Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössendienen

Vorrede

Vorrede.

Den binomischen Lehrsatz pflegt man mit Recht als eines der wichtigsten Theoreme der ganzen Analysis zu betrachten. Denn aus demselben läßt sich nicht nur, wie hier gezeigt werden wird, auch jener polynomische, und die sämmtlichen Formeln, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, durch leichte Schlüsse ableiten; sondern auf ihm beruhet, als eine weitere Folgerung, auch das so viel umfassende Taylorsche Theorem, welches auf keine Art strenge erwiesen werden kann, wenn man nicht das binomische voraus setzt. So mögte es denn kaum übertrieben seyn zu sagen, daß fast die ganze so genannte Differential- und Integralrechnung (höhere Analysis) auf diesem Lehrsatze ruhet. Wie aber Hauptsätze in jeder Wissenschaft das Eigene haben, daß gerade ihre Darstellung mit den meisten Schwierigkeiten umwunden zu seyn pflegt: so ist es auch mit dem Binomialsatze der Fall. Man darf sich daher nicht wundern, daß das Verzeichniß der Mathematiker, die sich mit der Erfindung eines vollkommen strengen Beweises desselben beschäftiget haben, bereits so zahlreich ist. Newton's unsterblicher Nahme steht an der Spitze derselben. Ihm folgen — um hier bloß solche, die mir bekannt geworden sind, zu nennen, — ein

)(

Colson, Horsley, Th. Simpson, Robertson, Sewell, Landen, Clairaut, Aepinus, Castillon, L'Huilier, Lagrange, Kästner, Euler, Segner, Scherfer, Klügel, Karsten, Busse, Pfaff, Rothe, Hindenburg, Kaußler, Schulz, Pasquich, Rösling, Jungius, Fischer und Krause, Crelle, Nordmann, u. m. A.

Doch so viel Dankwerthes und wirklich Vortreffliches auch durch die Bemühungen all dieser Männer für unsern Satz bereits geleistet worden ist: so bleibt es doch gewiß, daß sie dem späteren Bearbeiter noch eine kleine Nachlese übrig gelassen haben. Es sey mir erlaubt, hier bloß im Allgemeinen, und ohne irgend Jemanden zu nennen, anzugeben, was ich an den bisherigen Darstellungen dieses Lehrsatzes vermisse.

I. Zuförderst meine ich schon, daß man den Sinn des Satzes selbst — ich will nicht sagen, unrichtig gefaßt, aber doch wenigstens nicht recht deutlich dargestellt habe.

1. Insgemein hat man die Glieder der Binomialreihe, wenn der Exponent keine ganze positive Zahl war, ins Unendliche fortgehen lassen. Hiegegen muß ich nun gleich erinnern, daß jede Annahme einer unendlichen Reihe, so viel ich einsehe, die Annahme einer Summe unendlich vieler Größen, jede versuchte Berechnung ihres Werthes also eine versuchte Berechnung des Unendlichen, ein wahrer calculus infinitesimalis sey. Will man sich also in keinen solchen einlassen — (und es scheint doch, als ob die meisten jetzt lebenden Mathematiker diesen so löblichen Vorsatz, wenn sonst aus keinem bessern Grunde, so doch der vielen Schwierigkeiten wegen, die dieser Calcul hat, wirklich gefaßt hätten) —; so muß man sich auch

durchaus der Annahme und Berechnung unendlicher Reihen enthalten. Ich wenigstens habe mir das nicht nur in dieser Schrift, sondern auch sonst überall zum Gesetze gemacht; wie ich denn auch statt der so genannten unendlich kleinen Größen mich durchgängig mit demselben Erfolge des Begriffes solcher Größen bediene, die kleiner als jede gegebene werden können, oder (wie ich sie zur Vermeidung der Eintönigkeit zuweilen gleichfalls nenne, obwohl schon minder eigentlich) der Größen, welche so klein werden können, als man nur immer will. Hoffentlich wird man den Unterschied zwischen den Größen dieser Art und dem, was man sich sonst unter dem Nahmen des unendlich Kleinen denkt, nicht verkennen. Die Forderung, sich eine Größe zu denken (eine veränderliche meine ich), die immer kleiner, als man sie schon genommen hat, und überhaupt kleiner als jede gegebene werden kann, enthält doch wahrlich nichts, das Jemand anstößig seyn könnte. Muß nicht vielmehr ein Jeder einsehen, daß es dergleichen Größen im Raume sowohl als in der Zeit sehr häufig gebe? Dagegen der Gedanke einer Größe, die nicht erst kleiner annehmbar, sondern schon kleiner seyn soll, als eine jede nicht bloß gegebene, sondern auch nur angebliche d. h. gedenkbare Größe, sollte der nicht widersprechend seyn? So lautet gleichwohl die gewöhnliche Erklärung des unendlich Kleinen.

