DIE DREY PROBLEME DER RECTIFICATION, DER COMPLANATION UND DER CUBIRUNG,

ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst;

zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.

VORREDE

Die Rectification der krummen Linien, die Complanation der Flächen, und die Cubirung der Körper sind drey Hauptafgaben, mit deren Lösung sich die niedere sowohl als höhere Geometrie beschäftigt. So leicht und allgemein aber die Auflösungen sind, die man besonders in neuerer Zeit für diese drey Aufgaben gefunden hat: so sehr mangelt es doch bis jetzt an strengen und echt wissenschaftlichen Beweisen ihrer Richtigkeit, wenigstens in Betreff der beyden ersteren.

Auffallen muß es in diesem Betrachte schon, daß in dem ältesten Lehrbuche der Geometrie, zugleich demjenigen, an dem wir eine noch immer unübertroffene Strenge bewundern, in den Elementen des Euklides, bey einem so großen Vorrathe von Sätzen, nicht ein einziger vorkömmt, der über die Länge einer krummen Linie, oder den Inhalt einer krummen Fläche etwas bestimmte. Kann man sich dieses Stillschweigen anders erklären, als daraus, weil der tief denkende Verfasser dieses Werkes einsah, daß die wenigen Sätze, welche allein er sich erlauben wollte, unter dem Nahmen von Grundsätzen seinem | Systeme **IV**
beweislos einzuverleiben, durchaus nicht zureichend sind, um das Verhältniß auszumitteln, das zwischen geraden und krummen Linien oder Flächen in Rücksicht auf Größe obwaltet? —

Erst spätere Geometer also, von denen man sagen möchte, der Geist der Strenge sey von ihnen je länger je mehr gewichen, lösten einzelne in dies Gebieth gehörige Aufgaben, aber nur dadurch auf, daß sie sich die Freyheit heraus nahmen, die Zahl der geometrischen Grundsätze durch einige neue zu vermehren. Bemerkenswerth aber hiebey ist, daß der Erste, der dieses wagte, der treffliche Archimedes, mit seinen neuen Grundsätzen nur unter der schüchternen Benennung von Annahmen aufgetreten sey.*) Es waren dies wesentlich folgende vier:

*) *Λαμβάνω δὲ τἄντα,* sagte er. Auch überschrieb man sie nur: *Ὑποθέσεις*.

I. Jede krumme Linie ist länger als die gerade, die zwischen denselben Endpunkten liegt.

II. Von zwey krummen Linien, die beyde nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende länger als die umschlossene.

III. Wenn eine krumme und eine ebene Fläche dieselben Grenzen haben, so ist die erstere größer als die letztere.

IV. Von zwey krummen Flächen, die beyde nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende größer als die umschlossene.[43])

Wenn man schon unter den Grundsätzen des Euklides Einen
V von jeher anstößig gefunden und sich gegen | seine Annahme durch alle Jahrhunderte hindurch gesträubet hatte; weil Jeder fühlte, daß dieser Satz, so sicher und einleuchtend er ist, gleichwohl kein eigentlicher Grundsatz, d. h. kein solcher Satz zu nennen sey, der keinen weiteren Grund seiner Wahrheit zuläßt*): um wie viel einleuchtender mußte es nicht von jenen neuen Annahmen des Archimedes seyn, daß sie die Stelle an der Spitze des Systems gewiß nicht in der Eigenschaft echter Grundsätze, sondern höchstens als solche Sätze verdienen, auf die man vorzugsweise aufmerksam machen will, weil man, obgleich ihre Beweise noch nicht gefunden sind, ihrer sich doch bereits bedient hat. Wirklich sehen wir auch in der Geschichte der Geometrie, daß man sich zu aller Zeit bestrebt habe, Eines von Beydem zu leisten: entweder jene ὑποθέσεις des Archimedes durch einen eigenen Beweis erst zu rechtfertigen, oder die Lehrsätze, die er auf sie gegründet hatte, auf einem andern Wege herzuleiten. Allein so lange noch keine Übersicht des Ganzen da war; so lange man nur erst die Größe einiger einzelner Linien und Flächen, mehr durch gewisse glückliche Kunstgriffe, als durch eine überall anwendbare Methode heraus gebracht hatte; von jenem allgemein gültigen Verhältnisse aber, das zwischen den Gleichungen für die Natur einer Linie, Fläche oder eines Körpers, und zwischen den Ausdrücken für ihre Größe herrscht, keine Ahnung hatte: so lange war es beynahe unmöglich, die einzig objectiven, oder echt wissenschaftlichen
VI Beweise auch nur für jene Auf- | lösungen zu entdecken, in deren Besitze man schon wirklich war.

Es blieb dem Zeitalter der wichtigsten Entdeckungen in dem Gebiethe der Mathematik, dem Zeitalter der Erfindung des Differential- und In-

---

*) Man vergleiche über diesen Begriff eines Grundsatzes die Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung. Prag. 1810. S. 59--96.[44])

tegralcalculs aufbehalten, uns mit diesem so merkwürdigen Verhältnisse bekannt zu machen. Die Länge einer jeden Linie ist $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; der Inhalt einer jeden Fläche $=\int\int dx dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$; der Inhalt eines jeden Körpers $=\int\int\int dx dy dz$; wenn nähmlich x, y, z die drey rechtwinkeligen Coordinaten dieser Raumdinge bedeuten. Da nun die allgemeinste Art, die Natur eines Raumdings zu bestimmen, die Angabe gewisser Gleichungen zwischen Coordinaten ist; und da, sobald diese gegeben sind, die Herleitung seiner Größe nach den nur angeführten Formeln eine rein analytische Verrichtung*) | wird; VII
so drücken die letzteren wirklich jene drey allgemeinsten Lehrsätze aus, die in Beziehung auf Rectification, Complanation und Cubirung nur immer ausgesprochen werden können. Würde man also nur diese drey Formeln gehörig dargethan haben; so wären mit einem Mahle schon alle Aufgaben, welche in jenem dreyfachen Gebiethe vorkommen können, geometrisch aufgelöst, und bloß in einzelnen Fällen bliebe noch eine der Analysis zu lösende Schwierigkeit, betreffend die Integration gefundener Ausdrücke, übrig.

Aber noch mehr, wenn jene drey Sätze wirklich die allgemeinsten sind; so folgt hieraus, daß ohne erst sie aus ihrem objectiven Grunde gehörig hergeleitet zu haben, kein anderer Lehrsatz über die Ausmessung einzelner Linien, Flächen und Körper richtig dargethan werden könne; indem die Natur echt wissenschaftlicher Beweise fordert, daß der be-

*) Eine rein analytische (auch rein arithmetische, oder algebraische) Verrichtung heißt eine solche, zu Folge der man eine gewisse Function aus einer oder etlichen andern bloß dadurch ableitet, daß man mit ihnen gewisse Veränderungen und Verbindungen vornimmt, welche durch eine von der Natur der bezeichneten Größen ganz unabhängige Regel ausgesprochen sind. So heißt z. B. die Art, wie die Function $(1+x)^n$ aus der $(1+x)$ abgeleitet wird, eine rein analytische Verrichtung, denn man erhält $(1+x)^n$ aus $(1+x)$, indem man mit der letzteren gewisse Veränderungen und Verbindungen vornimmt, die eine Regel angibt, welche von der Natur der Größe, die $(1+x)$ bezeichnet, ganz unabhängig ist. Und eben so weiß Jeder, der Differential- und Integralrechnung verstehet, daß z. B. der Ausdruck $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ eine Function bezeichne, die sich aus den gegebenen zwey Functionen $y=fx$ und $z=\overline{f}x$ durch Regeln herleiten läßt, welche von der Natur der Größen, die diese Ausdrücke bezeichnen, ganz und gar nicht abhängen. — Überdies muß es auch Jedem bekannt seyn, daß sich diese Regeln auf eine solche Art aussprechen lassen, daß der Begriff des unendlich Kleinen, den man wohl sonst mit den Bezeichnungen dx, dy, dz, ... verknüpft hat, gänzlich vermieden werde. Hoffentlich also wird uns wohl Niemand vorwerfen, daß wir in dieser Abhandlung den Begriff unendlich kleiner Größen stillschweigend aufgenommen hätten, weil wir doch Ausdrücke von der Form $\frac{dy}{dx}$, $\int y dx$, u. dergl. m. gebrauchen? —

sondere Satz immer nur aus dem allgemeineren erwiesen werde.*) Wirklich behaupte ich, daß keiner der bisher bekannt gewordenen Beweise jener drey allgemeinen Sätze echt wissenschaftlich sey. Allein da ich die sämmtlichen Mängel unserer bisherigen Systeme
VIII der Geo- | metrie in einem eigenen Werke nächstens umständlich zu beurtheilen gedenke: so sey mir erlaubt, zum Beweise meiner gegenwärtigen Behauptung jetzt nur so viel anzubringen, als eben nothwendig ist, um sie nicht unbegreiflich zu finden; in Rücksicht des Mehreren aber im voraus auf jenes bald zu erscheinende Buch zu verweisen.

Ich unterscheide zuerst die beyden Aufgaben der Rectification und Complanation von jener der Cubirung.

Alle diejenigen Geometer, welche wie die Erfinder der Infinitesimalrechnung, oder wie noch in neuerer Zeit vornehmlich Johann Schultz gethan hatte, sich des Begriffes des unendlich Kleinen bedienen, können nebst dem, daß sie von diesem Begriffe selbst den Verdacht des Widerspruchs nie zu entfernen vermögen,**) auch auf folgende Frage nicht genügend antworten: „Warum die Länge eines unendlich kleinen Bogens nur mit der Länge derjenigen geraden Linie, die durch dieselben Ordinaten, wie er begrenzet wird, und dies nur dann übereinstimme, wenn sie die Richtung der Chorde oder Tangente hat, nicht aber, wenn sie die Ordinaten unter was immer für einem andern Winkel durchschneidet?"[45]) Bekanntlich nehmen doch diese Geometer selbst noch einen Unterschied zwischen dem Bogenstücke und seiner Chorde an; behaupten aber, daß derselbe in Rücksicht auf die Länge ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung sey, während der Unterschied zwischen dem Bogen und einer anders gezogenen geraden Linie ein unendlich Kleines der ersten Ordnung betragen könne. Wo ist nun der Beweis
IX dieser Behauptungen? Oder soll man wohl Ur- | theile, welche so vielfach zusammengesetzt sind, als echte Grundwahrheiten ansehen können?***)

Jene, die das unendlich Kleine für ein absolutes Nichts erklären, haben zuförderst den Einwurf zu lösen, wie Nichtse ein Verhältniß zu einander haben können? Gesetzt, sie könnten hierauf erwiedern, daß Ausdrücke, wie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, nicht das Verhältniß der zu Nichts gewordenen Differenzen Δx, Δy, sondern nur das Verhältniß bezeichnen, in welchem die Art, wie Δx verschwindet, zur Art, wie Δy verschwindet, stehe: so

*) S. hierüber die vorhin erwähnten Beyträge, S. 102 f. f.

**) S. den binomischen Lehrsatz u. s. w., Prag, 1816, Vorr. S. IV.

***) Ich bitte hierüber die erwähnten Beyträge, S. 87 ff. nachzuschlagen.[46])

frage ich doch auch hier wieder, wie vorhin: warum nur Bogen und Chorde, nicht aber andere Linien, z. B. der Bogen und das Increment der Abscisse in ihrem Verschwinden das Verhältniß der Gleichheit zu einander haben? — Was kann willkürlicher seyn, als folgender Schluß, den man gleichwohl bey mehreren sehr achtungswürdigen Mathematikern z. B. bey Herrn Langsdorf (in seiner Einleitung in das Studium der Elementargeometrie, Algebra u. s. w., Manheim und Heidelberg 1814. Elemente der höhern Geometrie § 10, § 11); bey Herrn du Bourguet (in Traités élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral, indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites, Paris 1810, P. II. § 529, 532, 534) u. A.[47]) antrifft: „der Bogen Δs und seine Sehne $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ sind nur so lange verschieden, als beyde noch nicht | Null geworden sind: X
also hat man für diesen letztern Fall in völliger Schärfe $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}$." Könnte man nicht auf eben die Art behaupten, daß auch $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$, oder $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 1$ sey? — Daraus, daß zwey Größen zugleich verschwinden, folgt ja nicht, daß das Verhältniß der Art ihres Verschwindens in beyden gleich sey; oder, besser zu sagen, daß das Verhältniß dieser Größen dem Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen könne, als man nur immer will, wenn man sie selbst so klein nimmt, als man will.

Frey von dergleichen Fehlschlüssen bleiben allerdings Jene, die mit Vermeidung aller Begriffe vom unendlich Kleinen und aller Nullverhältnisse die Methode der Grenzen und den Taylorischen Lehrsatz auf eine solche Art verbinden, wie es z. B. von la Grange, Pasquich, Grüson, Buzengeiger, Bohnenberger, Crelle, u. A. mit mehr oder weniger Eigenthümlichkeit geleistet worden ist. Aber alle diese nahmen nun ihre Zuflucht ausdrücklich zu den sogenannten Grundsätzen des Archimedes. Man sehe z. B. des la Grange Théorie des fonctions analytiques, Art. 136, 137. Oder desselben Leçons sur le calcul des fonctions, Nouv. Edit. Leç. 9ème. Oder des Herrn Pasquich Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung, in Hindenburgs Archiv, 8. Heft 1798, S. 419. Oder Herrn Crelle's Versuch einer Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen, 1. Band, Göttingen 1813, u. A. m.[48]) |

XI Aber vielleicht sind diese ehemals unerwiesenen Annahmen des Archimedes durch die Bemühungen der neuesten Geometer schon hinlänglich dargethan worden? Wirklich hat man ein und dem andern ihrer Versuche den Lobspruch einer vollkommnen Strenge ertheilt; doch, wie es scheinet, nur darum, um sich mit desto mehr Fug und Recht auf sie berufen zu können; oder, weil hier das Sprüchwort: homines, quod volunt, credunt, eintrat.

Le Gendre, dessen Beweis man für den gründlichsten erklärt hat, begehet auch in der zehnten Ausgabe seiner sehr schätzbaren Eléments de Géometrie, Paris 1813, p. 115, 244, eben denselben Fehlschluß, auf den schon E. G. Fischer (in seiner Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis, Berlin 1808) einiger Maßen aufmerksam gemacht hat.[49]) „Wenn die umschlossene Linie, sagt er, nicht kürzer als alle umschließenden ist: so muß es unter den letztern eine geben, die kürzer als alle übrigen, und entweder nur so lang oder noch kürzer als die umschlossene ist." In diesem Satze sind zwey Behauptungen enthalten. Die eine derselben, nähmlich: „wenn die umschloßene Linie nicht kürzer als alle umschließenden ist, so muß unter den letzteren eine, die eben so lang, oder noch kürzer ist, vorhanden seyn", ist allerdings zweifellos; denn es ist — ein identischer,
XII also (wie alle analytischen) auch nutzloser Satz.*) Um | desto leichter geht man hinweg über die zweyte Behauptung, die hier, es sey nun absichtlich oder aus Zufall, in jene eingeschoben ist: „Wenn die umschlossene Linie nicht kürzer als alle umschließenden ist, so muß es unter den letzteren eine, die kürzer als alle übrigen ist, geben." Ich sehe durchaus nicht ein, in welchem Zusammenhange der Vordersatz dieser Behauptung mit dem Nachsatze stehe, oder was für ein Obersatz das gewesen seyn müsse, den der Verfasser bey diesem Enthymema im Sinne gehabt hat.[51]) Dachte er etwa „1. daß unter allen Größen einer gewissen Art (hier also unter allen Linien, die eine andere umschließen) eine die kleinste seyn müsse": so wäre dies offenbar ein irriger Gedanke gewesen, den er im Verfolge gleich selbst widerlegt; wie denn auch dann der Vordersatz müßig beygesetzt wäre. Doch die Verwerflichkeit des ganzen Urtheiles leuchtet aufs Deutlichste ein, so bald man sich nur erinnert, daß sein Subject (die Hypothesis: „wenn die umschlossene Linie nicht kürzer als alle umschließenden ist") etwas Unmögliches sey. Von einem Undinge aber läßt sich nie etwas Wahres prädiciren, und daher sollten Urtheile, deren Subject eine Unmöglichkeit enthält, in der Wissenschaft gar nicht aufgestellt werden. Wie albern wären z. B. die Urtheile: Wenn in einem Dreyecke alle Winkel recht sind; so ist dasselbe gleichseitig, so sind zwey Seiten desselben parallel, u. s. w. Überhaupt kann man schon aus dem Umstande entnehmen, daß der

*) S. die Beyträge, S. 81.[50])

Beweis des Verfassers fehlerhaft seyn müsse, weil die Bedingung, welche zur Wahrheit des Satzes ganz unerlässlich gehört, daß nähmlich die umschlossene Linie | nach einer Seite zu hohl sey, zwar wohl XIII erwähnt, aber nicht in der That benützet wird.*)

Eine bedeutende Menge anderer Geometer nimmt bald stillschweigend, bald ausdrücklich den falschen Satz an: „Wenn von zwey Linien (eben so Flächen) die eine in ihren sämmtlichen Puncten einer gewissen dritten näher als die andere liegt, so kömmt sie ihr auch in ihrer Länge (die Fläche in ihrem Inhalte) näher." So Lorenz (in seinen Elementen der Mathematik, 2te Aufl. Leipzig 1793, I. Theil. § 209), La Croix (in seinen Anfangsgründen der Geometrie, übersetzt von Hahn, Berlin 1806, § 152, 270), Ide (in seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik, Berlin 1803, 2. Theil, § 9, 158, 159, 261), Thiebaut (in seinem Grundrisse der reinen Mathematik, 2. Aufl. Göttingen 1809, S. 277, 387), Pasquich (in seinen Anfangsgründen der gesammten theoretischen Mathematik, Wien 1812, 2. B. § 306, 861) u. m. A. — Gleichwohl hatte auf diese so einleuchtend falsche Behauptung schon Kästner (Anfangsgründe der Geometrie, 41. Satz 1. Zus. X) aufmerksam gemacht.[52])

Andere sagen: „Zwey Linien (und eben so zwey Flächen) kommen einander an Länge um desto näher, je mehrere Puncte sie mit einander gemein haben." So Klügel (in seinem mathematischen Wörterbuche, 1. B. Art. Bogen S. 343, Art. Complanation S. 512) u. A.[53]) |

Dieser und der nächst vorhergehende Satz lassen sich beyde höchstens nur dann als wahr vertheidigen, wenn sie von Linien oder Flächen, die nur nach einer Seite zu hohl sind, verstanden werden. Aber auch versehen mit dieser Einschränkung, können sie immer noch nicht als Grundsätze gelten, sondern sind vielmehr sehr späte Folgewahrheiten. Denn wie zusammengesetzt ist nicht blos der Begriff dessen, was man „nach einer Seite zu hohl" nennt. Wie viele Worte bedarf es nicht zur Erklärung nur dieses einzigen Begriffes! — Was aber der Aufmerksamkeit der Geometer bisher entgangen zu seyn scheint, ist, daß diese Sätze alle noch nicht auslangen, wenn es sich um die Berechnung der Curven von doppelter Krümmung handelt. Sowohl die Grundsätze des Archimedes nähmlich, als auch die Sätze, die man statt ihrer vorgeschlagen hat, sind höchstens auf Linien anwendbar, die ganz in einer und eben derselben Ebene liegen; weil nur XIV

*) Vergleiche die Beyträge, S. 106—110.

auf solche Linien auch der Begriff der Ausbiegung nach einer Seite hin, der zu ihrer Wahrheit ganz unumgänglich gehört, angewandt werden kann. Nun gibt es aber bekanntlich auch Linien von gedoppelter Krümmung; und auch diese haben eine Länge, die sich berechnen lassen muß. Ich frage nun Jeden, wie er die obigen Sätze zu modificiren gedenkt, damit sie sich auf Linien von dieser Art erstrecken?

Hier wäre es wohl unstreitig besser gewesen, wenn man statt aller jener Sätze nur folgende zwey aufgestellt haben würde:

I. Zur Rectification der Linien den Satz: das Verhältniß der
XV Länge eines nach dem Gesetze | der Stetigkeit (gleich viel ob einfach oder doppelt) gekrümmten Bogens zu seiner Sehne kommt dem Verhältnisse der Gleichheit so nahe, als man will, wenn man den Bogen selbst so klein nimmt, als man will.

