameterdarstellung gegeben durch $x = \varphi_n(\xi)$, $y = \Phi_n(\xi)$. Die Folgen $\varphi_n(\xi)$, $\Phi_n(\xi)$ konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig in $[0,1]$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(\xi) = \varphi(\xi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(\xi) = \Phi(\xi)$ stetige Funktionen in $[0, 1]$ sind. Die Funktion $x = \varphi(\xi)$ wächst beständig im Intervalle $[0, 1]$, so daß in diesem Intervall eine stetige, stets wachsende inverse Funktion $\xi = \psi(x)$ existiert und $y = f(x) = \Phi[\psi(x)]$ ist. Also ist $y = f(x)$ in Parameterdarstellung durch $x = \varphi(\xi)$, $y = \Phi(\xi)$ gegeben.

Bolzano weist von seiner Funktion nach, daß sie in keinem Punkte der überall dichten Menge $\mathfrak{A}$ des Intervalles $[0, 1]$ eine endliche Ableitung besitzt.

Es gilt aber der Satz:

Die Funktion von Bolzano besitzt in keinem Punkte des Intervalles $[0, 1]$ eine endliche noch eine unendliche Ableitung bestimmten Vorzeichens. (Im Punkte $x = 0$ ist die rechtsseitige Ableitung $+\infty$. Im Punkte $x = 1$ existiert weder eine endliche noch eine unendliche Ableitung mit bestimmtem Vorzeichen).

Ueber die einseitigen Ableitungen beweist H. Jarník folgenden Satz:

Die beiden Ableitungen, die rechtsseitige wie die linksseitige, existieren gleichzeitig nur in den Punkten der Menge $\mathfrak{B}$. Für die Maxima ist die linksseitige Ableitung $+\infty$, die rechtsseitige $-\infty$, für die Minima die linksseitige $-\infty$, die rechtsseitige $+\infty$.

In keinem Punkte hat die Funktion von Bolzano eine endliche rechtsseitige oder linksseitige Ableitung.

In den Punkten der Menge $\mathfrak{A}$ ist die rechtsseitige Ableitung unendlich und von bestimmtem Vorzeichen; die linksseitigen Ableitungen sind endlich, von gleichem absolutem Werte und entgegengesetztem Vorzeichen.

Weiter führt H. Jarník folgende Sätze über die Derivierten an:

Es gibt Punkte, in denen alle Derivierten endlich sind.

Es existiert eine Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums, in der $f^{+}(x) = +\infty$, $f_{+}(x) = -\infty$, $f^{-}(x) = +\infty$, $f_{-}(x) = -\infty$ gilt.

Literatur.

Über stetige Funktionen ohne Ableitung:

Encyklop. II A 2 Voß, 4: II C 9b Rosenthal—Montel. *40*.

Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen. Math. Zeitschr. 2, 1918, 1—26.

Die Funktion von Bolzano ist nach dem in dieser Abhandlung beschriebenen Verfahren gebildet, erfüllt die Bedingung A, nicht aber die Bedingung B.

Hobson, 2. Aufl., II S. 401—412.

Über die Funktion von Bolzano:

Jašek, O funkci Bolzanově. Časopis 51. 1922. 69—76.

Jašek, Aus dem handschriftlichen Nachlaß Bernard Bolzanos. Sitzungsber. königl. böhm. Ges. d. Wiss., II Kl. 1920/21. 32 S.

Rychlík, Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse, daselbst 1921/22, 20 S.

Jarník, O funkci Bolzanově. Časopis 51. 1922, 248—264.

Jašek, Über den wissenschaftlichen Nachlaß Bernard Bolzanos. Jahresber. d. d. Math. Vereinig. 31, 1922, Angeleg. S. 109.

Über verschiedene Modifikationen der Funktion von Bolzano:

Petr, P. d. S. 163. Ein spezieller Fall der Funktion von Steinitz.

Kowalewski, Bolzanos Verfahren zu Herstellung einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion. Sächs. Ber. Math-phys. Kl., 74, 1922, S. 91—95

Kowalewski, Über Bolzanos nirgends differenzierbare stetige Funktion, Acta math. 44. 1923. 315—319.