2. Eben so allgemein gebräuchlich ist es, die Binomialgleichung als eine für jeden Werth des Exponenten, und für jede Beschaffenheit der zweytheiligen Größe geltende Gleichung darzustellen. Dennoch ist es gewiß, daß diese Gleichung eigentlich nur dann genau

gelte, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist. Für jeden andern Fall kann ihre Gültigkeit, wenn man keine unendliche Reihen annehmen will, nur in dem Sinne vertheidiget werden, daß der zwischen beyden Gliedern obwaltende Unterschied, d. i.

$$(1+x)^n - 1 - nx - n\frac{n-1}{2}x^2 - \ldots - n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-r+1}{r}x^r$$

kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, wenn man die Menge der Glieder in der Reihe groß genug nimmt; doch auch selbst dieses nur dann, wenn $x < \pm 1$ ist. Was soll ich erst sagen, wenn man die Gleichung unbedenklich selbst auf den Fall, wo die zweytheilige Größe negativ, und der Exponent von der Form $\frac{2n+1}{2m}$ ist, angewendet, wenn man z. B.

$$\sqrt{-1} = (1-2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}.2 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.4 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.8$$
$$- \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.\tfrac{5}{8}.16 - \ \ldots$$

gesetzt hat?

3. In der That aber war die Unstatthaftigkeit der Gleichung für Werthe von $x > \pm 1$ viel zu einleuchtend, als daß sie nicht von Jedem anerkannt, und wenigstens hinterher und mit halben Worten wäre eingestanden worden. Aber warum nur hinterher, und nicht gleich im Anfange? Und warum selbst da nicht immer auf die gehörige Art? Denn meistens heißt es nur: „die Gleichung gilt nicht" (oder, mit einem noch unbestimmteren Ausdrucke, „sie ist nicht tauglich zur Berechnung) „wenn die Glieder der Reihe nicht convergiren." Gibt man hiedurch nicht stillschweigend zu verstehen, daß man sie dann, wenn die Glieder convergiren, allemahl für richtig halte? Doch ist sie es auch selbst da nicht im=

mer; denn wenn $x = 1$, und n positiv ist, so nehmen die Glieder, anzufangen von einem gewissen, wohl immer ab; allein der Werth der Reihe kömmt, so weit man sie auch fortsetzen mag, dem Werthe von $(1+x)^n = 2^n$ doch keineswegs so nahe, als man will.

II. Hat man den Sinn eines Satzes noch nicht mit völliger Bestimmtheit dargestellt; so läßt sich im voraus erwarten, daß auch die Beweise desselben mehr oder weniger mißlungen seyn werden. Und wirklich müssen alle für den binomischen Lehrsatz geführten Beweise schon darum fehlerhaft seyn, weil sie zu viel beweisen. Denn dieser Satz gilt, wie gesagt, für einen gebrochenen oder negativen Exponenten höchstens, wenn $x < \pm 1$ ist. Aber in welchem der bisherigen Beweise wird auf diese so unumgängliche Bedingung nur die geringste Rücksicht genommen? Was soll es helfen, daß man bloß hinterher sich die Anwendung des Satzes auf Fälle, wo $x =$ oder $> \pm 1$ ist, verbietet; wenn aus den Beweisen selbst nicht zu ersehen ist, warum sie nicht auch für diese Fälle gelten? Können Beweise wohl richtig seyn, wenn sie nicht alle Bedingungen, auf welchen die Wahrheit eines Satzes ruht, benützen? — So ist es also im voraus schon entschieden, daß sich in jedem der bisherigen Beweise irgend ein Fehler vorfinden müsse. Wir wollen aber nur die wichtigsten und gewöhnlichsten in Kürze anzeigen.