II. Zur Complanation der Flächen den ähnlichen Satz: das Verhältniß des Inhalts einer nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmten Fläche, welche mit einer Ebene geschlossen ist, zum Inhalte dieser begrenzenden Ebene kömmt dem Verhältnisse der Gleichheit so nahe, als man will, wenn man die Fläche selbst so klein nimmt, als man will.*)

Aber als Grundsätze könnten auch diese zwey Sätze durchaus nicht gelten; indem sie offenbar aus zusammengesetzten Begriffen bestehen: Grundsätze aber nur unter der Classe derjenigen Sätze zu finden seyn können, deren Subject, Prädicat und Copula durchaus ganz ein-
XVI fache | Begriffe sind. Um aber einen von diesen, oder auch einen der obigen Sätze gehörig, d. h. aus seinem objectiven Grunde darthun zu können, muß man nothwendig die Art und Weise, wie Linien und Flächen überhaupt berechnet werden, schon als bekannt voraussetzen. Und daher ist es denn gerade umgekehrt: statt sich der archimedischen, oder sonst ähnlicher Sätze zur Herleitung der Formeln, welche die Rectification und Complanation betreffen, bedienen zu dürfen, muß man in einem echt wissenschaftlichen Vortrage vielmehr die Richtigkeit jener

*) Der Beysatz: „nach dem Gesetze der Stetigkeit" ist in diesen beyden Sätzen wesentlich. Denn wenn sich in einer Linie irgendwo eine Spitze befindet, so wird ein Bogen, in dem diese Spitze liegt, zu seiner Sehne ein Verhältniß haben, das dem Verhältnisse 1 : 1 niemahls so nahe kömmt, als man nur immer will, auch wenn man den Bogen selbst noch so klein annimmt. Ein Gleiches gilt von einer Fläche, die sich nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit krümmet, sondern an irgend einer Stelle in eine Spitze oder Schärfe ausgeht; wie Ersteres z. B. bey der krummen Oberfläche eines Kegels an seinem Scheitelpuncte, Letzteres aber dort, wo die krumme Fläche desselben mit seiner Grundfläche zusammenstößt, der Fall ist.

erst aus diesen ableiten; dergestalt, daß also der bis jetzo üblichen Darstellung dieser zwey Lehrstücke der Geometrie mit vollem Rechte der Vorwurf eines Zirkels gemacht werden kann.

Minder unglücklich war man bey der *Quadratur der ebenen Flächen* und bey der *Cubirung der Körper*. Denn die Beweise, die hier la *Grange* und Andere geliefert haben, drehen sich wenigstens nicht in einem Zirkel herum. Die Ursache aber, aus der man mit diesen zwey Problemen leichter zu Stande kam, liegt darin: weil sich zu einer jeden *ebenen Fläche*, auch wenn sie *krummlinig* begrenzt ist, sehr leicht zwey andere *geradlinig* begrenzte angeben lassen, deren die eine ein *Theil* der krummlinigen, und also kleiner ist als sie, während die andere ein *Ganzes* vorstellt, von dem die krummlinige nur einen Theil ausmacht, so daß nun jene größer ist als diese. Erfindet man also (was immer leicht zu bewerkstelligen ist) irgend ein Bildungsgesetz für diese zwey geradlinigen Flächen, bey welchem sie selbst einander am Inhalte so nahe gebracht werden können, als man nur will (nimmt man z. B. *ein- und umgeschriebene* | *Vielecke* an, deren Seitenlänge XVII
so klein werden kann, als man nur immer will); und berechnet man die Größe, der sich diese Inhalte stets nähern, so zwar, daß der Unterschied so klein, als man will, zu werden vermag: so hat man an dieser Größe zugleich den gesuchten Inhalt der krummlinig begrenzten Fläche. Ein Gleiches läßt sich auch bey den *Körpern* thun. Nicht so verhält es sich aber mit krummen *Linien* oder mit krummen *Flächen*, die weder selbst als Theile von geraden Linien oder von ebenen Flächen betrachtet, noch in dergleichen zerlegt werden können. Hier also ist *die Methode der Grenzen* nicht anwendbar, sondern man muß einen ganz andern Weg einschlagen, will man nichts desto weniger zwischen ihnen und geraden Linien oder ebenen Flächen in Rücksicht auf die Größe eine Vergleichung anstellen.

Doch wenn wir auch sagen, daß die *neueste* Methode der Quadratur und Cubirung *besser* als die der Rectification und Complanirung sey; so können wir selbe gleichwohl nicht für fehlerfrey, und nicht für *wissenschaftlich* erklären. Denn ein geringes Nachdenken zeigt, daß die zu beweisenden Wahrheiten nach der Methode der Grenzen keineswegs so, wie es bey einem echt wissenschaftlichen Beweise geschehen muß, aus den Begriffen der Thesis selbst, sondern nur aus gewissen *sehr zufällig herbey gezogenen Nebenbegriffen* (per aliena et remota) hergeleitet werden. Wer sollte z. B. nicht einsehen, daß jene *um den* Kreis beschriebenen, und in ihn *eingeschriebenen* regulären Vielecke von unendlicher Menge, ein ganz fremdartiger Gegenstand sind, wenn man nicht ihren, sondern den Inhalt des Kreises selbst finden will? — |

XVIII Und so ergibt sich am Ende, daß alle drey Aufgaben, welche die Ausmessung räumlicher Gegenstände betreffen, in wissenschaftlicher Hinsicht noch so gut als unaufgelöst sind.

Gegenwärtige Abhandlung liefert nun eine Methode, die, wie ich glaube, den Forderungen der Wissenschaft auf das Vollkommenste entspricht, und überdies noch durch Kürze und Leichtigkeit sich empfiehlt, auch um verstanden zu werden, nichts anders als die Kenntniß des Taylorschen Lehrsatzes voraussetzt.

Damit die Leser in Stand gesetzt werden, sich von der Beschaffenheit dieser Methode so schnell, als möglich, einen beyläufigen Begriff zu bilden; so wollen wir sie gleich hier in Anwendung auf einen einzigen Fall abgekürzt vortragen; während die nachstehende Abhandlung sie in ihrer größten Allgemeinheit, und in Verbindung mit mehreren andern neuen Begriffen darstellen wird.

Es sey also die Länge einer Linie zu berechnen, welche von einfacher Krümmung, um deren rechtwinkeliges Coordinatensystem in einerley Ebene mit ihr befindlich ist. Die gegebene Gleichung für diese krumme Linie sey $y = fx$, und die zufindende Länge des Stücks, das zur Abscisse x gehört, $= Fx$. Indem x um Δx wächst, nimmt diese Länge um eine Größe $F(x + \Delta x) - Fx$ zu, welche nach dem Taylorschen Satze $\Delta x \left[\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2Fx}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\right]$ ist. Offenbar hängt diese Größe

XIX nicht von der Beschaffenheit des Stücks, wel- | ches zu x, sondern bloß von demjenigen Bogenstücke ab, das über dem Abscissenstücke Δx stehet. Da nun dies Bogenstück lediglich durch Ordinaten bestimmt wird, die zu Abscissen gehören, welche nicht außerhalb der Grenzen x und $x + \Delta x$ liegen: so folgt, daß auch die Function $F(x + \Delta x) - Fx$ bloß von den Werthen abhange, welche die fx für alle Werthe ihrer Wurzel annimmt, welche nicht außerhalb x und $x + \Delta x$ liegen; oder, was eben so viel ist, daß $F(x + \Delta x) - Fx$ bloß durch die Werthe bestimmt sey, welche $f(x + m\Delta x)$ gibt, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, 0 und 1 mitgerechnet, setzet. Aber noch weiter, wenn man durch Annahme einer neuen Abscissenlinie, die mit der ersten parallel läuft, alle y um ein gleich großes Stück d verlängert oder verkürzet, während die x ungeändert bleiben: so darf sich abermahls in der Beschaffenheit der Function Fx, mithin auch der $F(x + \Delta x) - Fx$ nichts ändern; weil auch noch dann immer zu demselben x dasselbe Bogenstück gehört. Hieraus ergibt sich, daß zur Bestimmung der Function $F(x + \Delta x) - Fx$ nicht einmal die absolute Größe der Werthe nöthig sey, die $f(x + m\Delta x)$ annimmt, wenn man für m alle gedenkbaren echten Brüche, sammt 0 und 1, setzet; sondern daß hiezu die bloße Angabe

des Werthes der Differenzen $f(x + m\Delta x) - d$ hinreicht. Betrachten wir nun bey verschiedenen Werthen von Δx, die Größe x und mithin auch die Größe y als beständig: so ist uns erlaubt, die willkürliche Constante d auch $= y = fx$ anzunehmen; und so nach zu sagen, daß die Function $F(x + \Delta x) - Fx$ bloß durch die sämtlichen Werthe bestimmbar seyn müsse, welche $f(x + m\Delta x) - fx$ gibt, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet. Wenn | endlich in zwey oder XX
mehreren Curven der Zuwachs der Abscisse Δx zu jenem der Ordinate $= f(x + \Delta x) - fx$ in einem und eben demselben Verhältnisse steht, d. h. wenn der Quotient $\dfrac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$ für diese Linien gleich groß ist; wenn ferner eben so auch die Quotienten $\dfrac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$, m sey was immer für ein echter Bruch, von gleicher Größe sind: so müssen die zu Δx gehörigen Bogenstücke in diesen Linien einander ähnlich seyn; und aus der Lehre von der Ähnlichkeit ist erweislich, daß auch die Längen dieser Bogenstücke $= F(x + \Delta x) - Fx$ dann zu Δx überall ein gleiches Verhältniß haben, d. h. daß auch der Quotient $\dfrac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ für alle diese Linien gleich sey. Also erfahren wir endlich, daß die Function $\dfrac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ bloß durch die Werthe bestimmbar sey, welche die Function $\dfrac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ angibt, wenn man für m in ihr jeden gedenkbaren echten Bruch, sammt 0 und 1, setzet. Denn so lange nur die letzteren Größen alle unverändert bleiben, so bleibt (nach dem so eben Gezeigten) auch die Größe $\dfrac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ dieselbe, wie sich auch immer der absolute Werth von Δx, fx, Fx u. s. w. ändere. Da alle diese Behauptungen gelten, so klein man auch Δx annehmen mag; und da in diesem Falle der Werth von $\dfrac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ dem Werthe $\dfrac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x}$, und eben so die unter der Form $\dfrac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ enthaltenen Grö- | ßen dem XXI
Werthe $\dfrac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ so nahe kommen, als man nur immer will: so ist einleuchtend, daß auch die Größe, in welche $\dfrac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ übergehet, d. h. $\dfrac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x}$ bloß aus der Größe bestimmbar seyn müsse, in welche die Functionen $\dfrac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ übergehen, d. h. aus $\dfrac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$. Dieses vorausgesetzt, bedeute nun $x = \varphi x$ die Gleichung für

irgend eine andere Linie und Φx sey ihre Länge. So nach bezeichnen Fx und Φx Dinge von einerley Art, Längen von Linien nähmlich; und da bekanntlich die ganze Natur einer Linie, also auch die Länge derselben durch ihre Gleichung bestimmt wird: so gibt es auch ohne Zweifel irgend ein gleichlautendes Gesetz, nach dem für alle Linien die Functionen Fx und Φx aus den Functionen fx und φx abgeleitet werden können. Nach Bewiesenem aber werden die Functionen $\frac{dFx}{dx}$ und $\frac{d\Phi x}{dx}$ bloß durch die Werthe bestimmt, welche die Functionen $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d\varphi x}{dx}$ haben, so zwar, daß sie von deren innerer Beschaffenheit ganz und gar unabhängig sind. Da nun $\frac{dFx}{dx}$ und $\frac{d\Phi x}{dx}$ nach einerley Gesetz aus Fx und Φx; $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d\varphi x}{dx}$ aber nach einerley Gesetz aus fx und φx abgeleitet sind: so folgt, daß auch die Bestimmung der $\frac{dFx}{dx}$ aus dem Werthe von $\frac{dfx}{dx}$, und die Bestimmung der $\frac{d\Phi x}{dx}$
XXII aus dem Werthe von $\frac{d\varphi x}{dx}$ nach einerley Gesetz geschehe. | Wenn also für irgend einen bestimmten Werth von x der Größe nach $\frac{dfx}{dx} = \frac{d\varphi x}{dx}$ ist: so sind die bestimmenden Stücke der Functionen $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d\Phi x}{dx}$ einander völlig gleich, also gewiß auch sie selbst; d. h. $\frac{dFx}{dx}$ muß eben so aus $\frac{dfx}{dx}$ wie $\frac{d\Phi x}{dx}$ aus $\frac{d\varphi x}{dx}$ zusammengesetzt seyn. Lassen wir nun $y = \varphi x$ die Gleichung für eine gerade Linie bedeuten; so wissen wir Φx, und mithin auch $\frac{d\Phi x}{dx}$ zu finden, und erfahren hiedurch auch $\frac{dFx}{dx}$. Für eine gerade Linie ist nähmlich die Function φx von der Form $\alpha + \beta x$, und Φx dann $= x\sqrt{1+\beta^2}$; daher $\frac{d\Phi x}{dx} = \sqrt{1+\beta^2}$. Ist aber $\varphi x = \alpha + \beta x$, so ist $\frac{d\varphi x}{dx} = \beta$; also $\frac{d\Phi x}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2}$; mithin auch $\frac{dFx}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, die bekannte Formel für die Länge einer Linie von einfacher Krümmung.

Bey dieser Herleitung haben wir uns offenbar keines Begriffes vom unendlich Kleinen, keiner Rechnung mit Nullen, keiner den Grundsätzen des Archimedes ähnlichen, und überhaupt keiner Voraussetzung von solcher Art bedient, daß sie nicht gewiß früher erweislich wäre, als

der Lehrsatz selbst, der bewiesen werden sollte. Nur bey der einzigen Voraussetzung: daß sich die Längen ähnlicher Linien, wie die Längen anderer aus ihnen auf ähnliche Art bestimmter Linien verhal- | ten, könnte Jemand einen Anstoß nehmen, wenn er ver- XXIII
meinte, daß dieses sich erst dann strenge darthun lasse, wenn man die Länge der Linien bereits berechnen kann, oder daß es nur durch Zerlegung einer Linie in unendlich kleine Theile, die man als gerade ansieht, erwiesen werden könne. Aber so ist es nicht; sondern dieser Satz ist eine leichte Folgerung aus dem Begriffe der Ähnlichkeit, wie dies mit Mehreren in der Abhandlung selbst § 30 gezeigt wird.[54])

So hätte also der Leser jetzt einen beyläufigen Begriff von der Methode erhalten, die hier zum ersten Mahle ans Licht tritt, und die sich nicht allein auf die drey geometrischen Gegenstände, die auf dem Titel dieser Abhandlung genannt sind, sondern auch sonst noch anwenden läßt; wie dann selbst § 10 ein Beispiel ihrer Anwendung auf die Mechanik vorkömmt, und zwey wichtige Lehrsätze derselben, welche bisher noch nie gehörig dargethan werden konnten, vermittelst ihrer erwiesen werden.

Es möge nun Niemand die kleine Mühe scheuen, die er anwenden muß, um sich mit dieser Methode, und mit den übrigen neuen Begriffen, die wir in dieser Abhandlung gelegenheitlich vortragen, genauer bekannt zu machen, und so im Stande zu seyn, über den Werth oder Unwerth derselben ein gründliches Urtheil zu fällen! Möge auch Jeder, den ein gehöriges Nachdenken von der Richtigkeit unserer Ansichten überzeugt, nach seinen Kräften beytragen, um sie zu einer allgemeinen Anerkennung zu bringen! Wenn das Verdienst einer Entdeckung durch den gedoppel- |
ten Verdacht verliert, daß vielleicht nur die Suche, etwas Neues zu XXIV
sagen, vielleicht der bloße Zufall an ihr den größten Antheil haben: so hat dagegen die Theilnahme an der Verbreitung und Vertheidigung einer von einem Andern gemachten Entdeckung ein um so unzweydeutigeres Verdienst, je sicherer es ist, daß man sich von der Richtigkeit derselben nur durch ein unpartheyliches Nachdenken überzeugt, und nur aus Liebe zur Wahrheit ihre Ausbreitung übernommen hat.

§ 1.[55]) I

Vorerinnerung. In der Geometrie und Mechanik ereignet sich öfters der Fall, daß man von einer an sich noch unbekannten Function $F(x, y, \ldots)$ doch das weiß, daß ihre jedesmahlige Größe und Beschaffenheit für alle auch noch so kleine Werthe ihrer Wurzeln $x, y, \ldots$, bloß von den Werthen abhange, die eine oder etliche andere Functionen $f(mx, ny, \ldots)$; $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$; ... annehmen, wenn man für $m, n, \ldots$

in ihnen alle nicht außerhalb 0 und 1 liegende Werthe (d. h. jeden gedenkbaren echten Bruch sammt 0 und 1) setzet. Es sey, um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, Ft die uns noch unbekannte Function, welche den Raum ausdrückt, den ein geradlinig bewegter Atom in der Zeit t zurücklegt; ft sey eine andere Function, welche die am Ende jeder Zeit t Statt findende Geschwindigkeit des Atoms ausdrückt. Wenn t um Δt wächst; so begreift man leicht, daß der in Δt beschriebene Raum bloß von dem Inbegriffe aller derjenigen Geschwindigkeiten abhange, welche innerhalb der Zeit Δt Statt finden. Diese Geschwindigkeiten gibt nun die Function $f(t + m\Delta t)$ an, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, 0 und 1 mitgerechnet, setzet. Den beschriebenen Raum dagegen drückt $F(t + \Delta t) - Ft$ aus. Es läßt sich also behaupten, daß $F(t + \Delta t) - Ft$, oder wenn man will, auch $\frac{F(t + \Delta t) - Ft}{\Delta t}$ eine Function sey, die bloß von den Werthen abhängt, welche die Function
2 $f(t + m\Delta t)$ | annimmt, wenn man für m in ihr alle nicht außerhalb 0 und 1 liegende Werthe setzet. Diese Behauptung gilt, so klein auch Δt werde; und also kann man, indem man sich vorstellt, daß sich bey einerley t nur Δt ändre, $\frac{F(t + \Delta t) - Ft}{\Delta t}$ als eine Function von $\Delta t = x$, und eben so $f(t + m\Delta t)$ als eine bloße Function von $m\Delta t = mx$ ansehen; woraus einleuchtet, daß das so eben erwähnte Verhältniß dieser zwey Functionen zu einander ein Beyspiel sey, das die Richtigkeit unserer oben gemachten Behauptung in dem einfachsten Falle bestätigt, wo der veränderlichen Größen x, y, ... nur eine einzige ist. Andere Beyspiele werden in der Folge vorkommen. Wollte man aber, um das vorhin erwähnte Beyspiel noch ferner zu betrachten, den Zuwachs $\Delta t = 0$ setzen; so behielte zwar die Function $\frac{F(t + \Delta t) - Ft}{\Delta t}$, wenn man sie nach dem Taylorschen Lehrsatze zuvor in folgende verwandelt hätte: $\frac{\mathrm{d}Ft}{\mathrm{d}t} + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2Ft}{\mathrm{d}t^2} + \ldots$, noch immer einen reelen Werth, nämlich sie würde $\frac{\mathrm{d}Ft}{\mathrm{d}t}$, und $f(t + m\Delta t)$ ginge in ft über: ob aber das zuvor bestandene Verhältniß auch jetzt noch fortdaure, d. h. ob $\frac{\mathrm{d}Ft}{\mathrm{d}t}$ bloß von dem Werthe der ft abhange: könnte wenigstens aus mechanischen Gründen nicht unmittelbar gefolgert werden. Denn jetzo wären die Gründe, aus denen man dieß vorhin geschlossen hatte, nicht mehr anwendbar; indem, wenn $\Delta t = 0$ gesetzt wird, keine Bewegung mehr innerhalb dieses Δt vorgehet, folglich auch kein Raum beschrieben wird, keine Geschwindigkeit vorhanden ist,

daher sich die obigen Schlüsse jetzt durchaus nicht mehr anstellen lassen. Gleichwohl ist es aus einem andern Grunde gewiß, daß sich die Sache auch noch in diesem Falle so verhalte; ja es gilt allgemein, „daß eine jede (stetige) Function $F(x, y, \ldots)$, welche für alle | auch 3
noch so kleine Werthe ihrer Wurzeln $x, y, \ldots$ bloß durch die Werthe bestimmt wird, welche gewisse andere Functionen $f(mx, ny, \ldots)$; $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$; ... annehmen, wenn man für $m, n, \ldots$ jeden gedenkbaren echten Bruch sammt 0 und 1 setzt, auch noch in dem Falle aus diesen Functionen allein bestimmbar sey, wenn die $x, y, \ldots$ alle $= 0$ geworden sind". Diese Wahrheit, deren entscheidende Wichtigkeit für die Bestimmung der Natur von $F(x, y, \ldots)$ wir bald näher kennen lernen werden, ist eine leichte Folgerung aus rein analytischen Gründen; wie die gleich folgenden §§ zeigen.

§ 2.

Lehrsatz. Wenn sich die Function fx, entweder für alle, oder doch wenigstens für alle diejenigen Werthe von x, die sich dem a so sehr, als man nur immer will, nähern, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert; wenn man ferner von der Größe X so viel weiß , daß sie für die eben genannten Werthe von x aus den Werthen der fx dergestalt herleitbar sey, daß sich zwar vielleicht die Regel dieser Herleitung (d. h. die innere Beschaffenheit derjenigen Function von fx, welche $= X$ ist) für jeden veränderten Werth der fx gleichfalls ändert, aber doch immer nur nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit von solcher Art, daß die Änderung von X kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man die Änderung von fx klein genug macht; so behaupte ich, jenes Verhältniß der Bestimmbarkeit der X und fx müsse auch selbst für $x = a$ bestehen, d. h. der Werth, den X für $x = a$ annimmt, sey gleichfalls unabhängig von der Beschaffenheit der Function fx, und bloß aus dem Werthe bestimmbar, den sie für $x = a$ annimmt.