Die in diesen beiden Abhandlungen betrachteten Funktionen sind nach dem Verfahren von Knopp gebildet.*)

In der Funktionenlehre beantwortet Bolzano nicht die Frage, ob eine im Intervalle $|a, b|$ stetige Funktion existiert, die in keinem Punkte dieses Intervalles eine Ableitung besitzt. In den Paradoxien des Unendlichen § 37 (Fußnote) wird die Behauptung ausgesprochen, daß jede Funktion, wenn sie nur überhaupt »bestimmbar« ist, eine Ableitung besitzt in allen Punkten mit Ausnahme von isolierten Punkten. Die Frage, wie diese Behauptung in die Paradoxien gelangen konnte, versucht H. Jašek in der angeführten Abhandlung in der Sitzungsber. d. königl. böhm. Ges. d. Wiss. zu erörtern.

§ 21. Der angeführte Satz ist eine einfache Folge des Satzes von Dini, wenn $F(x)$ als stetig vorausgesetzt wird. (Dini S. 252—255; S. a. Petr, P. dif. S. 171). Es gilt allgemeiner der Satz: Ist eine der vier Derivierten der im Intervalle (a, b) stetigen Funktion $f(x)$ stetig im Punkte x von (a, b), so sind in diesem Punkte auch alle übrigen Derivierten stetig und sind alle einander gleich; die Funktion $f(x)$ hat dann eine Ableitung im Punkte x.

Bolzanos Beweis ist aber nicht richtig.

§ 22. Der angeführte Satz ist nicht richtig. Vergl. I § 80.

§ 24. Es gilt der Satz: Aus der Existenz der Ableitung von $F(x)$ im Intervalle (a, b) folgt nicht, daß der Quotient $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ für alle x aus (a, b) gleichmäßig gegen $F'(x)$ konvergiert. Vergl. I § 13 und II § 27.

§ 27. Der angeführte Satz von Bolzano, dessen Beweis nicht richtig ist, folgt aus dem Satze:

Hat $F(x)$ eine Ableitung im Intervalle (a, b), im Punkte a wenigstens eine rechtsseitige, im Punkte b eine linksseitige, und ist diese Ableitung stetig in $|a, b|$, dann konvergiert $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ gleichmäßig gegen $F'(x)$ in $|a, b|$. (Vergl. I § 13). Dieser Satz kann leicht mit Hilfe des Mittelwertsatzes bewiesen werden.

S. 107 Z. 5 v. o. Es wird der Satz von Bolzano-Weierstraß benützt.

§ 28. Der Beweis des angeführten Satzes wäre richtig, wenn man statt des im vorigen § enthaltenen Satzes den in der Anmerkung erwähnten benützen würde.

Bolzano beweist eigentlich, daß $F(a+h) - F(a) = \int_a^{a+h} F'(x)dx$ ist.

Im Beispiel (S. 111 Z. 8 v. o.) soll $58\cdot491 + \Omega$ stehen.

§ 29. Der Bolzanosche Beweis des Mittelwertsatzes ist ein Versuch, den Cauchyschen Beweis zu verschärfen. (Calc. inf. 7e leç.)

Bei dem Mittelwertsatze genügt es, die Stetigkeit von $F(x)$ in $|a, b|$ und die Existenz der (endlichen oder bestimmt unendlichen) Ableitung in (a, b)

---

*) Zusatz bei der Korrektur. Zu den angeführten Abhandlungen füge ich noch hinzu:

Avadhesh Narayan Singh (Calcutta University):

On some types of non-differentiable functions, Annals of Math. 28. 1927. S. 473.

O funkcyi nieróżniczkowalnej Bolzano (On Bolzano's non-differentiable function). Bul. internat. de l'Ac. Pol. de Cracovie, 1928. S. 191.

vorauszusetzen, so daß die Existenz und Stetigkeit von $F'(x)$ in $[a, b]$ nicht gefordert werden muß. Über μ gilt die Voraussetzung: $0 < \mu < 1$, was für die Anwendungen des Satzes wichtig ist (vergl. § 80). Der Beweis wird mit Hilfe des Rolleschen Satzes durchgeführt. Vergl. dazu Encykl. II A 2, Voß, 7.

§ 30. Beide Beispiele nicht besonders passend. Beim ersten Beispiele ist zwar die rechtsseitige Ableitung stetig im Intervalle $[0, 2]$, im Punkte $x = 1$ existiert aber die beiderseitige Ableitung nicht; beim zweiten Beispiele existiert die beiderseitige Ableitung im Punkte $x = 8$ aus $[6, 10]$ nicht.