1. Der allgemeinste bestehet in einer Erlaubniß, die man sich nicht nur bey dem Beweise des Binomialtheorems, sondern auch anderwärts sehr oft heraus nimmt, die Richtigkeit einer angeblichen Gleichung für hinlänglich erwiesen anzusehen, wenn man gezeiget hat,

daß ihre ersten, zweyten, überhaupt rten Glieder, (wo r so groß werden kann, als man nur immer will, zu beyden Seiten gleich sind; ohne nun noch zu untersuchen, ob es nicht vielleicht über dieß rte Glied hinaus immer noch eines oder einige gebe, welche einander ungleich sind, und deren Unterschied sich vielleicht nie so sehr, als man es will, vermindern läßt. Dieß Letztere muß sich nothwendig nachweisen lassen, soll man von zwey vorhandnen Ausdrücken in irgend einem Sinne des Wortes sagen können, daß sie einander gleich sind. Nur aus der Vorstellung, daß es unendliche Reihen gebe, in welchen folglich auch kein letztes Glied bestehe, wird es begreiflich, wie man sich von einer sonst so einleuchtenden Verbindlichkeit habe lossagen können. Die Folge war aber, daß man zu seinem eigenen Erstaunen sich bald in diese bald jene höchst ungereimte Behauptung verwickelt fand. So sagte z. B. die Binomialformel nun aus, daß

$$\frac{1}{11}=(1+10)^{-1}=1-10+100-1000+\ldots \text{ in inf.}$$

sey; eine Behauptung, vor welcher der gesunde Menschenverstand erschrickt! — Hätte man so, wie es seyn sollte, die Reihen immer nur endlich angenommen; so hätte sich alsbald gezeigt, daß die Binomialreihe:

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\pm x^r$$

dem wahren Werthe von

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\pm\frac{x^r}{1+x}$$

bloß dann in einem gewissen Sinne gleich gesetzt werden könne, wenn $x^r-\frac{x^r}{1+x}$ durch die Vermehrung von r so klein werden kann, als man nur immer will, d. h. wenn $x < \pm 1$ ist.

2. Alle diejenigen, die den binomischen Lehrsatz dadurch beweisen wollten, daß sie, ausgehend von der allgemeinen Form

$$(1+x)^n = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$$

die Beschaffenheit der Größen β, γ, ... A, B, C, ... durch Schlüsse zu bestimmen suchten, machten sich

α.) eines gemeinschaftlichen Versehens schuldig, welches in folgender Schlußart enthalten ist: „Wenn

$$(1+x)^n = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots\ldots \odot$$

„so muß auch seyn:

$$n(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+..) = (1+x)(\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\ldots)\ldots \mathfrak{z}.$$

„Also auch umgekehrt, wenn man β, γ, ..., A, B, C,... „so bestimmt, daß die Gleichung $\mathfrak{z}$ bestehet, so muß auch „die $\odot$ bestehen." Begreiflich ist dieses ein Fehlschluß, da keine Logik uns berechtiget, bejahende Sätze ohne Beweis bejahend und allgemein umzukehren. Zergliedert man aber diese Beweisart genauer, so findet man, daß sie im Grunde **zwey** dergleichen unbefugte, ja hier wirklich **falsche** Umkehrungen enthalte. Die **erste** geschieht bey dem Satze: „Wenn

$$(1+x)^n = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots \odot,$$

„so muß auch

$$n(1+x)^{n-1} = \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots \mathfrak{D}$$

„seyn." Woraus man durch Umkehrung schließt: „Wenn „also bey einer gewissen Bestimmung der Größen β, γ,..., „A, B, C, ... die Gleichung $\mathfrak{D}$ besteht, so besteht auch „die $\odot$." Eine einleuchtend falsche Behauptung, indem aus $\mathfrak{D}$ bekanntlich nur

$$(1+x)^n = \text{Const.} + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$$

folgt, wo Const. willkürlich ist. Allein man bildete auch noch den zweyten Satz: „Wenn

$$n(1+x)^{n-1} = \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots ☽,$$

„und zugleich

$$(1+x)^n = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots \odot;$$

„so muß auch

$$n(A + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots =$$
$$(1+x)(\beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots) \ldots ♁$$