Beweis. Es wird erwiesen seyn, daß der zu $x = a$ gehörige Werth der Größe X nicht von der innern Beschaffenheit der Function fx, sondern bloß von ihrem zu | $x = a$ gehörigen Werthe abhange; wenn wir beweisen, 4
daß er unverändert bleibt, wie immer die Beschaffenheit der Function fx sich ändere, wenn nur ihr Werth für $x = a$, d. h. fa derselbe bleibt. Zu diesem Ende sey $f'x$ was immer für eine andere Form der Function fx, doch von der Art, daß $f'a = fa$. Der zu $f'x$ gehörige Werth von X sey X', und die Werthe, die X und X' für $x = a$ annehmen, seyen A und A'. Durch die erwähnte Stetigkeit der Functionen fx und $f'x$ für

alle x, die sich dem a so sehr, als man nur immer will, nähern, behauptet man, daß die Werthe fx, $f'x$ den Werthen fa, $f'a$ so nahe kommen, als man nur immer will, wenn auch x dem a so nahe kommt, als man nur will. Vermöge derjenigen Art von Stetigkeit aber, die sich auch bey den Änderungen der Größe X vorfinden soll, müssen unter derselben Bedingung auch die zu fx und $f'x$ gehörigen Werthe, nähmlich X und X', den Werthen A und A' so nahe treten, als man nur immer will. Man hat daher, wenn man Größen, die kleiner als jede gegebene werden können, durch Ω, Ω', ... anzeigt, $X = A + \Omega$ und $X' = A' + \Omega'$. Da aber $fa = f'a$ so kommen die Werthe von fx und $f'x$ einander auch selbst so nahe, als man will; und da, so lange auch nicht $x = a$ geworden ist, die Größe X bloß von den Werthen der Functionen fx oder $f'x$, ohne Rücksicht auf ihre innere Beschaffenheit abhangen soll: so müssen auch X und X' einander so nahe kommen, als man nur immer will, oder es ist $X = X' + {} + \Omega''$ ... Also auch $A + \Omega = A' + \Omega' + \Omega''$; woraus sich, da A und A' beständig seyn können, während Ω, Ω', Ω'' so klein werden, als man nur immer will, (nach § 27 des binomischen Lehrsatzes) ergibt, daß $A = A'$ seyn müsse.

§ 3.

Lehrsatz. Wenn sich die Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$, deren Menge endlich oder unendlich seyn mag, entweder für alle, oder doch für diejenigen Werthe von x, die sich dem a so sehr, als man nur immer will, nähern, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern; wenn man ferner von der Größe X | so viel weiß, daß selbe für die so eben erwähnten Werthe von x aus den Werthen der Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ dergestalt herleitbar ist, daß sich zwar allenfalls die Regel dieser Herleitung für jeden andern Werth der $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ ändert, aber doch immer nach einem Gesetze der Stetigkeit von solcher Art, daß die Veränderung von X kleiner als jede gegebene Größe werden könne, wenn man die Änderungen der $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ klein genug macht: so behaupte ich, jenes Verhältniß der Bestimmbarkeit der X aus den Werthen der $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ müsse auch für $x = a$ bestehen, d. h. auch da sey der Werth von X nicht von der inneren Beschaffenheit der Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$, sondern bloß von den Werthen abhängig, die sie für $x = a$ annehmen.

Beweis. Stellt man sich erstlich vor, die Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ wären ganz unabhängig von einander, und läßt man nun eine derselben z. B. fx sich ändern, während die übrigen ganz unverändert bleiben: so begreift man aus § 2, dessen Fall hier jetzo eintritt, daß die Größe X nicht nur für alle x, die sich dem a so sehr, als man nur immer will, nähern, sondern auch für den Werth $x = a$ selbst unabhängig von der Beschaffenheit der Function fx, bloß aus dem Werthe, den sie in jedem Falle hat, bestimmbar sey. Also gilt eben dieß auch von den Functionen $\overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$; ihre Menge mag endlich oder unendlich seyn; das heißt, die Größe X hängt auch für $x = a$ nicht von der innern Beschaffenheit nur einer einzigen aus diesen Functionen, sondern bloß von den Werthen ab, die sie für $x = a$ annehmen. Dasselbe muß aber auch in dem Falle gelten, wenn diese Functionen etwa selbst von einander abhängig seyn sollten. Denn eine Größe, welche sich aus gewissen andern bestimmen läßt, wenn diese unabhängig von einander sind, muß sich auch dann aus ihnen (ja dann vielleicht aus noch wenigeren) bestimmen lassen, wenn einige aus ihnen selbst schon durch die übrigen bestimmt sind. |

§ 4. 6

Anmerkung. Vielleicht stößt Manchem der Zweifel auf, ob es nicht widersprechend sey, eine Größe (wie hier die X) durch gewisse andere (nähmlich die Werthe von $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$) bestimmen zu lassen, wenn dabey zugegeben wird, daß dieser letzteren Menge allenfalls selbst unendlich, und folglich unbestimmbar werde. Doch einiges Nachdenken wird diesen Zweifel zerstreuen. Eine Größe nähmlich, oder auch überhaupt irgend ein Ding hört darum noch nicht auf, bestimmt oder bestimmbar zu seyn, weil der Größen, oder der Dinge überhaupt, die es bestimmen sollen, unendlich viele erforderlich sind, wenn nur irgend in Gesetz, oder auch eine endliche Menge von Gesetzen angeblich ist, vermittelst deren sie sämtlich bestimmt werden können. Daß aber ein Gesetz unendlich viele Dinge bestimme, enthält nichts Unmögliches. Jede Linie und Fläche und jeder Körper gibt uns ein Beyspiel hievon. Denn bekanntlich enthält ein jedes dieser Raumdinge unendlich viele Puncte, und diese alle müssen bestimmt seyn, wenn das Ding selbst bestimmt heißen soll. Gleichwohl bezweifelt Niemand die Bestimmbarkeit solcher Raumdinge, und öfters ist die Angabe nur einiger wenigen Puncte, und eines oder etlicher Gesetze, wornach die übrigen gefunden werden sollen, zu ihrer gänzlichen Bestimmung hinreichend. So wird z. B. eine gerade Linie durch die bloße Angabe ihrer zwey Endpunkte und durch ein einziges Gesetz — (man sehe unten § 15) — bestimmt. — Freylich verlangt man mit Recht zur Bestimmtheit einer Sache die völlige Bestimmtheit ihres Grundes. Bestehet nun dieser in einer unendlichen Menge von Dingen, so hat es den Anschein, als ob er unbestimmbar wäre. In der That aber ist nur die Menge seiner Theile unbestimmbar, nicht aber er selbst, wenn anders irgend ein Gesetz vorhanden ist, das jeden einzelnen aus diesen Theilen bestimmt.

§ 5.

7 Lehrsatz. Wenn sich die Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots,$ | deren Menge abermahls endlich oder unendlich seyn mag, entweder für alle, oder doch für diejenigen Werthe von x, die sich der Null so sehr, als man will, nähern, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern; wenn man ferner von der Größe X so viel weiß, daß sie für alle eben erwähnte Werthe von x aus allen denjenigen Werthen bestimmbar sey, welche die Functionen $f(mx), \overline{f}(mx), f(mx), \ldots$ annehmen, wenn man für m in ihnen jeden gedenkbaren echten Bruch, 0 und 1 mitgerechnet, setzet; wobey überdies das schon § 3 beschriebene Gesetz der Stetigkeit befolgt wird: so behaupte ich, auch der zu $x = 0$ gehörige Werth von X sey bloß durch diejenigen Werthe, welche die Functionen $f(mx), \overline{f}(mx), \overline{f}(mx), \ldots$ für $x = 0$ annehmen, d. h. durch $f(0), \overline{f}(0), \overline{\overline{f}}(0), \ldots$ bestimmbar.

Beweis. Jede der Functionen $f(mx), \overline{f}(mx), \overline{\overline{f}}(mx), \ldots$ gibt, wenn man in ihr für m jeden gedenkbaren echten Bruch annimmt, eine unendliche Menge von Functionen der x, die sich bey Änderung von x nur in ihren beständigen Größen unterscheiden. Und wenn sich die Functionen $fx, \overline{f}x, \overline{\overline{f}}x, \ldots$ für alle Werthe von x, welche der Null so nahe, als man nur immer will, kommen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern: so sind auch die durch $f(mx), \overline{f}(mx), \overline{\overline{f}}(mx), \ldots$ vorgestellten Functionen, in welchen m irgend einen echten Bruch, 0 oder 1 bezeichnet, für eben dieselben Werthe von x stetig veränderlich. Also ist hier der Fall der vorhergehenden § vorhanden, und X ist eine Größe, welche für jedes auch noch so kleine x, das nur nicht Null ist, bloß durch die Werthe bestimmt wird, welche gewisse (an Menge wirklich unendlich viele) Functionen für eben diesen Werth von x annehmen. Also u. s. w.

§ 6.

Lehrsatz. Wenn sich die Functionen $f(x, y, \ldots), \overline{f}(x, y, \ldots), \ldots$ nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, so klein man auch die Wurzeln x,
8 $y, \ldots$ annehmen mag; | wenn man ferner von der Function $F(x, y, \ldots)$ so viel weiß, daß sich auch diese für die genannten Werthe von $x, y, \ldots$ stetig ändere, jedesmahl aber bloß von den Werthen abhange, welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots), \overline{f}(mx, ny, \ldots), \ldots$ geben, wenn man $m, n, \ldots$ in ihnen alle gedenkbaren echten Brüche, sammt 0 und 1, bedeuten läßt: so behaupte ich, daß auch diejenige Größe, in welche die Function $F(x, y, \ldots)$ für $x = 0, y = 0, \ldots$ übergeht, d. h. $F(0, 0, \ldots)$ bloß von den Werthen abhange, welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots), \overline{f}(mx, ny, \ldots), \ldots$ für $x = 0, y = 0, \ldots$ annehmen; d. h. von $f(0, 0, \ldots), \overline{f}(0, 0, \ldots), \ldots$

Beweis. Wenn wir nur eine der Größen $x, y, \ldots$ z. B. x als veränderlich ansehen, so stellen $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... bloße Functionen der x allein vor, und $F(x, y, \ldots)$, die dann ebenfalls nur eine Function von x allein wird, ist nunmehr eine Größe, wie die § 5 beschriebene X: also hängt der Werth, den sie für $x = 0$ erhält, bloß von den Werthen ab, welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... für $x = 0$ annehmen. Da nun ein Gleiches auch von $y, \ldots$ gilt: so ist einleuchtend, daß, wenn man die $x, y, \ldots$ alle zugleich als veränderlich ansieht, der Werth der Function $F(x, y, \ldots)$ für $x = 0$, $y = 0, \ldots$, d. h. $F(0, 0, \ldots)$ von nichts Anderm, als von den Werthen abhangen könne, welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... für $x = 0$, $y = 0, \ldots$ annehmen, d. h. von $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots)$, ...

§ 7.

Zusatz. Hat man nunmehr zwey Functionen $F(x, y, \ldots)$ und $\Phi(x, y, \ldots)$, von denen man weiß: erstlich, daß beyde nach einem und eben demselben (obgleich uns unbekannten) Gesetze bloß aus den Werthen herleitbar sind, welche gewisse andere Functionen von der Form $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... und $\varphi(mx, ny, \ldots)$, $\bar{\varphi}(mx, ny, \ldots)$, ... annehmen, wenn man $m, n, \ldots$ in ihnen alle gedenkbaren echten Brüche, sammt 0 und 1, bedeuten läßt; zweytens | daß jene sowohl als diese, 9
für alle auch noch so kleine $x, y, \ldots$ nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändern; wenn endlich drittens die Werthe, in welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots)$ und $\varphi(mx, ny, \ldots)$; $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$ und $\bar{\varphi}(mx, ny, \ldots)$, ... für $x = 0$, $y = 0, \ldots$ übergehen, einander paarweise gleichen, nähmlich $f(0, 0, \ldots) = \varphi(0, 0, \ldots)$; $\bar{f}(0, 0, \ldots) = \bar{\varphi}(0, 0, \ldots)$; ...; so behaupte ich, die Größen $F(0, 0, \ldots)$ und $\Phi(0, 0, \ldots)$ sind nicht nur gleich, sondern auch beide auf einerley Art aus ihren zugehörigen, jene aus $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots)$, ..., diese aus $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\bar{\varphi}(0, 0, \ldots)$, ..., zusammen gesetzt. Denn in § 6 ist erwiesen, daß $F(0, 0, \ldots)$ aus den Werthen $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots)$, ...; und $\Phi(0, 0, \ldots)$ aus den Werthen $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\bar{\varphi}(0, 0, \ldots)$, ... herleitbar sey. Da aber der Voraussetzung zu Folge irgend ein gleichlautendes Gesetz vorhanden ist, nach welchem sich $F(x, y, \ldots)$ aus den durch $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... und $\Phi(x, y, \ldots)$ aus den durch $\varphi(mx, ny, \ldots)$, $\bar{\varphi}(mx, ny, \ldots)$, ... darstellbaren Werthen herleiten läßt: so muß sich auch das Gesetz, nach welchem $F(0, 0, \ldots)$ aus den Werthen $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots)$, ... und das Gesetz, nach welchem $\Phi(0, 0, \ldots)$ aus den Werthen $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\bar{\varphi}(0, 0, \ldots)$, ... herleitbar ist, auf eine für beyde gleichlautende Art aussprechen lassen. Denn diese letztern Functionen

sind aus den ersteren selbst auf eine gleichlautende Weise abgeleitet; nähmlich bloß dadurch, daß man beyderseits $x = 0$, $y = 0, \ldots$ annahm. Da nun überdieß die Größen $f(0, 0, \ldots)$ und $\varphi(0, 0, \ldots)$; $\overline{f}(0, 0, \ldots)$ und $\overline{\varphi}(0, 0, \ldots)$ u. s. w. einander auch dem Werthe nach gleichen sollen: so sieht man ein, daß die Größen $F(0, 0, \ldots)$ und $\Phi(0, 0, \ldots)$ durchgängig einerley bestimmende Stücke haben; also muß nicht nur dem Werthe nach $F(0, 0, \ldots) = \Phi(0, 0, \ldots)$ seyn, sondern $F(0, 0, \ldots)$ muß auch ganz auf dieselbe Art aus den Werthen $f(0, 0, \ldots)$, $\overline{f}(0, 0, \ldots), \ldots$, wie $\Phi(0, 0, \ldots)$ aus den Werthen $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\overline{\varphi}(0, 0, \ldots), \ldots$ zusammen gesetzt seyn. |

10 § 8.

Zusatz. Gesetzt also, von den Functionen $F(x, y, \ldots)$ und $\Phi(x, y, \ldots)$ wäre uns die eine z. B. $\Phi(x, y, \ldots)$ bekannt, so würden wir eben darum auch $F(0, 0, \ldots)$ wissen. Wären nun auch $\varphi(mx, ny, \ldots)$, $\overline{\varphi}(mx, ny, \ldots), \ldots$, und $f(mx, ny, \ldots)$, $\overline{f}(mx, ny, \ldots), \ldots$ gegeben: so könnten wir aus der Vergleichung der $\Phi(0, 0, \ldots)$ mit $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\overline{\varphi}(0, 0, \ldots), \ldots$ die Art und Weise entnehmen, wie $\Phi(0, 0, \ldots)$ aus $\varphi(0,0,\ldots)$, $\overline{\varphi}(0, 0, \ldots), \ldots$ zusammengesetzt sey; und da eben so $F(0, 0, \ldots)$ aus $f(0, 0, \ldots)$, $\overline{f}(0, 0, \ldots), \ldots$ zusammengesetzt seyn soll; so ließe sich hiernächst auch $F(0, 0, \ldots)$ bilden.

§ 9.

Aufgabe. Zu zeigen, wie die bisherigen Sätze öfters zur Bestimmung einer noch unbekannten Function benützet werden können.

Auflösung. 1. Wenn man in einer Function $F(x, y, \ldots)$ von einer oder mehreren veränderlichen Größen $x, y, \ldots$ nicht diese selbst so klein, als man nur will, annehmen darf; so wird es wenigstens Zuwächse der $x, y, \ldots$, d. i. $\Delta x, \Delta y, \ldots$ geben, die man so klein nehmen darf, als man nur immer will. Bringt man nun diese in Rechnung; so wird, indem man sich vorstellt, daß bey einerley $x, y, \ldots$ nur die $\Delta x, \Delta y, \ldots$ sich nach Belieben ändern, die Function in eine der $\Delta x, \Delta y, \ldots$ verwandelt, die also in so fern mit der $F(x, y, \ldots)$ des § 6 zu vergleichen seyn wird, als Δx, $\Delta y, \ldots$ hier, wie dort $x, y, \ldots$ Größen bezeichnen, die so klein werden können als man nur immer will.

2. Soll es nun möglich seyn, die unbekannte Beschaffenheit der Function $F(x, y, \ldots)$ zu bestimmen; so müssen uns wenigstens irgend eine, oder einige Functionen von $x, y, \ldots$ gegeben seyn, durch die sie auf irgend eine Art bestimmt wird. Hängt sie bloß von dem Werthe ab, den diese Functionen etwa für gleich große, oder in sonst einem

andern Verhältnisse stehende Werthe der | $x, y, \ldots$ annehmen: so ist 11
$F(x, y, \ldots)$ eigentlich als eine Function von diesen Werthen selbst zu betrachten; und die Bestimmung ihrer Beschaffenheit geschieht auf den gewöhnlichen Wegen. Der zweyte Fall, der allein hieher gehöret, ist, wenn $F(x, y, \ldots)$ durch keinen der einzelnen Werthe, den jene gegebenen Functionen haben, wohl aber durch die sämmtlichen Werthe bestimmt wird, die diese annehmen, wenn man in ihnen für $x, y, \ldots$ alle zwischen 0 und $x, y, \ldots$ liegende Werthe setzet.

3. In diesem Falle ist nach Taylors bekanntem Lehrsatze*):

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots) = F(x, y, \ldots) + \Delta x\,\frac{\mathrm{d}^x F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x} + \Delta y\,\frac{\mathrm{d}^y F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}y} +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta x^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}^{xx} F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x^2} + \Delta x \Delta y\,\frac{\mathrm{d}^{xy} F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} + \frac{\Delta y^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}^{yy} F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}y^2} + \ldots + \ldots$$

Also ist derjenige Theil des Zuwachses von $F(x, y, \ldots)$, der | die sämmtli- 12
chen $\Delta x, \Delta y, \ldots$ als Factoren enthält, von folgender Form: $\Delta x \Delta y \ldots$
$\ldots \left[\frac{\mathrm{d}^{xy} F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} + \ldots\right] = P$, wo die bloß angedeuteten Glieder hinter dem $+$ durchgängig eine oder mehrere der Größen $\Delta x, \Delta y, \ldots$ als Factoren enthalten.

4. Wenn nun $F(x, y, \ldots)$ bloß von den Werthen abhängt, welche gewisse Functionen von $x, y, \ldots$ für alle innerhalb 0 und $x, y, \ldots$ liegende Werthe ihrer Wurzeln annehmen: so läßt sich jedesmal zeigen, daß die Größe P bloß von den Werthen abhange, welche dieselben Functionen, ja nach Umständen wohl auch noch einfachere annehmen, wenn man für $\Delta x, \Delta y, \ldots$ in ihnen alle zwischen 0 und $\Delta x, \Delta y, \ldots$ liegende Werthe setzet.

---

*) Ich bezeichne hier nach Herrn du Bourguet durch $\frac{\mathrm{d}^x F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^y F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}^{xy} F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ die nach den bekannten Regeln des Differenzirens aus $F(x, y, \ldots)$ abgeleiteten Functionen, je nachdem man entweder nur in Rücksicht auf x, oder $y, \ldots$ allein, oder in Rücksicht auf x und $y \ldots$ zugleich, entweder nur einmahl oder mehrere Mahle differenzirt, und eben so oft immer mit $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \ldots$ dividirt hat. Es bedarf keiner Erwähnung, daß die Herleitungsart dieser Functionen aus $F(x, y, \ldots)$ eine rein algebraische Verrichtung ist, die ohne alle Betrachtungen des unendlich Kleinen u. dgl. vollzogen werden kann. — Was aber den hier erwähnten Taylorschen Lehrsatz betrifft; so will ich nicht bergen, daß ich ihn nicht ganz in dem Sinne und in der Allgemeinheit zugebe, wie man ihn gewöhnlich darstellt. Da ich aber meine Gedanken hierüber an diesem Orte nicht näher entwickeln kann; so habe ich es mir bloß zum Gesetze gemacht, den Satz nur unter solchen Einschränkungen, und auf eine solche Art zu gebrauchen, wie ich es nach meinen eigenen Begriffen glaube rechtfertigen zu können, und zu seiner Zeit auch thun will.