§ 31. Der Satz ist zwar richtig, sein Beweis aber nicht.

§ 32. Der Satz ist richtig. Der Beweis ist für den Fall durchgeführt, daß $a + h$ der einzige Häufungspunkt der Singularitäten ist.

§ 33—35. Die Sätze sind in der angeführten Form nicht richtig.

Der richtige Satz, aus dem die übrigen Fälle abgeleitet werden können, lautet: Im Intervalle $[a, b]$ soll für die Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ existieren und die Folge der Ableitungen $f'_1(x), f'_2(x) \ldots f'_n(x) \ldots$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ konvergieren. Dann hat auch $f(x)$ eine Ableitung in $[a, b]$ und es ist $f'(x) = \varphi(x)$. (Nach Encyklop. II C 9b. Montel-Rosenthal. 37 in dieser Form von Dini).

Betrachten wir $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ in einem endlichen Intervalle $[a, b]$, welches 0 enthält. Dann ist $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, $f'_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 n}$. Für $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$ erhält man $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) = 0$ für $x \neq 0$. Hier ist nicht $f'(0) = \varphi(0)$. $f'_n(x)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ in $[a, b]$. Es ist nämlich $\lim\limits_{n \to \infty} (f'_n(x_n) - \varphi(x_n)) = \frac{1}{2} \neq 0$ für $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (Vergl. dazu Stolz, Math. Ann. 18, S. 265).

§ 36. Vergl. I § 6.

§ 38. Für eine unendliche Anzahl von Summanden gilt dies nicht ohne weitere Bedingungen. Vergl. die Anm. zu § 33—36.

§ 44. S. 125 Z. 9 v. u. Die erste Ableitung ist in der Handschrift nicht richtig angegeben. Es wird auch die zweite Ableitung berechnet.

§ 45. S. 125 Z. 3 v. u. Die eingeklammerten Worte haben nur einen Sinn, wenn es sich um eine ganze rationale Funktion höchstens n-ten Grades handelt. Bei einer Funktion genau n-ten Grades ist diese Konstante $\neq 0$.

§ 47. Die Behauptung des Satzes, insofern sie sich auf einseitige Ableitungen ohne jede Beschränkung beziehen sollte, ist nicht richtig (vergl. I § 31). Es genügt, $\Phi(x) = F[f(x)]$ für $x = 0$ zu betrachten, wo $y = f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $y = f(0) = 0$, $F(y) = |y|$ ist, so daß $\Phi(0) = 0$ wird. Die Funktion $f(x)$ hat die beiderseitige Ableitung 0 für $x = 0$, $F(y)$ hat für den entsprechenden Wert von y, $y = 0$, die rechtsseitige Ableitung 0. Es ist aber

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi(x_n)}{x_n} = 0 \text{ für } \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi(x_n)}{x_n} = -1 \text{ für } \frac{1}{x_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}.$$

so daß $\Phi(x)$ für $x = 0$ keine rechtsseitige Ableitung besitzt.

Ähnlich wie in I § 31 gilt der Satz:

Hat die Funktion $F(y)$ im Punkte y eine beiderseitige Ableitung $F'(y)$, die Funktion $f(x)$ an der Stelle x, für welche $f(x) = y$ ist, eine beiderseitige (bzw. rechts- oder linksseitige) Ableitung $f'(x)$, so hat die zusammengesetzte Funktion $F(f(x))$ für diesen Wert von x eine beiderseitige (bzw. rechts- oder linksseitige Ableitung $F'[f(x)] \,.\, f'(x)$. Der Satz könnte leicht auf den Fall erweitert werden, wo die Ableitungen unendlich werden.

Bei der in der älteren Literatur üblichen Herleitung

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta F(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta F(y)}{\Delta y} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(f(x)) \,.\, f'(x)$$

wird nicht der Fall betrachtet, wo $\Delta y = 0$ wird. Der Bolzanosche Beweis könnte leicht in dieser Richtung vervollständigt werden. Es würde genügen, $\Omega_1 = 0$ für $\Delta y = 0$ zu setzen und zu beweisen, daß aus $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \Omega_1 = 0$ auch $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Omega_1 = 0$ folgt. (Vergl. z. B. Rothe, Höh. Math. S. 246).