„seyn. Auch diesen Satz kehrte man um, und schloß.“ „Wenn also die Gleichung ♁ besteht, so bestehet auch die ⊙.“ Dieß war nun offenbar um so unsicherer geschlossen. Gleichwohl wüßte ich nicht, daß nur ein einziger Mathematiker, seinen Beweis des Binomialtheorems (wenn er denselben auf diese Art geführt) weiter, als bis zur Bestimmung der Größen β, γ, .. A, B, C, ... aus der Gleichung ♁ fortgesetzt hätte. Alle glauben hier ihr Geschäft vollendet zu haben, da doch nur erst bewiesen ist, daß eine Reihe, die der ⊙ entsprechen soll, die Form

$$A + nAx + n\frac{n-1}{2}Ax^2 + \ldots$$

haben müsse. Ob aber jede Reihe von dieser Form, oder ob auch nur irgend eine, und bey welchen Bedeutungen der Größen A, n und x selbe der Gleichung ⊙ wirklich genug thue, das muß erst aus ganz andern Gründen noch entschieden werden.

b. Ferner ist auch die Art, wie man die Gleichung ♁ aus der ⊙ abzuleiten pflegt, nirgends befriedigend.

α.) Die Meisten bedienen sich hiezu der Differentialrechnung, d. h. einer Rechnung, die — wie sie bisher dargestellt worden ist, noch auf den schwankendsten Grünten beruhet; z. B. auf dem sich selbst widersprechenden Begriffe unendlich kleiner Größen; auf der Voraussetzung, daß auch Nullen ein Verhältniß zu einander haben, während die Logiker doch mit Recht bemerken: non entis nullæ sunt affectiones; u. dergl. m.

β.) Andere ahmen das Verfahren der Differentialrechnung künstlicher Weise nach, ohne sie selbst zu nennen; d. h. sie vermeiden das Wort, ohne die schwierige Sache selbst aus dem Wege zu räumen. Sie lassen Größen, welche sie erst als Divisoren gebraucht, am Ende Null bedeuten; welches nach meiner Meinung niemahls erlaubt seyn kann, indem es wohl möglich ist, mit jeder endlichen (d. i. wirklichen) Größe, nie aber mit einer Null (d. i. mit Nichts) zu dividiren. Heißt nähmlich Dividiren nichts als die Größe suchen, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus gibt; so läßt sich offenbar gar keine Größe denken, die mit Null multiplicirt, d. i. niemahls genommen, ein wirkliches Etwas gäbe.

γ.) Noch Andere wollen zur Herleitung der Gleichung ♄, oder sonst einer ihr gleichgeltenden Bedingung einen eigenen Grundsatz in die Mathematik eingeführt wissen; den nähmlich: „Was mit allem Wahren „übereinstimmt, ist auch selbst wahr.“ So gerne man diesen Satz zugeben mag; so sehr bezweifle ich doch die Möglichkeit, ihn als ein sicheres Kriterion zur Erfindung neuer Wahrheiten in irgend einer Wissenschaft zu brauchen. Uns ist nicht alles Wahre bekannt; wie also sollten wir bloß daraus, daß ein vorliegender Satz mit den uns bekannten Wahrheiten in keinem Widerspruche steht, jemahls mit Sicherheit schließen können, daß er auch keiner andern widerspreche? — Zum wenigsten erführe man auf diese Weise nie den objectiven Grund einer Wahrheit, um dessen Darstellung es in der Wissenschaft doch eigentlich zu thun ist.

c) Endlich wäre auch noch das an dieser Methode zu rügen, daß man die Exponenten von x in der Reihe $A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots$, die $= (1+x)^n$ seyn sollte, ohne hinlänglichen Beweisgrund $= 1, 2, 3, \ldots$ annahm. Zwar führte man zur Rechtfertigung dieser Annahme die Analogie der Potenzen $(1+x)^2$, $(1+x)^3, \ldots$ an. Wie aber, wenn Jemand aus eben dieser Analogie geschlossen hätte, daß die Exponenten von $(1+x)^{-2}$, $(1+x)^{-3}, \ldots$ negativ seyn müßten? —