5. Stellt man sich abermals, wie in N. 1 vor, daß sich bey einerley $x, y, \ldots$ bloß $\Delta x, \Delta y, \ldots$ ändert: so werden diese Functionen eigentlich nur Functionen von $\Delta x, \Delta y, \ldots$ seyn. Wir wollen sie durch $f(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(\Delta x, \Delta y, \ldots)$ bezeichnen.

6. Diese Functionen stehen in eben derselben Beziehung zur Größe P, in welcher die $f(x, y, \ldots)$, $\bar{f}(x, y, \ldots)$, ... des § 6 zu der dortigen $F(x, y, \ldots)$ standen. Wie nämlich dort $F(x, y, \ldots)$ bloß von den Werthen abhing, welche die Functionen $f(mx, ny, \ldots)$, $\bar{f}(mx, ny, \ldots)$, ... annehmen, wenn man für $m, n, \ldots$ jeden gedenkbaren echten Bruch setzt: so hängt auch P bloß von den Werthen ab, welche die Functionen $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... annehmen, wenn man $m, n, \ldots$ jeden gedenkbaren echten Bruch bedeuten läßt.

7. Dasselbe gilt also auch von der Größe $\dfrac{P}{\Delta x \,.\, \Delta y} = \dfrac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}y} + \ldots$, und sonach muß derjenige Werth derselben, den sie für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0, \ldots$ annimmt, d. h. die Function $\dfrac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$ bloß von den Werthen abhän-
13 gen, in welche die $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, | $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0, \ldots$ übergehen, d. h. von $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots)$, ...

8. Die Function $F(x, y, \ldots)$ hat eine gewisse Bedeutung; sie soll die Größe eines gewissen Gegenstandes (der von den Größen $x, y, \ldots$ abhängt) bestimmen. Betrachten wir nun die ganze Gattung jener Gegenstände, deren Größen $F(x, y, \ldots)$ auf eben dieselbe Weise, d. h. nach irgend einem gemeinschaftlichen Gesetze aus gewissen ihnen zugehörigen Functionen $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y)$, ... bestimmt werden können: so wird sich vielleicht einer aus ihnen, etwa der einfachste, ausfindig machen lassen, dessen Größe $\Phi(x, y, \ldots)$ eine bekannte Function von $x, y, \ldots$ ist; bey dem man auch die Functionen $\varphi(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{\varphi}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... kennt, aus welchen die zu $\Phi(x, y, \ldots)$ gehörige Größe $\dfrac{\Pi}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y, \ldots)}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} + \ldots$ auf eben die Art herleitbar ist, auf welche $\dfrac{P}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$ aus $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... hergeleitet werden kann.

9. Wenn dieses gefunden ist, so braucht man nichts anders, als durch willkürliche Bestimmung der beständigen Größen in $\varphi(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, $\bar{\varphi}(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, ... zu bewirken, daß $\varphi(0, 0, \ldots) = f(0, 0, \ldots)$; $\bar{\varphi}(0, 0, \ldots) = \bar{f}(0, 0, \ldots)$; u. s. w. werde: so wird auch § 7 nicht nur dem Werthe

nach $\frac{d^{xy}\Phi(x, y, ...)}{dx\, dy} = \frac{d^{xy}F(x, y, ...)}{dx\, dy}$ seyn, sondern die letzte Function wird auch auf eben die Art aus den Größen $f(0, 0, \ldots), \bar{f}(0, 0, \ldots), \ldots$ zusammengesetzt seyn, auf welche $\frac{d^{xy}\Phi(x, y, ...)}{dx\, dy}$ aus den Größen $\varphi(0, 0, \ldots), \bar{\varphi}(0, 0, \ldots), \ldots$ gebildet wird. Da man nun $\Phi(x, y, \ldots)$ und $\varphi(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, $\bar{\varphi}(\Delta x, \Delta y, \ldots), \ldots$ mithin auch $\frac{d^{xy}\Phi(x, y, ...)}{dx\, dy}$ und $\varphi(0, 0, \ldots), \bar{\varphi}(0, 0, \ldots), \ldots$ | kennt: so wird man $\frac{d^{xy}F(x, y, ...)}{dx\, dy}$ erfahren, und hieraus vermit- 14
telst bekannter Regeln der Integration $F(x, y, \ldots)$ selbst herleiten können.[56])

§ 10.

Anmerkung. Ich bitte die Leser den wenigen Sätzen, die ich eben vorgetragen habe, eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken; indem sie nicht nur die Grundlage der ganzen Theorie, die in dieser Schrift vorkömmt, ausmachen, sondern auch noch anderwärts von großem Gebrauche sind. In ihnen glaube ich den rechten Pfad zu erblicken, der von den Wahrheiten der Elementarmathematik zu den erhabenen Resultaten des Differential- und Integralcalculs, die man von jenen bisher durch unübersteigliche Klüfte getrennt fand, glücklich hinüberführt. Eben deshalb aber wird es nicht überflüssig seyn, einige Bemerkungen, welche das richtige Auffassen sowohl, als auch die Beurtheilung dieser Methode erleichtern können, sammt einem Beyspiele ihrer Anwendung beyzufügen. Wenn wir § 7, 8, 9 als eine Bedingung fordern, daß die Functionen $F(x, y, \ldots)$ und $\Phi(x, y, ...)$ oder vielmehr nur P und Π nach einem und eben demselben Gesetze, jene aus den Werthen der $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \ldots$, diese aus den Werthen der $\varphi(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \bar{\varphi}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \ldots$ herleitbar seyen: so unterscheide man dieß wohl von der Forderung, daß eine jede Regel, nach der P aus $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \ldots$ herleitbar ist, auch für die Herleitung der Π aus $\varphi(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \bar{\varphi}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots), \ldots$ gelten müsse. Nein, wenn anders die Functionen $f(\Delta x, \Delta y, \ldots)$ und $\varphi(\Delta x, \Delta y, \ldots$; $\bar{f}(\Delta x, \Delta y, \ldots)$ und $\bar{\varphi}(\Delta x, \Delta y, \ldots)$; ... u. s. w. paarweise nicht identisch sind: so wird sich immer eine für die $(Fx, y, \ldots)$ so eigends modificirte Regel der Herleitung aus $f(\Delta x, \Delta y, \ldots), \bar{f}(\Delta x, \Delta y, \ldots), \ldots$ ausdenken lassen, daß diese nicht auch zugleich auf $\Phi(x, y, \ldots)$ anwendbar ist.. Unserer Forderung aber geschieht schon ein | Genüge, wenn es nur 15
irgend eine so allgemein lautende Regel gibt, daß sie zur Herleitung sowohl der P aus $f(\Delta x, \Delta y, \ldots), \bar{f}(\Delta x, \Delta y, ..), \ldots$ als auch der Π aus

$\varphi(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, $\bar{\varphi}(\Delta x, \Delta y, \ldots)$, ... hinreicht. So gibt es z. B. eine gemeinschaftliche Regel, nach der die zwey Functionen $\sqrt{1+4x^2}$ und $\sqrt{1+49x^{12}}$ aus den zwey Functionen x^2 und x^7 herleitbar sind. Sie lautet nähmlich, „daß man von der gegebenen Function das erste durch dx getheilte Differential suche, dieß aufs Quadrat erhebe, die Einheit zusetze, und aus der Summe die Quadratwurzel ziehe". Einzeln genommen aber gibt es für jede dieser zwey Functionen mehrere Arten der Herleitung aus ihrer ursprünglichen, die für die andere nicht passen. So entsteht z. B. $\sqrt{1+4x^2}$ aus x^2, indem man die gegebene Function mit 4 multiplicirt, die Einheit zusetzt, und aus der Summe die Quadratwurzel zieht: aber nicht eben so läßt sich $\sqrt{1+49x^{12}}$ aus x^7 herleiten. Übrigens ist nicht nöthig, daß man jenes Gesetz der Herleitung der Functionen F und Φ aus ihren zugehörigen $f, \bar{f}, \ldots$ und $\varphi, \bar{\varphi}, \ldots$ *kenne*, sondern es genügt zu wissen, daß *eines vorhanden sey*. Und eben hierauf beruhet die große Brauchbarkeit der obigen Sätze. Denn ohne die Beschaffenheit einer gewissen Function zu kennen, kann man oft aus andern Umständen schließen, daß sie aus einer oder etlichen *gegebenen* Functionen $f, \bar{f}, \ldots$ nach eben demselben Gesetze herleitbar seyn müsse, nach welchem eine bekannte andere Function Φ aus einer oder etlichen gleichfalls bekannten Functionen $\varphi, \bar{\varphi}, \ldots$ herleitbar ist. Dann läßt sich nach § 9 aus $\varphi, \bar{\varphi}, \ldots, f, \bar{f}, \ldots$ und Φ die F bestimmen. Will Jemand dieses Verfahren mit demjenigen vergleichen, durch das man aus drey gegebenen Größen die vierte Proportionalgröße berechnet: so haben wir nichts dagegen. Nenne man immerhin unsere Methode eine Art *höhere Regeldetri*, die für die höhere Mathematik beyläufig eben das leistet, was die gemeine überall, daß nähmlich ein paar Functionen F und Φ aus einem oder
16 etlichen Paaren anderer f und φ; | $\bar{f}$ und $\bar{\varphi}$; u. s. w. nach einem *gleichen* Gesetze ableitbar seyen, sind wir schon dann berechtigt anzunehmen, wenn es nur irgend einen gemeinschaftlichen Begriff gibt, unter den das Verhältniß der Abhängigkeit der F von $f, \bar{f}, \ldots$ sowohl als auch der Φ von $\varphi, \bar{\varphi}, \ldots$ gebracht werden kann. Es mögen z. B. Ft und Φt zwey Functionen der Zeit t bedeuten, die für jedes t den innerhalb desselben zurückgelegten Weg eines sich geradlinig bewegenden Atoms angeben, ft und φt dagegen mögen die jedem t entsprechenden Geschwindigkeiten seyn: so ist gewiß, daß die Beschaffenheit der Functionen Ft und Φt aus jenen der ft und φt nach irgend einem für beyde gleichlautenden Gesetze herleitbar seyn muß. Denn mag es immer eine eigene Regel geben, nach der sich der Raum aus der Geschwindigkeit berechnen läßt, wenn diese unveränderlich ist (wo $ft = c$); und eine eigene Regel, wenn die Geschwindigkeit in gleichem Verhältnisse mit der Zeit wächst (wo

$ft = ct$); und noch viel andere Regeln für viele andere Fälle: dennoch, weil alle Ft, Φt, ... doch das gemeinschaftlich haben, daß sie Ausdrücke für den beschriebenen Raum; und alle ft, φt, ..., daß sie Ausdrücke für die gehabten Geschwindigkeiten sind; und weil der Raum durch die Geschwindigkeiten, die während der Bewegung Statt gefunden haben, bestimmt wird: so muß es nothwendig auch eine Regel geben, welche so allgemein lautet, daß nach ihr alle Ft, Φt, ... aus ihren zugehörigen ft, φt, ... herleitbar sind. — Dieses ist jedoch nur die erste Bedingung, die zur Anwendung unserer Methode auf einen Gegenstand gehört; nebst ihr wird zweytens erfordert, daß die aus $F(x, y, \ldots)$ und $\Phi(x, y, \ldots)$ auf einerley Art abgeleiteten Größen P und Π bloß von den Werthen abhangen, welche gewisse Functionen $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$ und $\varphi(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$; $\overline{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$ und $\overline{\varphi}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$; u. s. w. annehmen, wenn man für m, n, ... alle gedenkbaren echten Brüche, sammt 0 und 1, setzet. Der Sinn dieser Forderung ist für sich selbst klar. Ein Beyspiel aber, wo sie erfüllt wird, ist gleich das vorige. Denn hier ist | P, oder derjenige Theil des Zuwachses der 17
Function $F(x, y, \ldots)$, der die sämmtlichen Δx, Δy, ... zu Factoren enthält, der ganze Zuwachs selbst; nämlich $F(t + \Delta t) - Ft = \Delta t \cdot \frac{dFt}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{d^2Ft}{dt^2} + \ldots$, also der Raum, den der Atom in Δt beschreibt. Nun ist schon § 1 bemerkt worden, daß dieser Raum nur von den Geschwindigkeiten abhänge, die während der Zeit seiner Beschreibung Statt finden, d. h. nur von den Werthen, welche die Function $f(t + m\Delta t)$ annimmt, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, sammt 0 und 1, setzet. Dasselbe gilt also auch von der noch einfacheren Function $\frac{P}{\Delta t} = \frac{dft}{dt} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{d^2ft}{dt^2} + \ldots$ Da dieß Verhältniß für jeden auch noch so kleinen Werth von Δt besteht, so folgt aus § 6, daß es auch für $\Delta t = 0$ bestehe, d. h. daß auch diejenige Größe, in welche $\frac{dft}{dt} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{d^2ft}{dt^2} + \ldots$ für $\Delta t = 0$ übergeht, nähmlich $\frac{dft}{dt}$, bloß von dem Werthe abhänge, den $f(t + m\Delta t)$ für $\Delta t = 0$ erhält, d. i. von ft. Auf eben die Art hängt aber auch $\frac{d\Phi t}{dt}$ bloß von dem Werthe der φt ab. Ist daher für irgend einen bestimmten Werth von t, $ft = \varphi t$; so ist $\frac{dFt}{dt}$ auf eben die Art aus ft, wie $\frac{d\Phi t}{dt}$ aus φt zusammengesetzt. Nun gibt es wenigstens eine Bewegung, bey der wir die Geschwindigkeit sowohl als auch den Raum d. h. φt sowohl als Φt kennen; nähmlich die gleichförmige, bey der die Geschwindigkeit ft = irgend einer constanten Größe c, und der beschriebene Raum Φt

dann $= ct$ ist. Nehmen wir also c so groß, daß $ft = \varphi t = c$; so wird $\frac{dFt}{dt}$ sich eben so aus ft ableiten lassen, wie $\frac{d\Phi t}{dt}$ aus $\varphi t = c$ entsteht. Allein $\frac{d\Phi t}{dt}$ ist $= \frac{d(ct)}{dt} = c$. Also muß auch $\frac{dFt}{dt} = ft$ seyn; und folglich
18 $Ft = \int(ft)$, welches der | bekannte Lehrsatz von dem Verhältnisse des Raumes zur Geschwindigkeit bey jeder Art von Bewegung ist. — Wenn man dagegen unter ft und φt die Kräfte verstehen wollte, die auf den Atom innerhalb t einwirken: so würde zwar die erste Bedingung, daß Ft und Φt von ft und φt nach einem gleichen Gesetze ableitbar sind, noch immer Statt haben; allein die zweyte nicht mehr. Denn der in Δt beschriebene Raum P ist nicht bloß abhängig von den innerhalb Δt auf den Atom einwirkenden Kräften, sondern auch von denjenigen, die früher eingewirkt hatten. Bezeichnen wir aber durch Ft und Φt jetzt die Geschwindigkeiten; so daß wir das Verhältniß suchen, in dem Geschwindigkeit und Kraft bey jeder geradlinigen Bewegung mit einander stehen: so finden abermahls beyde Bedingungen Statt. Denn jener Zuwachs, den die Geschwindigkeit innerhalb Δt erfährt, d. h. $F(t + \Delta t) - Ft = \Delta t . \frac{dFt}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} . \frac{d^2Ft}{dt^2} + \ldots$ hängt gewiß nur von den Kräften ab, die innerhalb Δt einwirken. Unsere Methode kann also hier wieder angewendet werden. Es beweiset sich leicht, daß wenn die Kraft gleichförmig wirkt, die Geschwindigkeit wie die Zeit wachsen müsse. Setzen wir also die Kraft $\varphi t =$ einer constanten Größe p; so ist uns die Function Φt bekannt: nämlich $= pt$. Hiedurch erhalten wir, wie vorhin, $\frac{d\Phi t}{dt} = p$, und $\frac{dFt}{dt} = ft$, oder $Ft = \int(ft)$, wie die bekannte Formel lautet. Hier sehen wir also zwey Hauptsätze der Mechanik erwiesen, ohne daß es irgend einer Betrachtung des unendlich Kleinen bedurft hätte, was man erst neuerlich noch für unumgänglich gehalten! Eben so wenig bedurften wir unsere Zuflucht zu nehmen zu dem unechten Grundsatze, den hier la Grange, Pasquich, u. A. zu Hülfe ziehen: „daß von zwey Ursachen, welche durch eine gleiche Zeit wirken, deren die eine aber in jedem einzelnen Augenblicke die andere an Größe übertrifft, auch eine ungleiche |
19 Wirkung, und zwar von der stets größeren auch eine größere hervorgebracht werden müsse". Ein Satz, der die größte Ähnlichkeit mit dem zweyten archimedischen Grundsatze, betreffend die Länge einer umschlossenen Linie hat (Vorr. S. IV); besonders nach dem Ausdrucke, den ihm die Neueren gaben. Aber so wenig dieser als ein Grundsatz angesehen werden kann, so wenig auch jener. Seine Zu-

sammengesetztheit zeigt schon, daß er ein Lehrsatz sey, der erst bewiesen werden muß; und wenn dieß geschehen soll, kann es unmöglich anders, als eben nur durch Voraussetzung jener zwey Formeln geschehen, mittelst deren man jede Wirkung berechnet, wenn ihre Ursache eine gegebene Function der Zeit ist. — Dieß Wenige wird vielleicht hinreichen, auf die Fruchtbarkeit unsrer Methode aufmerksam zu machen. Zum Schlusse also nur ein paar Worte noch über das Eigenthümliche derselben. Denn soll ein Lehrsatz auslangen, Wahrheiten darzuthun, die man ohne ihn nicht zu beweisen vermochte, so muß er irgend eine bisher noch nicht versuchte Verbindung von Begriffen, kurz etwas Eigenthümliches enthalten. Worin liegt also dies bey unserer Methode? Ich sage darin, daß man die Beschaffenheit einer Function $\left(\text{nämlich der } \frac{d^{xy\cdots}F(x,y,\ldots)}{dx\,dy\ldots}\right)$ aus der Beschaffenheit nicht einer oder etlicher, sondern aus der Beschaffenheit einer unendlichen Menge von Größen herleitet; nähmlich den Werthen, welche $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... annehmen, wenn man für $m, n, \ldots$ jeden gedenkbaren echten Bruch setzt. Dieses geschieht hier aber nicht durch eine versuchte Berechnung dessen, was an sich unendlich, folglich unberechenbar ist. Es geschieht auch nicht dadurch, daß man die zu findende $\frac{d^{xy\cdots}F(x,y,\ldots)}{dx\,dy\ldots}$ als eine Function von jenen sämmtlichen Größen, welche an Menge unendlich sind, ansieht; denn auch dieses wäre eine versuchte Berechnung des Unendlichen, weil eine | Function von unendlich vielen Größen nothwendig auch als zu- 20
sammengesetzt aus unendlich vielen Theilen angesehen werden müßte. Sondern die ganze Sache wird bloß durch die Bemerkung vermittelt, daß die Beschaffenheit der zu findenden Function $\frac{d^{xy\cdots}F(x,y,\ldots)}{dx\,.\,dy\ldots}$ nur von dem Werthe derjenigen Größen abhängt, in welche die Functionen $f(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, $\bar{f}(m\Delta x, n\Delta y, \ldots)$, ... für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, ... übergehen, und daß mithin, wenn diese Werthe für etliche Functionen von derselben Art $\frac{d^{xy\cdots}F(x,y,\ldots)}{dx\,.\,dy\ldots}$, $\frac{d^{xy\cdots}\Phi(x,y,\ldots)}{dx,\,dy\ldots}$ einander gleich sind, nähmlich $f(0,0,\ldots) = \varphi(0,0,\ldots)$; $\bar{f}(0,0,\ldots) = \bar{\varphi}(0,0,\ldots)$; ..., die bestimmenden Stücke der Functionen $\frac{d^{xy\cdots}F(x,y,\ldots)}{dx\,.\,dy\ldots}$, $\frac{d^{xy\cdots}\Phi(x,y,\ldots)}{dx\,.\,dy\ldots}$ einander gleichen, daher auch diese selbst identisch seyn müssen. Man braucht mithin nur die Zusammensetzungsart einer einzigen aus ihnen z. B. der $\frac{d^{xy\cdots}\Phi(x,y,\ldots)}{dx\,.\,dy\ldots}$ aus ihren zugehörigen $\varphi(0,0,\ldots)$, $\bar{\varphi}(0,0,\ldots)$, ... zu

kennen, um hieraus auf die Zusammensetzungsart jeder anderen $\frac{d^{xy\cdots}F(x, y, \ldots)}{dx \,.\, dy \ldots}$ aus ihren $f(0, 0, \ldots)$, $\bar{f}(0, 0, \ldots), \ldots$; und dadurch wieder auf die Beschaffenheit von $F(x, y, \ldots)$ selbst zu schließen.