§ 30. S. 128 Z. 13, 14 v. u. Es wird $a \neq 0$, $b \neq 0$ vorausgesetzt.

S. 128 Z. 8 v. u. Vergl. mit der Anm. zu I. § 33.

§ 51. Bei $\varphi(y)$ muß die Stetigkeit vorausgesetzt werden. Es gilt also der Satz:

Die Funktion $y = f(x)$ möge für alle x aus (a, b) stetig sein und eine eindeutige inverse Funktion $x = \varphi(y)$ besitzen. Für x aus (a, b) soll die Ableitung $f'(x)$ existieren und $\neq 0$ sein, für den zugehörigen Wert von y sei $\varphi(y)$ stetig. Dann hat auch $\varphi(y)$ in diesem Punkte eine Ableitung und es ist $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

§ 52. Es ist nicht vorteilhaft, bei der Definition des vollständigen Differentials von $F(x, y)$ im Punkte (x, y), $dF(x, y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\, dy$, nur die Existenz von $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ im Punkte (x, y) vorauszusetzen oder, wie es Bolzano bei der Definition der Stetigkeit vom zweiten Grade tut, die Voraussetzung zu machen, daß

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial x} \text{ für } (x, y'),\ |y' - y| < \Delta y$$

und

$$\frac{\partial F(x', y)}{\partial y} \text{ für } (x', y),\ |x' - x| < \Delta x \text{ existiert.}$$

Es ist besser zu definieren:

Die in der Umgebung von (x, y) gegebene Funktion $F(x, y)$ hat in diesem Punkte ein vollständiges Differential, wenn

$$(*) \qquad F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \tau(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

ist, wo A, B von Δx, Δy unabhängig sind und $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0} \tau = 0$ ist: dann ist

$$A = \frac{\partial F}{\partial x},\quad B = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Hat die Funktion $F(x, y)$ im Punkte (x, y) ein vollständiges Differential, so ist sie in jenem Punkte auch stetig.

Die Funktion $F(x, y)$ hat im Punkte (x, y) ein vollständiges Differential, wenn in einer gewissen Umgebung von (x, y) die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existieren und im Punkte (x, y) stetig sind.

Wir könnten auch $F(x, y)$ in bezug auf eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ betrachten, die (x, y) zum Häufungspunkte hat, aber nicht die ganze Umgebung von (x, y) enthält. Gilt wieder (*), wobei $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ein Punkt aus $\mathfrak{M}$ ist und $\lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \tau = 0$ ist, so könnten wir sagen, daß $F(x, y)$ im Punkte (x, y) ein vollständiges Differential in bezug auf $\mathfrak{M}$ besitzt. (Lit. Encyklop. II C 9b, Montel-Rosenthal, 46.).

§ 53. Der Satz ist in der angegebenen Form nicht richtig. Es gilt aber der Satz:

Hat $F(y, z)$ im Punkte (y, z) ein vollständiges Differential [für die ganze Umgebung von (x, y)], ist $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ und haben $f(x)$, $\varphi(x)$ für den gegebenen Wert von x die beiderseitigen (bzw. rechtsseitigen, linksseitigen Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, so hat die zusammengesetzte Funktion $\Phi(x) = F[f(x), \varphi(x)]$ eine beiderseitige (bzw. rechtsseitige, linksseitige) Ableitung $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ und es ist

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Betrachten wir die Funktion $F(y, z) = \frac{yz}{y^2 + z^2}$ für $(y, z) \neq (0, 0)$, $F(0, 0) = 0$ (vergl. I. § 32, 39 Anm.). Im Punkte $(0, 0)$ ist sie nicht stetig, besitzt also dort sicher kein vollständiges Differential. Es ist $F(y, 0) = 0$ und $F(0, z) = 0$, so daß $\frac{\partial F(y, 0)}{\partial y} = 0$ für alle y und $\frac{\partial F(0, z)}{\partial z} = 0$ für alle z ist. Daher ist $\frac{\partial F(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial F(y, z)}{\partial z} = 0$ für $y = z = 0$. $\frac{\partial F(y, z)}{\partial y}$ existiert hiernach für $y = 0$ und alle z, $\frac{\partial F(y, z)}{\partial z}$ für $z = 0$ und alle y.