3: Eine zweyte Beweisart des binomischen Lehrsatzes gründet denselben auf den Taylorischen. Dieses Verfahren hat

a) einmahl schon das wider sich, daß der Taylorische Satz ein noch viel schwierigerer ist, und wenigstens, so viel ich einsehe, nur durch Voraussetzung des binomischen strenge erwiesen werden kann.

b) Hiezu gesellt sich noch, daß man zur Anwendung des Taylorischen Satzes auf das Binomium bereits das erste Glied von der Entwickelung $(1+x)^n - 1$ kennen muß. Um nun darzuthun, daß dieses Glied nx sey, nehmen die strengsten Mathematiker ohne Beweis die Form $x.f(n)$ für dasselbe an. Ich sage, ohne Beweis: denn aus dem Taylorschen Satze, der aussagt, daß die Entwickelung von $f(y+\omega)$ im Allgemeinen die Form $fy + \omega f y + \ldots$ haben müsse, läßt sich dieß nicht schließen; indem man nie vergessen darf, daß jene Entwickelung nur im Allgemeinen, d. h. zwar für unendlich viele, aber doch nicht für alle Werthe von y gelte. Da man nun hier dem y einen **bestimmten** Werth, nähmlich $=1$ ertheilen muß: so frägt es sich, ob dieser nicht vielleicht gerade ein solcher ist, bey dem jene Entwickelung nicht angeht? Zwar ist mir die scharfsinnige Methode nicht unbekannt, durch welche ein Gelehrter neuerlich auch diese Schwierigkeit zu heben gesucht hat. Allein er bauet auf den Satz: „daß kein Glied einer Reihe die „Größe x enthalten könne, wenn dieser „Reihe Werth nicht selbst von x abhängt.“ Wie unrichtig diese Behauptung sey, lehre das einzige Beyspiel, daß bekanntlich für jeden ganzzähligen Werth von x

$$\mathrm{Sin}(2x\pi+\varphi)=(2x\pi+\varphi)-\frac{(2x\pi+\varphi)^3}{1.2.3}+\frac{(2x\pi+\varphi)^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$
$$=\mathrm{Sin}\,\varphi$$

also von x gewiß nicht abhängig ist, obgleich dieß x in jedem Gliede vorkömmt!

4. Der Versuch, die Form der Binomialreihe bey einem gebrochenen oder negativen Exponenten aus der Betrachtung zu bestimmen, daß $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ irgend ein eingeschaltetes Glied in der geometrischen Reihe

$$\ldots, (a+b)^{-2}, (a+b)^{-1}, (a+b)^{0}, (a+b)^{1}, (a+b)^{2}, \ldots$$

sey, verräth seine Unvollständigkeit schon dadurch, daß sich auf diese Art gar nicht ergibt, wie lange man jedesmahl die Reihe von $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ fortsetzen müsse, und ob sie allgemein, oder nur, wenn $\frac{a}{b} < \pm 1$ ist, gelte.

5. Am Gründlichsten verfuhren wohl Jene, welche die Gültigkeit der Binomialgleichung erst für ganze positive Exponenten erwiesen, dann aus Betrachtung der Na-

zur solcher Producte, deren Factoren von der Form

$$1 + nx + n\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots = {}^nS$$

sind, darzuthun suchten, daß jene Gleichung auch für gebrochene und negative Exponenten gelte. Und in der That, nachdem man hier erst die Uibereilung vermeiden gelernt, aus dem gleich großen Werthe zweyer Reihen sofort auf ihre gleiche Form zu schließen, erwuchsen auf diesem Boden Beweise, denen (nebst ihrer etwas ermüdenden Weitläufigkeit) nichts auszustellen wäre, wenn — sie nicht auf die unzulässige Vorstellung unendlicher Reihen gegründet wären. Will man sich dieser Vorstellung, wie es gebührend ist, enthalten; so fallen mehrere der daselbst gebrauchten Schlüsse weg; und man erhält nun Reihen, die zwar von ihrem ersten Gliede an bis hin zu einem beliebig vielten einander gleich kommen, dann aber eben so viele ungleiche Glieder haben, so daß es, um die Gleichheit ihres Werthes behaupten zu können, nöthig wird, zu zeigen, daß die Summe der ungleichen Glieder kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn man die Menge der gleichen groß genug macht. —