§ 11.

Erklärungen. Ein Raumding,*) zu dessen jedem Puncte es anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, wenigstens einen, und höchstens nur eine endliche Menge von Puncten als Nachbarn gibt, heißt eine Linie überhaupt (Fig. 1—7).

21 2. Ein Raumding, dessen jeder Theil, der sich nach | eben gegebener Erklärung als Linie ansehen läßt, mit dem noch übrigen Theile, der sich dann gleichfalls als Linie muß ansehen lassen, wenigstens einen Punct gemein hat, heißt eine durchaus zusammenhängende Linie (Fig. 2—7).

3. Ein Raumding, dessen jeder Punct anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, höchstens zwey Nachbarn hat, heißt eine einfache Linie (Fig. 4. 6, 7).

4. Ein Rauming, dessen jeder Punct anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, eine gerade Anzahl von Nachbarn hat, und dabey keine Puncte, deren Entfernung von andern größer als eine gegebene ist, heißt eine in sich zurückkehrende oder geschlossene Linie (Fig. 3, 4, 7).

5. Ist diese Anzahl überall nur zwey, so ist es eine einfache in sich zurückkehrende Linie (Fig. 4 und 7).

6. Eine Linie dagegen, in der es Puncte gibt, die anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, nur einen Nachbarn haben, heißt eine begrenzte Linie (Fig. 2, 5, 6).

7. Jene Puncte in ihr (z. B. e, e) heißen Grenz- (oder End-) puncte; die übrigen (z. B. m, m) innere Puncte.

8. Wenn diese letzteren jeder nur zwey Nachbarn haben, so heißt die Linie eine einfache begrenzte Linie (Fig. 6).

§ 12.

Anmerkung. Diese Erklärungen, nebst einigen andern, welche noch folgen, muß man nicht nothwendig inne haben, um die hier vorkommende Theorie verstehen und beurtheilen zu können. Gleichwohl

*) Raumding heißt überhaupt jedes System (jeder Inbegriff) von Puncten (sie mögen in endlicher oder unendlicher Menge vorhanden seyn).

schien es mir zweckmäßig, ihnen hier einen Platz zu vergönnen; wäre es auch nur, um gelegenheitlich einen kleinen Vorbegriff von der Beschaffenheit jener gänzlichen Umstaltung der Geometrie zu geben, an der ich schon seit Jahren gearbeitet, bisher aber erst sehr wenige Proben dem Publico mitgetheilt habe. Erwähne ich aber dieser Erklärungen einmahl, so muß ich auch schon etwas zu ihrer Erläuterung und | Rechtfertigung beyfügen. Offenbar gibt es in einer jeden Linie 22
(Fig. 1) zu einem jeden ihrer Puncte z. B. m keinen nächsten, d. h. keinen, der ihm so nahe stände, daß nicht ein anderer angeblich wäre, der ihm noch näher steht; vielmehr läßt sich zu jedem Puncte m eine gewisse Entfernung z. B. mr finden, von welcher und von allen kleineren z. B. mr', mr'', mr''', ... behauptet werden kann, daß es Puncte in der Linie gebe, die diese Entfernung von m haben. Diese Eigenschaft der Linien kömmt aber auch jeder Fläche, und jedem Körper zu; und ist daher gleichsam der höhere Begriff (genus proximum), der diese drey Arten der Ausdehnung gemeinschaftlich umfaßt. Was aber der Linie ausschließlich zukömmt (die differentia specifica), ist, daß für jede einzelne Entfernung z. B. mr', mr'', mr''', ... nur eine endliche Menge von Puncten, z. B. für mr drey, für mr' einer, für mr'' zwey, als Nachbarn anzutreffen sind. Denn bey der Fläche und dem Körper ist dieses anders: in jener ist zu jedem Puncte eine ganze Linie, in diesem sogar eine ganze Fläche von Puncten vorhanden, welche dieselbe Entfernung von ihm haben. Zwar kann es zuweilen auch in einer Linie einzelne Puncte wie c (Fig. 7) geben, welche für eine gewisse Entfernung cr ein ganzes Linienstück rs voll nachbarlicher Puncte haben. Aber auch da wird es allemahl eine so kleine Entfernung z. B. co geben, für welche, und für alle kleineren abwärts nur eine endliche Menge von Nachbarn anzutreffen ist. — Nach dieser Erklärung trägt übrigens auch ein aus mehreren gar nicht zusammenhängenden Zweigen gestehendes Ganze, wie Fig. 1, den Nahmen einer Linie, was denn auch dem geometrischen Sprachgebrauche gemäß ist. Soll aber etwas nur eine einzige durchaus zusammenhängende Linie heißen, so muß zu dem Bisherigen noch das in der zweyten obigen Erklärung erwähnte Kennzeichen hinzukommen. Bey einigem Nachdenken nun, und durch Vergleichung mit den Figuren wird man hoffentlich den Sinn sowohl, als auch die Übereinstimmung | dieser und aller folgenden Erklärungen mit dem Sprachgebrauche ein- 23
sehen. Desto anstößiger aber dürfte es Mancher finden, daß ich die Linie diesen Erklärungen zu Folge aus einer bloßen Zusammensetzung von Puncten entstehen lasse. Für einen Solchen erinnere ich, daß diese Vorstellung bloß dann ein Irrthum wäre, wenn man entweder

a) die Linie als eine Summe von Puncten in dieses Wortes arithmetischer Bedeutung ansähe, und also vergäße, daß man bey einer Linie (so wie bey jedem Raumdinge) nicht allein auf die Menge der Puncte, sondern auch auf die Art ihrer Zusammenstellung sieht; oder wenn man b) meinte, daß schon eine bloß endliche Menge von Puncten zur Linie genüge, da doch eine jede unendlich vieler bedarf; oder wenn man sich c) vorstellte, daß von den Puncten einer Linie der eine, ich weiß nicht auf welche Art, unmittelbar an den nächstfolgenden angrenzen müsse, weil sonst zwischen beyden ein leerer Raum bliebe. Dies Alles sind aber Irrthümer, denen unsere Erklärung vielmehr ausdrücklich widerspricht, statt daß sie densel-
24 ben huldigen sollte.*) — Ein anderer | leicht vorauszusehender Einwurf ist, daß alle Sätze, die ich hier als Erklärungen aufgestellt habe, im Grunde nur Lehrsätze sind; weil es ja offenbar ist, daß die Benennungen: Linie, in sich zurückkehrende Linie, Grenzpunct, u. dgl. ihrer eigenthümlichen Bedeutung nach auf ganz andere Begriffe hinweisen, als auf diejenigen, welche ich ihnen § 11 untergelegt habe. So deutet z. B. der Name Linie (γραμμή) unverkennbar hin auf ein Raumding, das durch Bewegung eines materiellen Punctes oder Atomes beschrieben werden kann. Grenzpunct in einer Linie heißt nach der Etymologie des Wortes ein Punct, bey welchem die Bewegung, die zur Beschreibung der Linie nöthig ist, begrenzet, d. h. entweder angefangen oder geendiget werden muß. Eine in sich zurückkehrende Linie ist nach der ursprünglichen Bedeutung

*) Die einzelnen Dinge, aus welchen ein andres Ding bestehet, oder zusammengesetzt ist, pflegt man gewöhnlich Theile auch Bestandtheile desselben zu nennen. Nach unserer Erklärung dürfte man also behaupten, daß eine jede Linie Puncte als ihre Theile enthalte; und eben so nach den Erklärungen, die später vorkommen werden, daß eine jede Fläche Puncte und Linien, ein jeder Körper Puncte, Linien und Flächen als Bestandtheile enthalte. Das dürfte ein neuer Anstoß für das Ohr des Geometers werden; jedoch nur darum ein Anstoß, weil er gewohnt ist, das Wort Theil in einer engeren Bedeutung zu gebrauchen; nähmlich die Dinge $a, b, c, \ldots$, die das Ding M ausmachen, nur dann erst Theile desselben zu nennen, wenn man an ihnen bloß eine solche Eigenschaft betrachtet, die sie mit M gemeinschaftlich besitzen, d. h. wenn sie mit M gleichartig sind. Sollte es aber wohl zweckmäßig seyn, dies Wort in einer so engen Bedeutung zu brauchen? Sollte man nicht lieber gleichartige und ungleichartige Theile unterscheiden, und die so eben erwähnte Bedingung nur von den ersteren fordern? — So wie man gar keinen Anstand trägt, zu sagen, daß z. B. Leib und Seele die zwey Bestandtheile des Menschen ausmachen: so sollte man sich auch nicht darüber aufhalten, wenn Jemand ganz in derselben Bedeutung des Wortes die Puncte Bestandtheile von einer Linie nennt. Nähmlich nur ungleichartige Bestandtheile derselben sind sie, nicht aber gleichartige.

dieses Ausdrucks eine Linie, welche beschrieben wird durch die Bewegung eines Atoms, der auf die Stelle seines Ausganges wieder zurückkehret. U. s. w. — Ich gebe dies Alles zu; entgegne aber, daß man in einer Wissenschaft bekanntlich nicht auf die ursprüngliche Bedeutung eines Wortes, sondern nur auf diejenige zu sehen habe, in der es gerade in ihr genommen wird, und genommen werden muß, wenn es in diese Wissenschaft gehören soll. Da ist es nun aus Gründen, die ich bereits 1804 in der Vorrede zu den Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie angeführt habe, unwidersprechlich, daß in die Raumwissenschaft keine Begriffe ge- | hören, 25
die jenen der Bewegung in sich schließen. Werden also die Worte: Linie, Grenzpunct, in sich zurückkehrende Linie, u. s. w. in der Raumwissenschaft gebraucht; so werden sie eben so wenig, als etwa die Worte: Durchschnitt, Schwerpunct, u. dgl. in ihrer ersten und ursprünglichen Bedeutung, sondern in einer eigenen genommen, aus welcher der Begriff der Bewegung, sammt allen andern hier fremdartigen, beseitiget ist, oder beseitiget werden soll. Der rein geometrische und der mechanische Begriff eines und eben desselben Wortes sind also nicht minder zu unterscheiden, als etwa die arithmetische und die geometrische Bedeutung der Worte Quadrat, Würfel, u. a. Es sind dies Begriffe, die wohl meistens einerley Umfang, aber nicht einerley Inhalt (d. h. nicht einerley Bestandtheile) haben; es sind wohl Wechselbegriffe. So sind z. B. der mechanische Begriff eines Raumdinges, das durch Bewegung eines Atoms beschrieben werden kann, und der rein geometrische Begriff, welchen wir oben (§ 11, N. 2) unter dem Nahmen einer durchaus zusammenhängenden Linie aufgestellt haben, wirklich zwey Wechselbegriffe. — In der Raumwissenschaft aber achtet man auf die mechanische Bedeutung solcher Worte gar nicht; sondern erst in der Mechanik wird gezeigt, welche mechanische Eigenschaften sich von diesen geometrischen Gegenständen prädiciren lassen; woraus denn von selbst hervorgeht, aus welchem Grunde man ihnen diese Nahmen beygelegt hat. So ist z. B. der Begriff des Schwerpuncts, den bereits mehrere Geometer in ihre Wissenschaft aufgenommen haben, in dieser so zu erklären, daß der Begriff der Schwere, den jenes Wort seiner ursprünglichen Bedeutung nach enthält, gänzlich vermieden wird. In der Mechanik aber muß gezeigt werden, welche mechanische Eigenschaft dieser geometrische Punct besitzt, woraus sich dann erklärt, wie er zu der Benennung eines Schwerpuncts komme. Und so ist es ebenfalls erst | die Mechanik, 26
die beweisen muß, daß jenes unter dem Nahmen einer Linie von uns erklärte Raumding durch die Bewegung eines Atoms wirklich beschrieben

werden könne; daß jenes andere Raumding, welches wir oben eine in sich zurückkehrende Linie nannten, die Eigenschaft habe, daß der es beschreibende Atom in eben dieselbe Stelle von der er ausgegangen ist, zuletzt zurückkehrt.*) U. s. w. Vielleicht ist es nicht überflüssig, wenn wir, um unsern Lesern einiger Maßen begreiflich zu machen, wie die Mechanik dies Alles leiste, ein kleines Beyspiel anführen. Lasset uns also zeigen, wie die Mechanik den Lehrsatz beweise, daß jeder Atom, wenn sich die Ursache seiner Bewegung nicht ändert, eine gerade Linie beschreibt; aus welchem Satze sich nachher durch die Verbindung mit einigen andern der richtige Lehrsatz ableiten läßt, daß jeder Atom, wie er sich immer bewege, eine Linie überhaupt beschreibt. Es werde das Raumding, das alle Puncte
27 enthält, die der | bewegte Atom in der Zeit t einnimmt, durch S; jenes, das alle Orte in sich faßt, welche er innerhalb Θ betritt, durch Σ angedeutet: so ist gewiß, daß S und Σ Dinge sind, welche durch den gegebenen Ort des Atoms im Anfange der Zeiten t und Θ, durch diese Zeitlängen selbst, und durch die gegebene Ursache der Bewegung, d. h. durch die Geschwindigkeit des Atoms ganz bestimmt sind. Wenn sich nun an dieser Geschwindigkeit zu keiner Zeit etwas geändert hat; so sage ich, daß die bestimmenden Stücke von S und Σ einander ähnlich sind. Denn die Orte m und n, in denen sich der Atom im Anfange der Zeiten t und Θ befindet, sind so, wie alle Puncte, einander ähnlich. Ein Gleiches gilt auch von den Zeiten t und Θ, indem auch alle Zeitlängen einander ähnlich sind. Aber auch in dem Verhältnisse, worin die Orte m und n zu den Zeiten t und Θ, oder zu den Geschwindigkeiten des Atoms stehen, läßt sich kein Unterschied angeben, wenn letztere ungeändert bleiben. Demnach sind alle bestimmenden Stücke von S und Σ einander ähnlich. Nun haben wir in den Betrachtungen u. s. w., I. Abth. § 17

---

*) Die Verwerflichkeit der gewöhnlichen Erklärung einer Linie durch die Bewegung eines Punctes (oder Atoms) hätte man übrigens auch aus dem Umstande schon entnehmen können, daß es der Arten, auf welche eine und dieselbe Linie beschrieben werden kann, überall mehrere (bey einer einfachen Linie wenigstens zwey, bey einer in sich zurückkehrenden aber, weil man von jedem ihrer Puncte ausgehen kann, unendlich viele) gibt. Wäre nun der Begriff einer Linie nichts anders als der Begriff dessen, was durch Bewegung eines Atoms entstehet; so wäre die Linie, welche durch die Bewegung eines Atoms von a nach b beschrieben wird, dem Begriffe nach verschieden von derjenigen, bey deren Beschreibung der Atom eben dieselben Puncte, wie vorhin, nur in verkehrter Ordnung von b nach a durchwandert. Man hätte dann eigentlich zwey Linien vor sich; was doch dem Sinne, den der Geometer mit dem Worte Linie verbindet, ganz widerspricht; denn er erkennt gewiß in diesem Falle nur eine einzige Linie an; woraus deutlich folgt, daß die Beschreibung der Linie im Sinne des Geometers nicht zum Begriffe derselben gehöre. —

erwiesen, daß wenn die bestimmenden Stücke zweyer Dinge einander ähnlich sind, auch diese selbst einander ähnlich seyn müssen. Also sind S und Σ einander ähnlich. Diese Ähnlichkeit findet Statt, die Zeiten t und Θ mögen in was immer für einem Verhältnisse zu einander stehen. So kann z. B. die Zeit Θ ein Theil der t seyn; in welchem Falle auch Σ ein Theil von S seyn muß, indem die Orte, welche der Atom innerhalb Θ betritt, dann unter den Orten, welche er innerhalb t einnimmt, begriffen sind. Daraus ergibt sich, daß S ein Raumding von solcher Beschaffenheit sey, daß jeder Theil Σ desselben dem Ganzen ähnlich ist; woraus wieder folgt, daß es nichts anders, als — eine gerade Linie sey; indem es, wie die Geometer wissen, sonst kein anderes Raumding gibt, dessen jeder Theil dem Ganzen ähnlich wäre.

§ 13.

Erklärung. Ein Raumding heißt ein bestimm- | tes, oder be- 28
stimmbares Ding, wenn sämmtliche Puncte desselben aus einer gewissen Anzahl gegebener Puncte durch eine endliche Menge von Regeln entweder wirklich bestimmt, oder doch bestimmbar sind.

§ 14.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß wenn erst zwey Puncte auf irgend eine Weise, z. B. unmittelbar, oder (wie man zu sagen pflegt) durch Anschauung — gegeben sind, eine unendliche Menge anderer Puncte (aller derjenigen nähmlich, welche mit jenen in gerader Linie liegen) durch eine bloße Anzeige des Verhältnisses ihrer Entfernungen von den gegebenen Puncten zu der Entfernung dieser zwey unter einander, also durch bloße Regeln (oder durch allgemeine Begriffe) bestimmt werden könne. Wenn vollends drey Puncte gegeben sind, deren keiner durch sein Verhältniß zu den zwey andern schon bestimmt ist — (d. h. drey Puncte, welche nicht in derselben Linie liegen) —: so läßt sich eine noch größere Menge von Puncten (nähmlich alle, die in der Ebene der drey gegebenen liegen) durch eine bloße Beschreibung des Verhältnisses der obwaltenden Entfernungen, also durch bloße Begriffe, bestimmen. Wenn endlich vier Puncte gegeben sind, deren keiner durch seine Verhältnisse zu den drey andern schon bestimmt ist — (d. h. vier Puncte, die nicht in einerley Ebene liegen) —: so läßt sich jeder nur mögliche fünfte Punct, er liege, wo er will, bloß durch Beschreibung des Verhältnisses, das seine vier Entfernungen zu den Entfernungen der gegebenen Puncte unter einander besitzen, also durch bloße Regeln bestimmen. An diese Wahrheiten erinnert, wird man hoffentlich den Ausdruck

in unsrer obigen Erklärung: „aus einer gewissen Anzahl gegebener Puncte durch bloße Regeln bestimmbar seyn“ verstehen. Der Puncte nähmlich, welche gegeben seyn müssen, um alle übrigen Puncte eines Raumdings bestimmen zu können, bedarf es nach eben
29 Gesagtem immer nur eine geringe Anzahl; zum | Höchsten vier. Der Regeln aber, welche man wissen muß, um aus den gegebenen Puncten alle übrigen bestimmen zu können, sind öfters sehr viele nöthig. Und zwar so oft der Gegenstand eine unendliche Menge von Puncten enthält (wie bey allen Linien, Flächen und Körpern der Fall ist): so müßte man, wenn jeder einzelne Punct zu seiner Bestimmung einer besondern Regel bedürfte, eine unendliche Menge von Regeln auffassen; d. h. der Gegenstand wäre so gut, als unbestimmbar. Soll er demohngeachtet bestimmbar seyn, so müssen entweder alle seine Puncte durch eine und eben dieselbe Regel bestimmt werden können, oder er muß sich wenigstens in eine endliche Menge von Theilen zerlegen lassen, deren jeder durch eine einzige Regel bestimmt werden kann. Hiebey wird vorausgesetzt, daß sich durch eine einzige Regel eine unendliche Menge von Puncten bestimmen lasse. Und das ist allerdings möglich. So wird z. B. durch die kurze Regel: „sich alle Puncte zu denken, welche von zwey gegebenen a und b zwey ebenfalls gegebene Entfernungen haben“ eine unendliche Menge von Puncten bestimmt, die eine ganze Kreislinie bilden, deren Axe ab ist. — Daß übrigens Raumdinge, die nicht bestimmbar sind, eben deshalb auch keiner Berechnung ihrer Größe unterliegen, leuchtet von selbst ein. Ihrer wird also im Verfolge dieser Abhandlung nicht mehr gedacht werden. Verlangt man aber ein Beyspiel eines solchen Raumdings; so ist es gleich jener von vielen Geometern zu einem vermeintlichen Behufe bey Berechnung der Curven angewandte Begriff einer „gebrochenen Linie, die aus unendlich vielen, unendlich kleinen Geraden zusammen gesetzt ist.“ Eine solche Linie ist, als eine unbestimmbare, schon für sich selbst keiner Berechnung ihrer Länge fähig; um wie viel weniger, daß sie uns zur Berechnung der Länge anderer verhelfen könnte.

§ 15.

30 Erklärung. Die zwischen den Puncten a | und b enthaltene Gerade heißt ein Raumding, das alle und sonst keine andere Puncte enthält, als die zwey a und b, sammt allen, die zwischen ihnen liegen, d. h. welche zu a in eben derselben Richtung, wie b, zu b in eben derselben Richtung, wie a, gelegen sind.

§ 16.

Lehrsatz. Die Gerade ist eine Linie, und zwar eine bestimmbare.

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, daß diesem Raumdinge die § 11 geforderten Merkmahle zukommen; und folglich ist dasselbe eine Linie. Die Regel aber, nach welcher alle seine Puncte bestimmt werden können, spricht schon § 15 aus; daher ist dieses Raumding auch eine bestimmbare Linie.

§ 17.