Setzen wir $y = x$, $z = x^2$, so wird $\Phi(x) = F(x, x^2) = \frac{x}{1 + x^2}$ (auch für $x = 0$). Nun ist $\frac{d\Phi}{dx} = 1$ für $x = 0$, obzwar $\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$ für $x = 0$ ist.

Im Beispiele (S. 132 Z. 13 v. o.) wird $a \neq 0$, $b \neq 0$ vorausgesetzt.

§ 54. $F(y, z)$ (S. 133 Z. 10 v. o.) ist als Funktion von x, $\Phi(x)$, für $x = 0$ eigentlich nicht definiert. Setzen wir $\Phi(0) = 1$, was sich aus der Formel Z. 10 ergibt, so wird die entstehende Funktion für $x = 0$ eine Ableitung besitzen.

§ 55. Es folgt ein nicht vollständig ausgerechnetes Beispiel: Man soll die Ableitung der Funktion $F(x, y, z) = \frac{x^3 y - y^2 z^2 + a z^3}{a^2 + x^2}$ nach x berechnen, wenn $y = 6 + x$, $z = \frac{a^2 - x^2}{x}$ ist.

§ 56. Zur Giltigkeit des angeführten Satzes reichen die angegebenen Bedingungen nicht hin. Wir führen zwei einfache Fälle von hinreichenden Bedingungen an:

I. Heffter-Young: $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ existieren in der Umgebung von (x, y) und haben dort vollständige Differentiale; dann existieren im Punkte (x, y) auch die zweiten partiellen Ableitungen und es ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

H. Schwarz: $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ existieren in der Umgebung von (x, y), $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ ist stetig im Punkte (x, y). Dann existiert im Punkte (x, y) auch $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$ und ist gleich $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$.

Literatur: Encyklop. II A 2, Voß *10*; II C 9b, Montel-Rosenthal *46*; s. a. Hobson, 2. Aufl. I S. 597, Petr S. 309—312.

§ 58. Es müssen wieder gewisse Bedingungen erfüllt sein. Z. B.:

Sind die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bis zur k-ten Ordnung einschließlich stetig in der Umgebung des Punktes $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, so ist jede dieser partiellen gemischten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge, in der die Differentiation ausgeführt wird. Zu dieser Frage: Neder, Über Funktionen reeller Argumente, Jahresber. d. d. Math. Vereinigung. 33, S. 80.

§ 59. Der Satz ist richtig. Um aber den Satz aus § 28 benützen zu können, müßte man die Stetigkeit von $f(x)$ im Intervalle (a, b) voraussetzen.

§ 62. Gilt ohne weitere Bedingungen nur für eine endliche Anzahl von Funktionen.

§ 66. Die angeführte Erweiterung des Begriffs der primitiven Funktion scheint durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen nicht genügend motiviert. Es ist einfacher, die Existenz der betrachteten primitiven Funktionen vorauszusetzen.

§ 73. Im ersten Teile des Satzes befindet sich die unrichtige Behauptung, daß die Nullstellen von $F'(x)$ isoliert sind, falls $F(x)$ im Intervalle $[a, b]$ beständig wächst; diese Nullstellen können aber auch einen Häufungspunkt besitzen.

Beispiel: $x = 0$ bei der Funktion $F(x) = \int_0^x x^2 \sin^2 \frac{1}{x}\,dx$, wenn man sie etwa im Intervalle $[-1, 1]$ betrachtet.

§ 74. Der letzte Satz (S. 147 Z. 8 v. o. »wenn nur ...«) ist unrichtig. Vergl. die Anm. zum vorigen §.

§ 78. S. 148 Z. 4 v. u.: $b \neq 0$.

§ 79. Hier wird auf die Schriften: Cauchy, Calc. dif. 7e leç.: Calc. inf. 6e leç. hingewiesen.

§ 80. Bei dem Beweise wird $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0, \ldots$ vorausgesetzt, was aus § 29 nicht folgen würde.

S. 152 Beisp. 1: $c \neq 0$. S. 153, Beisp. 2: $a \neq 0$.

§ 81. Die Behauptung, daß die Punkte, in denen Maxima und Minima auftreten, keinen Häufungspunkt besitzen können, ist nicht richtig.