Aehnliche Fehler, wie wir so eben an den bisherigen Beweisen des Binomialtheorems gerügt, beging man auch bey Herleitung derjenigen Formeln, die zur Berechnung der Exponentialgrößen und Logarithmen dienen. Allgemein nahm man die Reihen, welche den Werth von a^x und log y ausdrücken sollen, als fortschreitend ins Unendliche an; bediente sich überdieß der Vorstellung unendlich kleiner Größen; oder ließ Größen, welche man anfangs als wirkliche betrachtet, und als Di=

visoren angewandt hatte, im Verlaufe der Rechnung den Nullwerth annehmen; u. s. w.

In vorliegender Abhandlung erhält man nun — als Probe einer neuen Bearbeitung der Analysis — die auf dem Titel genannten Lehrstücke derselben so dargestellt, daß, wie ich hoffe, nicht nur die eben gerügten Fehler, sondern auch einige andre Verstösse gegen die gute Methode, die man sich häufig erlaubt, vermieden worden sind. Uiberhaupt habe ich mich, was die Methode betrifft, zwar an die Grundsätze gehalten, die in den Beyträgen zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung. 1810, im zweyten Abschnitte, aufgestellt sind; weil ich von ihrer Richtigkeit noch immer überzeugt bin: nichts desto weniger hat es — (und dieses muß ich zur Vermeidung jedes Mißverständnisses erinnern) — die fragmentarische Form des gegenwärtigen Aufsatzes nicht erlaubt, jene Grundsätze hier in allen Stücken zu befolgen; sonst hätte der Vortrag gleich bey den ersten Begriffen und Lehren der Arithmetik anfangen müssen, indem auch diese schon in einem vollkommnern Systeme bedeutend anders dargestellt werden müssen, als es bisher geschieht, was dann begreiflich auch auf die Darstellung des Folgenden einigen Einfluß hat. Gerade dadurch aber, daß man in dieser Schrift alle Beziehungen auf Begriffe und Lehren, die noch nicht im Umlaufe sind, vermieden, hofft man ihr einen solchen Grad der Faßlichkeit gegeben zu haben, daß sie nicht nur als Leitfaden bey einem öffentlichen Unterrichte brauchbar, sondern auch Anfängern, die nicht ganz ungeübt sind, selbst ohne eines Lehrers Nachhülfe verständlich seyn dürfte. In dieser

Rücksicht wird es jedoch nicht überflüssig seyn zu bemerken, welche §§ dieser Schrift nach Umständen entweder ganz, oder doch beym ersten Durchlesen übergangen werden können. Will man sich in Betreff der Binomialformel bloß von ihrer Gültigkeit überzeugen, ohne zugleich den Beweis, daß es auch keine andere Formel zur Darstellung des entwickelten Werthes von $(1+x)^n$ gebe, zu verlangen: so kann man von §. 12 unmittelbar zu §. 38 übergehen. Begnüget man sich mit einem Gleichen bey den Formeln, die zur Berechnung der Logarithmen dienen; so ist es hinlänglich von §. 66 bloß n°.1 zu lesen. Eben so füglich kann man im Anfange die §§. 49—51 übergehen, weil sie bloß untersuchen, wie eine Formel beschaffen seyn müßte, welche den Werth von $(a+x)^n$ für möglichst vielerley x und n angäbe. Uiberhaupt können auch die §§. 6. 9. 11. 12. 31. 35. 36. 63. 67. 68 anfänglich überschlagen werden. Und hieraus wird man zugleich ersehen, daß die in dieser Schrift gelieferte Beweisart nicht so gar weitläufig sey, als man vielleicht aus der bloßen Bogenzahl vermuthet. Die Wichtigkeit des Satzes §. 29 wird jeder Kenner einsehen; denn ihm wird einleuchten, daß derselbe (verbunden mit §. 27) die Anwendung sämmtlicher Operationen der Differential- und Integralrechnung auf alle Gleichungen mit veränderlichen Größen vollständig begründet.

Raditsch, am 5ten Sept. 1815.

Bolzano.