Aufgabe. Die zweckmäßigste Weise anzugeben, wie jede bestimmbare Linie aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Puncte bestimmt werden könne.

Auflösung. Da jeder Punct m (Fig. 8) aus vier gegebenen am Bequemsten bestimmbar ist, wenn drey derselben z. B. b, c, d ein solches Verhältniß zu dem vierten a haben, daß die drey Richtungen ab, ac, ad auf einander senkrecht stehen; dann aber vom Puncte m nur die drey Abstände seiner auf diese Richtungen gefällten Lothe von a, nähmlich ap, aq $(= po)$, ar $(= om)$ gegeben sind: so denke man sich, daß aus den sämmtlichen Puncten der zu bestimmenden Linie dergleichen Lothe (man nennt ihre Abstände von a Abscissen oder Ordinaten) auf die drey Richtungen ab, ac, ad (welche auch Axen heißen) gefällt seyen. Wenn nun die Coordinaten für m durch x, y, z; für einen andern Punct n aber durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ vorgestellt werden: so können die Zeichen Δx, Δy, Δz nie alle drey zugleich die Bedeutung Null haben; indem sonst n mit m einerley Punct wäre. Die Entfernung mn aber ist $= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = u$; eine Größe, die nach § 11 für jedes m alle unter einer | bestimmten Grenze liegende Werthe muß annehmen können. 31
Woraus denn folgt, daß es zu jedem x, y, z so kleine Δx, Δy, Δz gibt, als man nur will, d. h. daß x, y, z, wofern sie überhaupt sich ändern, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändern. Da sich nun eine derselben z. B. z nach dem so eben Gesagten nothwendig ändern, und unendlich viele Werthe annehmen muß, so könnten sich höchstens folgende Fälle ereignen: a) unendlich viele verschiedene z gehören zu einem y und einem x; b) unendlich viele verschiedene z und y gehören zu einem x; c) eine nur endliche Menge von z gehören zu einem y, und eine nur endliche Menge von y zu einem x. Wirklich sind alle drey Fälle bey einer Linie möglich; wie das bloße Beyspiel der Geraden zeigt. Denn bey einer Geraden, die parallel zur Axe z läuft, hat man den ersten; bey einer, die nicht parallel zu z, aber doch senkrecht auf x steht, den zweyten; bey einer noch anders liegenden den dritten Fall; bey einer

gebrochenen Linie endlich, die aus drey solchen Geraden zusammengesetzt ist, bestehen alle drey Fälle zugleich. Wir müssen nun jeden besonders betrachten.

1. Im *ersten* Falle begreift man leicht, daß es der x und y, zu deren jedem Paare unendlich viele z gehören, selbst nicht unendlich viele geben könne. Denn eines von Beydem: unter den unendlich vielen z, welche zu einerley x und y gehören, sind entweder *alle* z zu verstehen, die zwischen etlichen bestimmten Grenzen liegen; oder nur *gewisse*, die man noch erst nach einer eigenen Regel zu bestimmen hat.

a) Der *erste* Fall gäbe zu jedem Puncte m für eine bestimmte Entfernung unendlich viele Nachbarn; indem sich aus den unendlich vielen Δx, Δy unendlich viele zusammengehörige Paare herausheben ließen, zu deren jedem es ein Δz gäbe, welches mit ihnen $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} =$ einer bestimmten Größe u machte.

b) Im *zweyten* Falle käme es wieder darauf an, ob unter den
32 unendlich vielen x oder y *alle* zwischen be- | stimmten Grenzen enthaltene, oder nur *gewisse* Werthe zu verstehen sind. Das *Erste* wäre einerley Fall mit *a;* nur daß man statt z jetzo x oder y hätte. Es bliebe also nun das *Zweyte* übrig. Wenn nun die Größen Δx, Δy, Δz zwar unendlich viele, aber doch nicht *alle* zwischen gewissen Grenzen liegende Werthe hätten; so ließen sich durch ihre verschiedenartige Verbindungen dem Ausdrucke $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$ zwar unendlich viele, aber doch nicht *alle* unter einer gegebenen Größe liegende Werthe ertheilen; wie dies bey einer Linie seyn muß. — Es kann daher nur eine *endliche* Menge von x und y geben, für deren jedes Paar die Größe z unendlich viele, und zwar *alle* zwischen bestimmten Grenzen z. B. a und $a + b$, dann wieder $a + b + c$ und $a + b + c + d$; u. s. w. liegende Werthe haben muß. Soll dabey die Linie eine *bestimmte* seyn, so müssen uns auch diese Grenzen selbst *gegeben* seyn. Hieraus ersieht man, daß die Linie, die man in diesem *ersten* Falle vor sich hat, eine *Gerade*, oder ein Inbegriff von *mehreren Geraden* sey, die alle parallel zur Axe der z liegen.

2. In dem *zweyten* der oben betrachteten Fälle läßt sich auf ähnliche Art, wie im ersten darthun, daß es der x, zu deren jedem unendlich viele y und z gehören, selbst wieder nur eine endliche Menge geben dürfe. Dieses vorausgesetzt, folgt weiter, daß, da es zu jedem m für ein bestimmtes u nur eine endliche Menge von Nachbarn, also nur eine endliche Menge von $y + \Delta y$ und $z + \Delta z$ geben darf, zwischen den Größen $y + \Delta y$ und $z + \Delta z$ ein solches Verhältniß der Abhängigkeit Statt finden muß, daß es nur eine endliche Menge zusammengehöriger

Δy und Δz gibt, bey welchen $\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} = u$ wird; d. h. für jedes $y + \Delta y$ gibt es nur ein oder einige $z + \Delta z$, und also auch für jedes y nur ein oder einige z. Es muß daher für jeden Werth von y irgend ein Gesetz vorhanden seyn, das die zugehörige Coordinate z dahin beschränkt, daß sie nur einen oder einige bestimmte Werthe annimmt. Da es aber der Werthe, die y annimmt, unendlich viele gibt; so leuchtet ein, daß die Linie keine | bestimmbar wäre, wenn man für 33
jeden Werth von y immer eines eigenen Gesetzes zur Bestimmung des zugehörigen Werthes von z bedürfte. Es müssen also für mehrere, ja für alle zwischen gegebenen Grenzen liegende Werthe der y, die zugehörigen der z durch irgend ein einziges Gesetz bestimmbar seyn. Mit andern Worten: es muß uns eine endliche Menge von Gleichungen von der Form $z = fy$ gegeben, und dabey überdies angezeigt seyn, innerhalb welcher Grenzen von y jede derselben zur Bestimmung von z angewandt werden soll. — Auch ist begreiflich, daß die Linie, die man jetzt vor sich hat, in einer, oder etlichen auf der Axe der x senkrechten Ebenen liege.

3. Im dritten Falle endlich läßt sich auf ähnliche Weise zeigen, daß die Linie nur dann bestimmbar sey, wenn ein oder n Paare Gleichungen von der Form $y = fx$ und $z = \bar{f}x$ gegeben, und überdies angezeigt ist, innerhalb welcher Grenzen der x jedes dieser Paare zur Bestimmung der y und z gebraucht werden soll. — Die Linie, die man in diesem Falle vor sich hat, ist, oder kann wenigstens eine derjenigen seyn, die man Linien von doppelter Krümmung (courbes à double courbure) nennt.

§ 18.

Anmerkung. Sonst heißt es, „jede Linie lasse sich durch ein Paar Gleichungen von der Form $y = fx$ und $z = \bar{f}x$ bestimmen". Dieses ist nicht ganz richtig gesagt. Von unbestimmbaren Linien einmahl gilt dieser Satz gewiß nicht. Aber auch wenn eine Linie bestimmbar, und durch ein einziges Paar von Gleichungen bestimmbar ist, will man nicht immer den Inbegriff sämmtlicher Puncte, welche durch diese zwey Gleichungen bestimmbar sind, wenn man für x was immer für Werthe annimmt, sondern nur irgend ein Stück der Linie haben; wie dies z. B. geschieht, wenn Jemand sich die drey Seiten eines Dreyeckes denkt, wo er sich die drey Geraden offenbar nicht in ihrer ganzen möglichen Verlängerung | ins Unendliche vorstellt. Um also auch von solchen 34
Linien behaupten zu können, sie würden durch ein Paar Gleichungen bestimmt; muß man wenigstens beysetzen, daß man in diesen Gleichungen für x bloß solche Werthe gesetzt denke, die innerhalb gewisser

Grenzen $x = a$ und $x = a + b$, u. s. w. liegen. Da es ferner auch Linien geben kann, deren einzelne Theile nach einem ganz verschiedenen Gesetze fortgehen, wie dieses bey dem nur eben erwähnten Beyspiele der Umfangslinie eines Dreyeckes der Fall ist: so muß man beyfügen, daß öfters auch mehr als ein Paar Gleichungen erforderlich sind; wodurch man endlich auf das im vorhergehenden § Gesagte kömmt.[57]

§ 19.

Erklärung. Die Länge einer Linie heißt eine Größe, die aus der Natur der Linie mittelst Beziehung derselben auf eine gegebene Entfernung E nach einem solchen Gesetze herleitbar ist, daß wenn dieselbe für ein gewisses Stück der Linie $= l$, und für ein anderes $= \lambda$ ist, sie für das Ganze, das aus diesen beyden Stücken zusammen bestehet, $= l + \lambda$ sey.

§ 20.

Anmerkung. Pflegt alles Neue schon deshalb, weil man seiner noch ungewohnt ist, Widerspruch zu erfahren; so steht auch gegenwärtiger Erklärung kaum ein besseres Schicksal bevor. Gewisse Einwürfe, die man wider sie vorbringen wird, kann ich schon jetzt voraussehen; und will sie deshalb gleich in Kürze anführen und beantworten. Erstlich dürfte schon Manchem auffallen, daß ich hier den Begriff der Entfernung von dem der Länge unterscheide, da man sonst beyde für einerley zu halten pflegt. Daß aber dieser Unterschied gegründet, und daß der Begriff der Entfernung viel einfacher als jener der Länge sey; kann man daraus entnehmen, weil sich Entfernung bey einem jeden Systeme zweyer Puncte findet, ohne daß man sich selbe mit irgend einer Linie, am wenigsten eben mit einer geraden, verbunden zu |
35 denken braucht. — Ferner dürfte es scheinen, daß meine Erklärung sich nicht auf das Wesen des Begriffes, sondern auf eine zufällige Eigenschaft desselben gründe; indem es, um zum Begriffe der Länge einer Linie zu gelangen, eben nicht nöthig scheint, sie als ein Ganzes, bestehend aus mehreren Theilen, zu betrachten. Hierauf erwiedere ich, daß der Begriff der Länge sicher doch den einer Größe enthält. Da aber alle Größen entweder extensiv, oder intensiv seyn müssen; so wird gewiß Niemand in Abrede stellen, daß Länge den Größen der ersteren Art beyzuzählen sey. Nun heißt man extensive Größen solche, deren Theile sich außerhalb einander befinden. Also denkt man die Länge einer Linie nie, ohne sich diese als ein Ganzes, bestehend aus Theilen, zu denken. Dieses ist also das eine Merkmahl (das genus) in dem Begriffe der Länge. Wird nun das zweyte (die differentia specifica) wohl ein

anderes seyn, als dies, „daß man sich eine solche Größe jedes Theiles zu denken habe, wobey die Größe des Ganzen, wenn sie nach eben derselben Regel bestimmt wird, der Summe der Größen der einzelnen Theile gleich kömmt?“ — Freylich dürfte man weiter einwenden, daß eine solche Erklärung den Begriff der Länge, statt ihn erst zu erzeugen, schon als bekannt voraussetze; weil man schon wissen muß, was Länge sey, wenn man die Längen zweyer Stücke addiren, und mit der Länge des Ganzen vergleichen will. Wenn dieser Einwurf gälte, so müßten aus gleichem Grunde viele andere Erklärungen, die doch Jedermann für richtig anerkennt, verwerflich seyn; z. B. die Erklärung der Differenz, „daß sie diejenige Größe sey, die zu dem Subtrahendus addirt, den Minuendus herstellt“. Denn um nach dieser Erklärung (ließe sich sagen) zu versuchen, ob eine gewisse Größe Differenz sey, müßte man selbe schon besitzen. Allein so falsch diese Einwendung hier wäre; und so gewiß man, ohne die Differenz schon zu besitzen, gerade nach dieser Erklärung sie am Sichersten durch Schlüsse finden kann: so kann man auch, ohne die Länge | der Linien *ab*, *bc*, *ac* schon zu wissen, 36
bloß aus der Erklärung: daß Länge ab + Länge bc = Länge ac sey, daß ferner diese drey Größen alle nach einem und eben demselben Gesetze aus der Beschaffenheit der Linie ableitbar seyn sollen, diese Größen selbst bestimmen. — Dieses Alles beweiset nun freylich erst nur, daß die in unsere Erklärung aufgenommenen Merkmahle des Begriffes charakteristisch sind, d. h. daß sie der Länge einer Linie ausschließlich zukommen. Hieraus folgt aber noch nicht, daß sie die wirklichen Bestandtheile des zu erklärenden Begriffes sind; so wenig als der Begriff „einer Figur, deren gesammte Winkel 180° betragen“ der eines Dreyeckes ist, obgleich dies Merkmahl dem Dreyecke ausschließlich zukömmt. — Allein unläugbar ist doch, daß in dem Begriffe der Länge jener der Größe, und zwar der einer extensiven Größe, d. h. eines aus mehreren Theilen bestehenden Ganzen liegt. Nun dürfte schwerlich Jemand ein Merkmahl zu nennen wissen, das einfacher als das von uns gegebene wäre, um (als differentia specifica) zu dem Begriffe eines Ganzen (als genus proximum) hinzugefügt, einen Begriff von gleichem Umfange mit dem der Länge zu erzeugen. Die Logik aber lehret, daß, so oft es mehrere Verknüpfungen verschiedener Merkmahle von der Art gibt, daß der Begriff, den jede erzeugt, einem und eben demselben Gegenstande ausschließlich zukömmt, diejenige aus ihnen sich zur Erklärung desselben eigne, welche die einfachste ist. — Sollte sich Jemand nach Allem, was hier in Kürze gesagt ist, gleichwohl noch nicht von der Richtigkeit dieser Erklärung überzeugen können: so erinnere ich, es sey für unsere Theorie genug, wenn er

den gegenwärtigen § auch nur als Lehrsatz gelten läßt. Wer sollte nun dieses nicht thun? nicht zugeben wollen, daß die Länge einer jeden Linie der Summe der Längen ihrer einzelnen Theile gleich sey? — |

37 § 21.

Lehrsatz. Linien, die geometrisch gleich sind, sind auch von gleicher Länge.

Beweis. Zu Folge der Erklärung des § 19 ist die Länge einer Linie eine gewisse Größe, die aus der Natur der Linie, mittelst Beziehung derselben auf eine gegebene Entfernung *E*, nach einem für alle Linien gleichlautenden Gesetze herleitbar ist. Wenn nun zwey Linien geometrisch gleich, d. h. von der Beschaffenheit sind, daß je zwey ihrer gleichnahmigen Puncte in der einen eben dieselbe Entfernung von einander wie in der andern haben; so muß auch alles, was man an diesen Linien durch Vergleichung derselben mit einer gegebenen Entfernung *E* wahrnehmen kann, in beyden einerley seyn. Mithin muß auch die Länge als etwas, das aus der Summe dieser Merkmahle in beyden Linien durch ein und dasselbe Gesetz bestimmt wird, wie in der einen, so in der andern befunden werden.

§ 22.

Anmerkung. Ich habe hier geometrisch gleich genannt, was man sonst gleich und ähnlich, oder nach einem noch ältern Sprachgebrauche congruent zu nennen pflegt. Das Unpassende des letztern Ausdrucks erhellet schon daraus, weil räumliche Dinge, die Beydes Ähnlichkeit sowohl als Gleichheit haben, dennoch nicht immer auch jene Eigenschaft besitzen, die das Wort Congruenz ursprünglich anzeigt, und zu deren Bezeichnung es billig beybehalten werden sollte; ich meine die Eigenschaft, durch die sie fähig werden, Orte für einen und eben denselben materiellen Gegenstand (versteht sich zu verschiedenen Zeiten) zu werden. So kann, um ein Beyspiel, das schon Kant gegeben hat, zu wiederholen, der linke Handschuh dem rechten vollkommen gleich und ähnlich seyn, und wird doch nicht auf beyde Hände passen. — Freylich hat man bisher die Lehre von der Congruenz
38 in dieser Bedeutung des Wortes beynahe gar nicht bearbeitet; | denn was Robert Simson (in seinen Elementis Euclidis, Glasguae 1756)[58]) oder Legendre (in seinen Eléments de Géométrie) beybringt, ist noch sehr wenig. In einem vollendeten Systeme der Geometrie aber wird man auch dieser Lehre einen Abschnitt widmen müssen; und ihre Resultate werden interessant genug seyn. Immerhin lasse man also dem Worte Congruenz seine schon durch den Sprachgebrauch festgesetzte Be-

deutung, in der man es in jenem Abschnitte der Geometrie nothwendig haben wird. — Was aber den Ausdruck ähnlich und gleich betrifft; so ist es erstlich unbequem, einen einzelnen Begriff durch zwey mit und verbundene Worte zu bezeichnen; dann muß hierzu dem Worte gleich der einschränkende Beysatz hinzu gedacht werden: „bloß in Beziehung auf die Größe"; welches doch eine etwas gewaltsame Ellipsis ist! — Zu Folge des Sprachgebrauches, der im gemeinen Leben herrscht, den man auch in den Wissenschaften, so viel es angeht, ehren sollte, bezeichnet das Wort Gleichheit die Übereinstimmung sämmtlicher Merkmahle, die durch Vergleichung zweyer Dinge an ihnen wahrnehmbar sind. Es schien mir also nöthig, diesem Worte in der Geometrie, wo man es von der Übereinstimmung bloß aller jener Merkmahle versteht, die durch Vergleichung mit einer gewissen Entfernung wahrnehmbar sind, den Beysatz geometrisch zu geben. — Den Begriff der Ähnlichkeit aber erkläre ich, wie schon Wolf und Andere gethan, als die Gleichheit der inneren Merkmahle zweyer Dinge, d. h. derjenigen Merkmahle, welche an einem Dinge an und für sich, ohne Vergleichung desselben mit etwas außer ihm (wie dieses z. B. eine gegebene Entfernung wäre), erkannt werden können.[59])

§ 23.

Lehrsatz. Gerade Linien, deren Endpuncte in der einen so weit als in der andern von einander entfernt sind, sind auch von gleicher Länge.

Beweis. Denn die gerade Linie wird bekanntlich | durch ihre **39**
Endpuncte ganz bestimmt. Solche gerade Linien also, deren Endpuncte gleiche Entfernungen unter einander besitzen, haben bestimmende Stücke, die geometrisch gleich sind. Also sind auch sie selbst geometrisch gleich; daher zu Folge § 21 auch ihre Längen gleich seyn müssen.

§ 24.

Zusatz. Im Gegentheile gerade Linien, deren Endpuncte in der einen nicht eben so weit, als in der andern von einander abstehen, sind auch von ungleicher Länge; und zwar diejenige, deren Endpuncte einander näher stehen, ist von geringerer Länge, sie ist, wie man zu sagen pflegt, kürzer. Denn wenn die Entfernung cd (Fig. 9) weiter als die Entfernung ab ist; so läßt sich innerhalb der Linie cd ein Punct β angeben, dessen Entfernung von c der Entfernung ab gleich kömmt. Folglich läßt sich die Linie cd als ein Ganzes betrachten, dessen integrirende Theile die beyden Linien $c\beta$ und βd sind. Da nun jede derselben eine gewisse Länge haben muß, die Länge der $c\beta$ aber nach § 23 der

Länge der ab gleich ist, so muß die Länge der cd nothwendig größer seyn, als die der ab.

§ 25.

Anmerkung. Entfernungen an sich besitzen keine Größe, sondern sie sind entweder gleich oder ungleich, und in dem letztern Falle entweder weiter oder enger. In wiefern aber jene bestimmte Entfernung, die zwischen zwey Puncten obwaltet, den Grund zur Möglichkeit einer geraden Linie zwischen denselben Puncten enthält, deren Länge von bestimmter Größe ist, legt man auch der Entfernung selbst eine Größe bey, die aber eben deshalb nur eine intensive ist, und durch dieselben Zahlen ausgedrückt werden muß, durch die man die Länge der geraden Linie ausdrückt. Daß aber die Entfernung keine extensive Größe sey, ersieht man daraus, weil sie aus keinen Theilen besteht; denn wohl läßt sich von der Linie zwischen a und b behaupten, daß sie aus den zwey Linien ac und cb, nicht aber von der Entfer- |
40 nung zwischen a und b, daß sie aus den zwey Entfernungen, ac und cb, zusammengesetzt sey.

§ 26.