Setzen wir $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $F(0) = 0$, so hat $F(x)$ in allen Punkten des Intervalles $[-1, 1]$ eine stetige Ableitung. Eine Ausnahme tritt nur im Punkte $x = 0$ ein, wo die Ableitung zwar existiert, $F'(0) = 0$, aber unstetig ist. $x = 0$ ist ein Häufungspunkt der Maxima und Minima.

§ 82. Die Taylorsche Formel gilt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$F(x)$ ist definitiert in $[a, a + h]$,

$F(x), F'(x), \ldots F^{(n-1)}(x)$ sind stetig in diesem Intervalle.

$F^{(n)}(x)$ existiert (endlich oder unendlich mit bestimmtem Vorzeichen) im Intervalle $(a, a + h)$. Im Punkte a, bzw. $a + h$ genügt die Existenz der einschlägigen rechtsseitigen bzw. linksseitigen Ableitung.

Für μ gilt: $0 < \mu < 1$.

Stolz (Grundzüge I S. 97) hat gezeigt, daß man die Existenz von $F'(a+h)$. $F''(a+h) \ldots F^{(n-1)}(a+h)$ nicht vorauszusetzen braucht. Bolzanos Beweis ist in dieser Richtung nicht befriedigend. (Vergl. § 31).

Im Beispiele wurden einige Rechenfehler verbessert.

Literatur: Encyklop. II A 2, Voß *11*; Hobson 2, Aufl. II S. 198.

§ 87. Es genügt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a+\mu h) = 0$ ist.

§ 88. Im wesentlichen schon bei Cauchy, Calc. inf. 37e leç.: Calc. dif. 9e leç. Es ist $(n!)^2 = [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \ldots [n \cdot 1]$.

Kein Faktor in den Klammern [ ] ist $< n$; es ist nämlich $a(n-a+1) - n = (a-1)(n-a) \geq 0$ für $a = 1, 2 \ldots n$. Es ist daher $(n!)^2 \geq n^n$, also $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$, $\frac{h^n}{n!} \leq \left|\frac{h}{\sqrt{n}}\right|^n$ und endlich $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} = 0$ und auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a+\mu h) = 0$.

Auf Grund dieses Satzes kann man leicht die Entwickelung der Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$ in Taylorsche Reihen bekommen.

§ 89. Aus $F^{(n+1)}(a) = F^{(n+2)}(a) = \ldots = 0$ folgt nicht

$$F(a+h) = F(a) + h\,F'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a).$$

Als Beispiel führen wir die Funktion $C(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$, $C(0) = 0$ an, die schon von Cauchy (Calc. diff. 10e leç.) betrachtet wurde. Hier ist $C^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ Die Funktion $C(x)$ kann auch in der Form $C(x) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{-1}{x^2 + \frac{1}{k}}}$ geschrieben werden. S. z. B. Pierpont II, S. 214; Hobson, 2. Aufl., II, S. 211.

§ 93. Der Satz ist richtig, sein Beweis aber nicht vollständig.

Kann $F(x)$ im Intervalle $[a, a+h)$ durch eine Potenzreihe $F(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots$ dargestellt werden, so folgt daraus die Existenz aller Ableitungen von $F(x)$ im Intervalle $[a, a+h)$. Um die Ableitungen zu erhalten, braucht man ja nur die Reihe gliedweise zu differenzieren. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

§ 95. Die Herleitung der Taylorschen Formel für Funktionen von zwei Veränderlichen ist im Anschluß an Lagrange, F. Anal. I. 12. durchgeführt. Die Bedingungen der Giltigkeit sind aber nicht ganz vollständig angegeben. Zu dieser Herleitung vergl. Stolz, Grundzüge I S. 140. (Die übliche in den Lehrbüchern angegebene Herleitung stammt im wesentlichen von Cauchy, Calc. dif. 23e leç. her.)

§ 97. Vergl. die Anm. zu § 89.

LITERATURVERZEICHNIS.

ÄLTERE SCHRIFTEN.*)

Bohnenberger, Anfangsgründe der höheren Analysis, Tübingen 1841 (U.-B.)
Bolzano. Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben nach dem schriftlichen

*) Die mit U.-B. bezeichneten Schriften befinden sich in der Prager Universitätsbibliothek.

Die mit B. B. bezeichneten Schriften befinden sich in Bolzanos Handbibliothek, welche gegenwärtig in der Prager Universitätsbibliothek aufbewahrt wird.