Lehrsatz. Wenn die Richtungen ba und bc; cb und cd; dc und de; ed und ef; u. s. w. (Fig. 10) je zwey und zwey einander entgegengesetzt, und die Entfernungen $ab = bc = cd = de = ef$ u. s. w.; wenn endlich die Anzahl der Puncte $a, b, c, d, e, f, \ldots = n + 1$, oder die Anzahl der Linien $ab, bc, cd, de, ef, \ldots = n$ ist; so ist die Länge der Linie $af = nx$, wenn die der ab durch die Größe x ausgedrückt wird.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung, daß die Richtungen ba und bc; cb und cd u. s. w. je zwey und zwey einander entgegengesetzt sind, liegen die geraden Linien $ab, bc, \ldots$ jede ganz außerhalb der andern, alle aber in der Geraden af, deren integrirende Theile sie ausmachen. Daher ist zufolge der Erklärung des § 19.

$$\text{Länge } af = \text{Länge } ab + \text{Länge } bc + \ldots.$$

Weil aber die Entfernungen $ab = bc = \ldots$; so sind die Längen dieser sämmtlichen Linien nach § 23 einander gleich. Die Anzahl derselben ist aber n; mithin die Länge der $af = nx$, wenn die der $ab = x$ ist.

§ 27.

1. Zusatz. Wenn umgekehrt die Länge der geraden Linie $af = l$ gegeben ist, so kann man die Länge des Stückes ab finden, indem $x = \frac{l}{n}$.

§ 28.

2. Zusatz. Wenn die integrirenden Theile der Linie *ah* (Fig. 11) folgende sind:

1. m Linien $ab, bc, cd, \ldots$, welche an Länge der Linie $\alpha\beta = x$ gleichen;

2. dann ein Stück de, welches n Linien enthält, deren jede $\frac{1}{r}x$, d. h. deren r so lang sind als $\alpha\beta$ (§ 27); |

3. dann ein Stück ef, welches s Linien enthält, deren jede $= \frac{1}{t}x$; 41
u. s. w.;

so ist die Länge der ah, $l = \left(m + \frac{n}{r} + \frac{s}{t} + \ldots\right) x$.

§ 29.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen ersieht man auch, daß sich die Länge einer geraden Linie immer nur durch Vergleichung mit der Länge einer andern angeben lasse. Welche Linie man aber zum Maaßstabe dieser Vergleichung wählt, ist gleichgültig. Man kann z. B. jene gerade Linie wählen, deren Endpuncte die Entfernung E besitzen. Bezeichnet man nun die Länge dieser einen Linie durch 1; so lassen sich jetzt die Längen aller andern durch bestimmte Größen ausdrücken, doch immer nur mittelst Beziehung auf jene zur Einheit angenommene Länge.

§ 30.

Lehrsatz. Längen von Linien, welche einander ähnlich sind, verhalten sich wie die Längen anderer aus ihnen auf ähnliche Art bestimmter Linien.

Beweis. 1. In diesem Satze wird erstlich vorausgesetzt, daß es Linien, welche einander ähnlich sind, gebe; und zwar auch solche, die ihrer Größe nach verschieden sind. Diese Wahrheit wie überhaupt die ganze Lehre von der Möglichkeit ähnlicher Raumdinge, die geometrisch ungleich sind, beruhet auf den drey einfachen Sätzen, daß alle Puncte — alle Richtungen — und alle Entfernungen einander ähnlich sind. Diese drey Sätze nebst mehreren andern, deren Beweise mir noch im Jahre 1804, als ich die Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie herausgab, unbekannt waren, ergeben sich meiner jetzigen Einsicht nach sehr leicht aus einer richtigen Erklärung des Begriffs vom Raume; aus der Erklärung nähmlich, daß Raum die Möglichkeit der Orte; der Ort aber dasjenige Verhältniß unter den | Erscheinungs- 42 dingen sey, welches den Grund enthält, warum sie in diesem und jenem Zeitverhältnisse auf einander wirken. Ohne dies jetzo weiter entwickeln zu können, ist es genug, wenn man uns zugibt, daß die drey Sätze von der Ähnlichkeit aller Puncte, Richtungen und Entfernungen gewiß viel einfacher sind, als der von der Möglichkeit ähnlicher Linien, Flächen und Körper; denn schon hieraus wird folgen, daß jene bey dem Beweise von diesem mit Recht vorausgesetzt werden können. Bey ihrer Voraussetzung aber ist dieser Beweis sehr leicht. Denn es sey irgend eines von diesen Raumdingen z. B. eine Linie vorhanden; es sey uns auch irgend ein Punct A in demselben, und durch diesen drey auf einander senkrechte Richtungen, nebst irgend einer Entfernung E gegeben: so kann man, wenn anders das Raumding nicht unter die unbestimmbaren gehört, sämmtliche Puncte desselben, mithin das ganze Ding durch bloße Angabe seiner Verhältnisse zu den gegebenen fünf Stücken (also durch bloße Begriffe) bestimmen. Denkt man sich nun irgend einen andern Punct a, und durch ihn gleichfalls drey auf einander senkrechte Richtungen, nebst einer gewissen von der E verschiedenen Entfernung e: so wird es, weil alle Puncte, Richtungen und Entfernungen einander ähnlich sind, auch zu dem Puncte a, zu den drey Richtungen durch denselben und zur Entfernung e ein Raumding geben, das ganz dieselben Verhältnisse zu den genannten Stücken hat, wie sie das vorige zu den seinigen hatte. Diese zwey Raumdinge also werden einander zwar ähnlich, aber doch wegen der verschiedenen Entfernungen E und e geometrisch ungleich seyn.

2. Daß aber zweytens in ähnlichen Linien die Längen sich wie die Längen anderer aus ihnen auf ähnliche Art abgeleiteter Linien verhalten, ergibt sich aus dem Begriffe der Ähnlichkeit von selbst. Denn Linien, die aus andern ähnlichen auf eine ähnliche Art hergeleitet sind,
43 müssen nothwendig selbst ähnliche Dinge seyn (weil | ihre bestimmenden Stücke einander ähnlich sind). Also muß jedes innere Merkmahl des einen dieser Dinge auch in dem andern anzutreffen seyn. Unter diese inneren Merkmahle gehöret aber auch das Verhältniß, in welchem die Länge dieser Linien zur Länge derjenigen steht, von denen sie abgeleitet sind, indem sich Längen mit Längen allerdings vergleichen lassen. Mithin muß auch dieses Verhältniß beyderseits einerley seyn.

§ 31.

Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz liegt bey der Theorie der Rectification, welche hier vorgetragen wird, so nothwendig zum Grunde, daß es ein sehr wesentlicher Mangel wäre, wenn er nicht früher und ganz unabhängig von ihr erwiesen werden könnte. Gleichwohl setzt der

gewöhnliche Beweis desselben (durch Zerlegung der Linien in unendlich kleine Theile, die man dann als gerade ansieht) eine erst aus der Lehre von der Rectification erweisliche Wahrheit voraus. (Nähmlich, daß das Verhältniß der Länge eines Bogens zur Länge seiner Sehne dem Verhältnisse 1 : 1 so nahe komme, als man nur immer will, wenn man den Bogen selbst so klein nimmt, als man will.) Doch dieser gewöhnliche Beweis ist ohnehin zu verwerfen, und der Satz ist nicht anders darzuthun, als wie wir es eben gethan, wo er als eine leichte Folgerung aus dem Begriffe von der Ähnlichkeit erscheint. — Bey dieser Gelegenheit sey es mir aber erlaubt, zu erzählen, wie Einer der größten jetzt lebenden Geometer meine diesfälligen Ansichten auf eine recht auffallende Art bestätiget. Ich hatte nähmlich in den schon öfters erwähnten Betrachtungen u. s. w., also bereits im Jahre 1804, nebst mehreren neuen Ansichten auch die Lehre von der Ähnlichkeit auf eine mit der gegenwärtigen ganz übereinstimmende Weise vorgetragen, und unter andern Folgerungen auch eine eigne Theorie der Parallellinien aus ihr abgeleitet. Diese kleine Abhandlung wurde zwar in den gelehrten Zeitschriften nicht unvortheilhaft beurtheilt; und der | weiteren Prü- 44
fung des Publikums anempfohlen; konnte sich aber gleichwohl aus sehr begreiflichen Gründen keine allgemeine Aufmerksamkeit verschaffen, und gerieth allmählich ganz in Vergessenheit. Um so erfreulicher war es mir jetzt, zu finden, daß der berühmte französische Geometer Legendre, der sich bisher bekanntlich auf sehr verschiedene Art, und immer vergeblich bemüht hatte, eine vorwurfsfreye Theorie der Parallellinien aufzustellen, endlich in seiner zehnten Ausgabe der Élémens de Géométrie vom Jahre 1813, auf dieselben Ansichten gerathen ist, die ich neun Jahre früher aufgestellt hatte, und auch ganz ähnliche Folgerungen aus ihnen herleitet. (Man vergleiche seine Note II, p. 280—286, mit § 16 ff., besonders § 27 der ersten Abtheilung meiner Betrachtungen.) Gewiß ist dem französischen Gelehrten meine kleine Abhandlung nie zu Gesichte gekommen; um desto merkwürdiger ist dieses Zusammentreffen meiner Gedanken mit seinen, und unserer beiderseitigen mit jenen älteren von Leibnitz und Wolf. (Man sehe des Letzteren Elem. Arithm. § 27, seine Elem. Geom., seine Ontol. P. I, Sect. III, Cap. 1, § 201 ff.)[60]) Wenn mehrere Menschen, ohne der Eine vom Andern dazu veranlasset zu werden, auf einerley Ansicht gerathen; wird nicht schon hierdurch allein sehr wahrscheinlich, daß sie die richtige sey?

§ 32.

Aufgabe. Die Länge jeder bestimmbaren Linie zu finden, wenn die zu ihrer Bestimmung hinreichende Anzahl von Gleichungen zwischen rechtwinkeligen Coordinaten, ingleichen die Entfernung E, auf die sich der Ausdruck dieser Länge beziehen soll, gegeben ist.

Auflösung. 1. Wir wollen gleich den allgemeinsten Fall annehmen, und die Berechnung der Länge solcher Linien zeigen, welche, wie die § 17, N. 3 betrachtete, von gedoppelter Krümmung seyn können. Jeder wird dann die Methode, welche wir hier befolgen, von
45 selbst auf die weit einfacheren Fälle des N. 1 und 2 | anzuwenden wissen. Auch brauchen wir bloß zu zeigen, wie die Länge eines solchen Stücks der Linie, für dessen sämmtliche Puncte einerley Paar von Gleichungen $y = fx$ und $z = \bar{f}x$ gilt, zu berechnen sey. Denn kennt man die Längen nur aller solchen Stücke; so gibt ihre Summe nach § 19 die Länge der ganzen Linie.

2. Es gelte denn also für alle Werthe der Abscisse x, welche nicht außerhalb der Grenzen a und $a + b$ liegen, das Paar der Gleichungen $y = fx$ und $z = \bar{f}x$.

3. Um nun die Länge des für alle diese Werthe von x gehörigen Linienstückes zu finden, betrachten wir die Länge l eines veränderlichen Theiles desselben, und zwar desjenigen, der alle Puncte der Linie von der Abscisse $x = a$ bis zu einer gewissen in sich begreift, die wir nicht näher bestimmen, als daß sie noch innerhalb a und $a + b$ liegen soll, und die wir schlechtweg durch x bezeichnen.

4. Diese Länge ist offenbar eine gleichfalls veränderliche Größe; indem, wenn x z. B. um das Stück Δx (immer noch innerhalb der erwähnten Grenze) wächst, zur Linie ebenfalls ein gewisser Theil hinzukömmt; nähmlich derjenige, der alle Puncte von der Abscisse x bis zur Abscisse $x + \Delta x$ hin enthält. Außerdem aber hängt l vermöge der Erklärung des § 19 nur von der Beschaffenheit der krummen Linie selbst, und zwar nur von derjenigen Beschaffenheit derselben, welche ihr zwischen den Abscissen a und x liegender Theil besitzt, und von der Entfernung E ab. Da nun erwähnte Beschaffenheit der Linie durch die zwey Gleichungen $y = fx$ und $z = \bar{f}x$, und die Constanten E und a bestimmt wird; so kann man auch sagen, l sey eine Function von x, welche aus der Natur der Functionen fx und $\bar{f}x$, und den Constanten E und a bestimmbar seyn muß. Wir wollen dieselbe durch Fx bezeichnen.

5. Nimmt x um Δx zu; so ist der Zuwachs, den l oder Fx erfährt, nähmlich $F(x + \Delta x) - Fx$, eine Größe, die aus geometrischen Gründen,
46 nebst E von der Beschaf- | fenheit bloß desjenigen Stücks der Linie, das dem Abscissenstücke Δx zugehört, also bloß von den Werthen abhängig ist, welche die Coordinaten $y = f(x + \Delta x)$ und $z = \bar{f}(x + \Delta x)$ für alle

nicht außerhalb der Grenzen x und $x + \Delta x$ liegende Werthe der Abscisse annehmen; oder, was eben so viel ist, $F(x + \Delta x) - Fx$ hängt bloß von den Werthen ab, welche die Functionen $f(x + m\Delta x)$ und $\overline{f}(x + m\Delta x)$ geben, wenn man für m *jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1,* setzet. Noch mehr, wenn man durch Annahme einer neuen Abscissenlinie, die mit der vorigen parallel läuft, alle y und z um ein gleich großes Stück d und e verlängert oder verkürzet, während die x ungeändert bleiben: so darf sich auch in der Beschaffenheit der Function Fx, mithin auch der $F(x + \Delta x) - Fx$ nichts ändern, weil dann zu demselben x noch immer dasselbe Bogenstück gehöret. Hieraus ergibt sich, daß zur Bestimmung der Function $F(x + \Delta x) - Fx$ nicht einmahl die absolute Größe der Werthe nöthig sey, welche $f(x + m\Delta x)$ und $\overline{f}(x + m\Delta x)$ annehmen, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet; sondern daß hiezu die bloße Angabe des Werthes der Differenzen $f(x + m\Delta x) - d$, und $\overline{f}(x + m\Delta x) - e$ hinreiche. Sehen wir nun bey verschiedenen Werthen von Δx die Größe x und mithin auch y und z als beständig an: so ist es erlaubt, die willkürlichen Constanten d und e den Werthen fx und $\overline{f}x$ gleich zu setzen; woraus denn folgt, daß die Function $F(x + \Delta x) - Fx$ bloß durch die sämmtlichen Werthe bestimmt sey, welche die Functionen $f(x + m\Delta x) - fx$ und $\overline{f}(x + m\Delta x) - \overline{f}x$ annehmen, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzt. Denkt man sich endlich zwey oder mehrere Curven, in welchen der Abscissenzuwachs Δx zu jenem der Ordinaten $= f(x + \Delta x) - fx$ und $\overline{f}(x + \Delta x) - \overline{f}x$ in einem und eben demselben Verhältnisse steht, d. h. für welche der Quotient $\frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$ und der $\frac{\overline{f}(x + \Delta x) - \overline{f}x}{\Delta x}$ einerley Größe hat; denkt man sich ferner, daß auch die | sämmtlichen durch $\frac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ und $\frac{\overline{f}(x + m\Delta x) - \overline{f}x}{m\Delta x}$ vorstell- 47
baren Quotienten, m sey was immer für ein echter Bruch, in diesen Linien immer von gleicher Größe sind: so müssen die zu Δx gehörigen Bogenstücke einander ähnlich seyn; und es folgt aus § 30, daß auch die Längen dieser Bogenstücke $= F(x + \Delta x) - Fx$ zur Länge der ihnen ähnlich liegenden Linie Δx einerley Verhältniß haben, d. h. daß auch der Quotient $\frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ für alle diese Linien von gleicher Größe ist. Hieraus erfahren wir denn endlich, daß die Function $\frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ bloß durch die Werthe bestimmbar sey, welche die Functionen

$\frac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ und $\frac{\bar{f}(x + m\Delta x) - \bar{f}x}{m\Delta x}$ geben, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet. So lange nähmlich die letzteren Größen nur alle ungeändert bleiben; so lange bleibt (nach dem so eben Gezeigten) auch die Größe $\frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$ ungeändert, wie sich auch immer der absolute Werth von $\Delta x, fx, Fx$, u. s. w. ändern mag.

6. Nun mögen $\eta = \varphi x$ und $\zeta = \bar{\varphi} x$ die Gleichungen für was immer für eine andere Linie bedeuten, bey der die übrigen Größen a und E die nähmlichen sind. Ihre Länge sey $= \Phi x$. Es bezeichnen also Fx und Φx Dinge von einerley Art, Längen von Linien nähmlich, und da nach N. 4 Fx und Φx bey einerley a und E bloß aus der Natur der Functionen $fx, \bar{f}x$ und $\varphi x, \bar{\varphi} x$ bestimmbar seyn müssen: so gibt es ohne Zweifel auch irgend ein so allgemein lautendes Gesetz, daß nach demselben für alle Linien die Functionen Fx und Φx aus der Natur der $fx, \bar{f}x$ und $\varphi x, \bar{\varphi} x$ herleitbar sind. Nach N. 5 aber werden die Functionen $\frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x}$
48 und | $\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi x}{\Delta x}$ bloß durch die Werthe bestimmt, welche die Functionen $\frac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$, $\frac{\bar{f}(x + m\Delta x) - \bar{f}x}{m\Delta x}$ und $\frac{\varphi(x + m\Delta x) - \varphi x}{m\Delta x}$, $\frac{\bar{\varphi}(x + m\Delta x) - \bar{\varphi} x}{m\Delta x}$ annehmen, wenn man für m jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet: also erfolgt auch diese Bestimmung nach irgend einem für alle Linien gleichlautenden Gesetze. Denn diese jetzt genannten Functionen sind aus den vorigen (nähmlich die ersteren aus Fx, Φx; die letzteren aus $fx, \varphi x; \bar{f}x, \bar{\varphi} x$) selbst nach einem beyderseits gleichlautenden Gesetze abgeleitet.

7. Da nun, wie aus § 17 erhellet, die Functionen fx und $\bar{f}x$, φx und $\bar{\varphi} x$ stetig seyn müssen: so nähern sich die Werthe $\frac{f(x + m\Delta x) - fx}{m\Delta x}$ und $\frac{\bar{f}(x + m\Delta x) - \bar{f}x}{m\Delta x}$ den Werthen $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{f}x}{\mathrm{d}x}$; und die Werthe $\frac{\varphi(x + m\Delta x) - \varphi x}{m\Delta x}$ und $\frac{\bar{\varphi}(x + m\Delta x) - \bar{\varphi} x}{m\Delta x}$ den Werthen $\frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi} x}{\mathrm{d}x}$ so sehr, als man nur immer will, wenn man Δx klein genug nimmt. Da endlich wenigstens für gewisse Linien z. B. für die gerade die Function Φx gleichfalls stetig ist, und also $\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi x}{\Delta x}$ dem Werthe $\frac{\mathrm{d}\Phi x}{\mathrm{d}x}$ so nahe kömmt, als man nur immer will: so folgt, daß eben dies auch bey der Function

Fx der Fall seyn müsse; und es sind also jetzt alle Bedingungen des § 9 vorhanden; so daß, wenn man für irgend ein x die Gleichungen $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{f}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}x}{\mathrm{d}x}$ hat, die Functionen $\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\Phi x}{\mathrm{d}x}$ beyde auf gleiche Art, wie jene aus den Werthen $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{f}x}{\mathrm{d}x}$, so diese aus den Werthen $\frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}x}{\mathrm{d}x}$ zusammen gesetzt seyn müssen. |

8. Es mögen nunmehr φx und $\bar{\varphi}x$ die Gleichungen für eine gerade Linie bedeuten, und also von der Form $\alpha + \beta x$ und $\gamma + \delta x$ seyn. Bey einer solchen Linie ist uns auch Φx bekannt, und zwar $= \sqrt{(1+\beta^2+\delta^2)} \cdot$ 49
$\cdot (x-a)$. Es ist daher $\frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x} = \beta$, $\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}x}{\mathrm{d}x} = \delta$ und $\frac{\mathrm{d}\Phi x}{\mathrm{d}x} = \sqrt{(1+\beta^2+\delta^2)} =$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}x}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

9. Hieraus erhellet deutlich die Art, wie auch $\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x}$ aus $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}\bar{f}x}{\mathrm{d}x}$ zusammengesetzt seyn müsse. Nähmlich es muß $\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{f}x}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ seyn, woraus nach den bekannten Regeln der Intergalrechnung die Function Fx selbst gefunden werden kann; wenn man nur die Constanten, die etwa beyzusetzen sind, mit Rücksicht auf die Bedingungen des N. 3 bestimmt.

§ 33.

Anmerkung. Man sieht, daß diese Auflösung auf keine andere Voraussetzungen gegründet ist, als:

1. Daß die Länge jedes Stückes einer Linie von der Beschaffenheit bloß dieses einen Stückes, und von der gegebenen Entfernung E, mit der man die Linie mißt, keineswegs aber von der Beschaffenheit der angrenzenden Theile abhange.

2. Daß es auch irgend ein für alle Linien gleichlautendes Gesetz geben müsse, nach dem man ihre Längen aus der Beschaffenheit derjenigen Functionen, die ihre Natur bestimmen, herleiten kann.

3. Daß dieses Gesetz gewiß von der Art sey, daß wenn die Länge gewissen Stückes nach ihm $= l$, die eines andern $= \lambda$ gefunden ist, die Länge des Ganzen $= l + \lambda$ gefunden werden müsse.

4. Daß sich die Längen ähnlicher Linien wie die Längen anderer aus ihnen auf ähnliche Art bestimmter Linien verhalten; daß endlich. |

50 5. Die Methode des § 9 ihre Richtigkeit habe.

Die drey ersten Voraussetzungen sind viel zu einleuchtend, als daß sie irgend Jemanden anstößig werden könnten. Auch die vierte Voraussetzung aber wird Jeder, der den Inhalt der §§ 30 und 31 reiflich erwogen hat, zugeben. Alles kömmt also nur noch auf die Methode des § 9 an. Wer sich daher von der Richtigkeit dieser gehörig überzeigt hat, wird hoffentlich auch der eben vorgetragenen Theorie der Rectification seinen Beyfall nicht versagen.

§ 34.

2. Anmerkung. Wenn man durch den Punct m der Linie, der zur Abcisse x gehört, eine (geradlinige) Tangente zu ihr zieht; so finden zu Folge der Lehre von den Berührungslinien für diese gerade Linie die beyden Gleichungen Statt $\eta = m + \frac{dy}{dx}\xi$, und $\zeta = n + \frac{dz}{dx}\xi$; wo ξ, η, ζ ihre drey Coordinaten aus demselben Anfangspuncte, und in denselben Richtungen mit x, y, z; $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zwey für einen bestimmten Werth von x beständige Coefficienten; und eben so auch m, n gewisse Constante Größen sind; nähmlich $m = y - \frac{dy}{dx}.x$, und $n = z - \frac{dz}{dx}.x$. Vergleichen wir diese Ausdrücke mit jenen des § 32, N. 8, $\eta = \alpha + \beta x$, $\zeta = \gamma + \delta x$; wo $\beta = \frac{dy}{dx}$, $\delta = \frac{dz}{dx}$ gefunden ward: so entdecken wir, daß die gerade Linie, deren Länge uns zur Berechnung der Länge jeglicher andern verholfen, mit der Tangente durch m gleichlautend sey, wenn sie auf eben denselben Coordinaten angenommen wird; ja, daß sie, wenn man α und γ darnach gehörig bestimmt (und die Bestimmung dieser ist willkürlich) durch den Punct m selbst durchgehe, und also mit dieser
51 Tangente dann einerley sey. In diesem Umstande scheint die | wahre Ursache zu liegen, weshalb man sich der Tangente und des sogenannten characteristischen Dreyecks bey Berechnung der krummen Linien mit so gutem Glücke hat bedienen können. Aus den zwey Gleichungen für die Tangente $\eta = m + \frac{dy}{dx}\xi$ und $\zeta = n + \frac{dz}{dx}\xi$ folgt nähmlich, daß sie der krummen Linie in den zunächst um m gelegenen Puncten näher als jede andere durch m gedenkbare gerade Linie komme, und hieraus schloß man, daß auch die Länge derselben der Länge der krummen für diese kleinsten Werthe von Δx näher als jede andere gerade Linie komme. Da nun der Zuwachs der Länge, den die Tangente

für $\xi + \Delta x$ hat, $= \Delta x \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, der Zuwachs der Länge an der krummen Linie aber nach der Taylorschen Formel $F(x + \Delta x) - - Fx = \Delta x \,.\, \frac{dFx}{dx} + \ldots$ ist, so schloß man, es müsse $\frac{dFx}{dx} = \left[1 + + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ seyn. Der Schlußsatz war richtig; aber den eigentlichen Grund, auf dem er beruht, gibt erst § 32 an. Denn bloß daraus, daß eine gewisse Linie einer gegebenen in allen ihren Puncten näher als eine andere kommt, folgt keineswegs, daß auch ihre Länge der Länge der gegebenen näher, als die der letztern komme.[61])

§ 35.

Erklärungen. 1. Ein Raumding, zu dessen jedem Puncte es, anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, wenigstens eine, und höchstens nur eine endliche Menge getrennter Linien voll Puncte gibt, heißt eine Fläche überhaupt (Fig. 13—19).

2. Ein Raumding, dessen jeder Theil, der sich nach eben gegebener Erklärung als Fläche ansehen läßt, mit dem noch übrigen Theile, der sich dann gleichfalls als Fläche muß ansehen lassen, wenigstens eine
Linie gemein | hat, heißt eine einzige durchaus zusammenhangende 52
Fläche (Fig. 14—19).

3. Ein Raumding, dessen jeder Punct, anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, nur eine einfache Linie voll Puncte neben sich hat, heißt eine einfache Fläche (Fig. 16, 18 und 19).

4. Ein Raumding, dessen jeder Punct, anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren herab, ganze in sich zurückkehrende Linien zu Nachbarn hat, und dabey keine Puncte, deren Entfernung von andern größer als eine gegebene ist, heißt eine in sich zurückkehrende oder geschlossene Fläche (Fig. 15 und 16).

5. Sind diese Linien einfach, so ist es eine einfache geschlossene Fläche (Fig. 16).

6. Eine Fläche dagegen, in der es Puncte gibt, die anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, nur begrenzte Linien zu ihren Nachbarn haben, heißt eine begrenzte Fläche (Fig. 17—19).

7. Jene Puncte selbst heißen der Fläche Grenzpuncte (z. B. *e*, *e*, ...). Die andern innere Puncte (z. B. *m*, *m*, ...).

8. Wenn diese letztern jeder von einer gewissen Entfernung an nur eine einfache Linie als Nachbarinn haben, so ist es eine einfache begrenzte Fläche (Fig. 18 und 19).

§ 36.

Anmerkung. Wer die Erklärungen des § 11 gefaßt hat, dürfte auch in den gegenwärtigen kaum eine Schwierigkeit finden. Auch in der Fläche nähmlich gibt es zu jedem ihrer Puncte, z. B. m (Fig. 13) keinen *nächsten*. Betrachtet man aber die sämmtlichen Puncte, die eine gegebene Entfernung z. B. mr von m haben; so findet sich ihrer eine unendliche Menge, so zwar, daß sie zusammengenommen eine, ja auch wohl etliche ganze *Linien* bilden z. B. rr', $r''r'''$, $r^{IV}r^{V}$, ... Zwar kann
53 in | manchen Flächen (z. B. in einer durch eine Ebene geschlossenen halben Kugelfläche) bey gewissen Puncten derselben (hier bey dem Mittelpuncte) für eine gewisse Entfernung (für die des Halbmessers) auch eine ganze *Fläche* von Puncten vorhanden seyn. Aber da läßt sich doch allemahl eine kleinere Entfernung annehmen, von der es gilt, daß anzufangen von dieser, und für alle kleineren abwärts nur eine oder etliche getrennte Linien als Nachbarinnen da stehen. Die übrigen Erklärungen dieses § mögen die beygefügten Figuren erläutern. Fig. 13 ist eine aus zwey gar nicht zusammenhangenden Stücken bestehende Fläche. Bey Fig. 14 kann man sich unter A und B ein Paar Ebenen, unter C und D ein Paar Cylinder vorstellen; die Linien mn, $m'n'$, $m''n''$ sind dann dasjenige, was diese verschiedenen Flächen zu einer einzigen vereinigt. Fig. 15 stellt die drey Oberflächen eines Cylindres, Kegels und einer Kugel vor. U. s. w.[62])

§ 37.

Erklärung. *Die Ebene der Puncte* a, b, c heißt das Raumding, welches alle und sonst keine andere Puncte enthält, als die sich durch ihr *Verhältniß* (d. h. durch ihre Entfernungen) zu den in keiner geraden Linie liegenden drey Puncten a, b, c bestimmen lassen.

§ 38.

Lehrsatz. Die Ebene ist eine Fläche.

Beweis. Es ist leicht darzuthun, daß jeder Punct des § 37 beschriebenen Raumdings für jede Entfernung eine ganze Linie von Puncten (eine Kreislinie nähmlich) zu Nachbaren habe (§ 35).

§ 39.

Erklärung. Es heißt, *ein Punct werde von einer Linie auf einer Fläche eingeschlossen*, wenn er in dieser so liegt, daß es nicht möglich ist, sich zwischen ihm und einem zweyten Puncte, dessen Ent-
54 fernung von ihm so groß sey, als man will, eine zusammenhan- | gende Linie zu denken, die ihrem ganzen Laufe nach in der gegebenen oder

auch einer andern Fläche, von welcher jene ein Theil ist, verbleibt, ohne mit der gegebenen Linie nur einen einzigen Punct gemein zu haben (Fig. 19).

§ 40.

Anmerkung. Es läßt sich darthun, daß nur eine in sich zurückkehrende Linie einen Punct auf einer Fläche einschließen könne; ingleichen, daß ein Punct i dann eingeschlossen sey, wenn — mit einer höchstens nur endlichen Menge von Ausnahmen — jede durch ihn gelegte Ebene mit der Fläche, in welcher beyde liegen, eine Durchschnittslinie von der Art gibt, daß in den beyden Stücken, in die sie durch i zerfällt, eine ungerade Anzahl von Durchschnittspuncten derselben mit der gegebenen Linie vorhanden sind. Wenn im Gegentheil diese Anzahl gerade oder Null ist, wie bei dem Puncte a; so ist er nicht eingeschlossen, sondern liegt außerhalb.

§ 41.

Erklärung. Unter der Flächenfigur *nrstn* (Fig. 19) verstehen wir das Raumding, das nebst der in sich zurückkehrenden einfachen Linie *nrstn*, noch alle diejenigen Puncte enthält, die von derselben, indem man sie liegend in einer gewissen Fläche denkt, eingeschlossen werden. Die einschließende Linie *nrstn* nennt man die Grenze dieser Flächenfigur.

§ 42.

Anmerkung. Es läßt sich beweisen, daß das § 41 beschriebene Raumding eine Fläche sey; ingleichen, daß alle Puncte dieser Fläche, und folglich auch sie selbst bestimmt sey, sobald nur die Fläche, in welcher die einschließende Linie liegt, und diese selbst gegeben sind.

§ 43.

Aufgabe. Die zweckmäßigste Weise anzugeben, wie jede bestimmbare Fläche aus einer hinreichenden Zahl gegebener Puncte bestimmt werden könne. |

Auflösung. Betrachtungen, welche denjenigen, die wir § 17 angestellt, in Allem ähnlich sind, zeigen, daß hier auf eine von den drey 55
Coordinaten x, y, z unendlich viele Werthe von den zwey andern, oder doch wenigstens von einer kommen müssen. Denn im entgegengesetzten Falle würde es nicht zu jedem Puncte m (Fig. 13) eine ganze Linie voll Nachbarn geben, wie die Erklärung des § 35 verlangt; weil hiezu nöthig ist, daß in der Gleichung $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} \stackrel{\prime}{=} u$ für einerley u unendlich viele Werthe, wenn nicht von allen, so doch von zweyen der drey

Größen Δx, Δy, Δz möglich seyen. Hier können sich also höchstens zwey Fälle ereignen: es gibt entweder a) für Ein x unendlich viele y, und für Ein y unendlich viele z; oder es gibt b) für Ein x unendlich viele y, aber für Ein y nur ein, oder nur eine endliche Menge z. Daß diese beyden Fälle möglich sind, zeigt uns das Beyspiel der ebenen Fläche; bey welcher der erste Fall eintritt, wenn sie senkrecht auf der Axe der x aufsteht; der zweyte aber, wenn sie die Axe der x, y, z schief durchschneidet.

1. Im ersten Falle läßt sich auf ähnliche Art wie § 17 N. 1 zeigen, daß die Menge der x nur eine endliche seyn dürfe. Dieses vorausgesetzt erhellet, daß es für einerley y nicht nur gewisse, sondern alle zwischen bestimmten Grenzen enthaltene Werthe von z geben müsse. Stellt man sich nähmlich vor, daß der Punct m ein innerer sey (§ 35), so muß er für alle unterhalb einer gewissen Grenze e liegende Werthe von u ganze in sich zurückkehrende Linien zu Nachbarn haben; und nun ist aus dem Satze des § 40 erweislich, daß dieses unmöglich sey, wenn es nicht auch in der Richtung der Ordinaten z Puncte von dieser Linie gibt. Dieser Puncte Entfernung von m ist aber jedesmahl $= \Delta z$, daher muß $\Delta z = u$ aller unterhalb e liegender Werthe empfänglich seyn. Es hat also für jedes y die Ordinate z nicht nur unendlich viele, sondern alle zwischen gewissen Grenzen enthaltene Werthe. Begreiflicher Weise aber müssen, wofern die Fläche bestimmt seyn soll, erwähnte Grenzen
56 nicht | nur von endlicher Menge, sondern auch gegeben seyn. Wir wollen diese zu jedem y gehörigen Grenzwerthe von z durch z' bezeichnen; so gibt es zu jedem y unendlich viele z', und es erhellet, wie im § 17 N. 2, daß zur Bestimmung derselben eine oder etliche Gleichungen von der Form $z' = \psi y$ gegeben, und zugleich angezeigt seyn muß, innerhalb welcher Werthe von y die eine oder andere derselben gelte. Die Gleichung $z' = \psi y$ muß, wie sich von selbst versteht, eine gerade Anzahl von Werthen für z' geben, und wenn man dieselben vom größten positiven an bis zum größten negativen (oder umgekehrt) ordnet, so sind der erste und zweyte, der dritte und vierte, überhaupt der $(2n + 1)$te und $(2n + 2)$te je zwey zusammengehörige Grenzen, innerhalb deren Werthe von z genommen werden sollen, dagegen innerhalb des zweyten und dritten, vierten und fünften, überhaupt des $2n$ten und $(2n + 1)$ten soll es kein z geben. Übrigens ist die Fläche, die man in diesem ersten Falle vor sich hat, eine bloß ebene Fläche; und ihre Gleichungen von der Form $z' = \psi y$ sind zugleich die Gleichungen für ihre Grenzlinien.

2. Im zweyten Falle soll es für jedes x unendlich viele y, für jedes y aber nur ein oder etliche z geben. Hier läßt sich zuerst auf ähnliche Art wie § 17 N. 1 darthun, daß sowohl x als y nicht nur unendlich viele,

sondern alle zwischen bestimmten Grenzen enthaltene Werthe besitzen müssen; und zwar so, daß für jeden Werth der einen z. B. x die unendlich vielen Werthe der andern y innerhalb gewisser gegebener Grenzen enthalten seyn müssen, wenn die Fläche eine bestimmbare seyn soll. Bezeichnen wir diese zu jedem x gehörigen Grenzwerthe der y durch y'; so müssen eine oder etliche Gleichungen von der Form $y' = \psi x$ gegeben, und zugleich angezeigt seyn, für welche Werthe von x jede derselben gelte. Hierauf, weil es für jedes bestimmte x und y nur ein oder etliche z gibt; so müssen noch eine oder etliche Gleichungen von der Form $z = f(x, y)$ gegeben, und zugleich an- | gezeigt seyn, innerhalb 57
welcher Werthe von x und y jede derselben anwendbar sey.

§ 44.

Anmerkung. Insgemein heißt es bloß, jede Fläche lasse sich durch eine Gleichung von der Form $z = f(x, y)$ bestimmen. Aus dem so eben Gezeigten ersieht man aber, daß dieses noch unrichtiger gesagt sey, als der Ausdruck, den wir § 18 rügten. Versuche man nur die Fläche z. B. irgend eines Dreyeckes zu bestimmen, daß eine schiefe Lage gegen die drey Axen hat: so wird man die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Methode, und die Nothwendigkeit unserer Zusätze zu derselben, besonders der Gleichung $y' = \psi x$, erkennen.

§ 45.

Erklärung. Der Inhalt einer Fläche heißt eine Größe, die aus der Natur der Fläche mittelst Beziehung derselben auf eine gegebene Entfernung E nach einem solchen Gesetze herleitbar ist, daß wenn dieselbe für ein gewisses Stück der Fläche durch s und für ein anderes durch σ ausgedrückt wird, sie für das Stück, das beyde zusammen enthält, durch $s + \sigma$ ausgedrückt werde.

§ 46.

Lehrsatz. Flächen, die geometrisch gleich sind, sind auch von gleichem Inhalte.

Beweis. Dieser dem § 21 ganz ähnliche Satz wird auch auf gleiche Art bewiesen.

§ 47.

Lehrsatz. Wenn der Flächeninhalt eines Parallelogrammes, dessen Seiten die Längen a und b haben, durch die Größe N ausgedrückt wird; so muß der Flächeninhalt eines andern, das bey denselben Winkeln die Seitenlängen x und y hat, durch die Größe $N\frac{xy}{ab}$ ausgedrückt werden.

Beweis. Die Größe X, durch welche der Flächeninhalt des zweyten
58 Parallelogramms ausgedrückt werden | soll, muß sich verdoppeln, wenn eine der beyden Größen x oder y sich verdoppelt; indem leicht erweislich ist, daß sich die Fläche eines Parallelogramms, dessen eine Seite $= 2x$, die andere $= y$ ist, als ein Ganzes betrachten lasse, dessen integrirende Theile zwey Parallelogramme sind, die bey denselben Winkeln die Seiten x und y haben. Diese sind aber geometrisch gleich, also nach § 46 auch gleichen Inhaltes; mithin ist nach der Erklärung des § 45 der Inhalt des Ganzen $= X + X = 2X$. Hieraus folgt nun, daß sich die Flächeninhalte gleichwinkeliger Parallelogramme, in denen nur eine Seite x sich ändert, wie dieser Seite Längen verhalten. Denn da in diesem Falle der jedesmahlige Flächeninhalt bloß von der Länge dieser Seite abhängt; so kann man sagen, derselbe sey eine Function von x; und dies zwar eine solche, daß $2Fx = F2x$ ist. Da lehrt aber die Analysis, daß eine solche Function nur von der Form Ax seyn könne. Wenn sich nun beyde Seiten des Parallelogrammes ändern, so muß sein Inhalt eine homogene Function von x und y seyn; also von der Form $C \cdot x \cdot y$. Wenn aber $x = a$ und $y = b$, so muß $Cxy = N$ seyn. Mithin ist $C = \frac{N}{ab}$. Also der gesuchte Inhalt $= N\frac{xy}{ab}$.

§ 48.

Anmerkung. Aus diesem Wenigen wird man ersehen, wie beyläufig auch wir bey unsern Begriffen zu eben denselben Resultaten gelangen, die man nach der gewöhnlichen Ansicht erhält; insonderheit, wie wir bis zu dem Lehrsatze kommen, daß der Inhalt eines Dreyeckes, dessen drey Seiten x, y, z sind, $= \sqrt{\frac{(x+y+z)\,(x+y-z)\,(x+z-y)\,(y+z-x)}{4}}$ sey. Auf diesen nun werden wir uns in der Folge berufen.

§ 49.

59 **Lehrsatz.** Inhalte von Flächen, welche einander ähn- | lich sind, verhalten sich eben so, wie die Inhalte anderer aus ihnen auf ähnliche Art abgeleiteter Flächen.

Beweis. Dieser mit § 30 ganz übereinstimmende Satz wird auch auf gleiche Art bewiesen.

§ 50.

Aufgabe. Den Inhalt jeder bestimmbaren Fläche zu finden, wenn die zu ihrer Bestimmung hinreichende Zahl von Gleichungen zwischen rechtwinkeligen Coordinaten, sammt der Entfernung E, auf welche der Inhalt sich beziehen soll, gegeben ist.

Auflösung. 1. Es wird genügen, die Berechnung des Inhaltes solcher Flächen zu zeigen, wie die § 43 N. 2 betrachteten sind: indem es ein Leichtes ist, die hier Statt findende Methode auf den noch einfacheren Fall des N. 1 anzuwenden, der nur die ebenen Flächen enthält. Auch brauchen wir bloß zu zeigen, wie der Inhalt eines solchen Flächenstückes zu berechnen sey, für welches einerley Gleichung $z = f(x, y)$, und zur Bestimmung der zu jedem x gehörigen Grenzwerthe von y einerley Hülfsgleichung $y' = \varphi x$ gilt. Denn weiß man den Inhalt eines jeden dergleichen Stückes für sich; so gibt die Summe aller nach der Erklärung des § 45 den Inhalt der ganzen Fläche.

2. Es gelte demnach für alle Werthe der x, welche nicht außerhalb der Grenzen a und $a + b$; und für alle y, welche nicht außerhalb der durch die Gleichung $y' = \varphi x$ bestimmten Grenzwerthe liegen, die Gleichung $z = f(x, y)$.

3. Um nun den Inhalt des zu allen diesen Werthen der x, y, z gehörigen Flächenstückes zu finden; betrachten wir erstlich den Inhalt s eines veränderlichen Theiles, und zwar desjenigen, den man erhält, wenn man für x und y folgende Werthe annimmt: a) für x alle von a bis zu einem, den wir nicht näher bestimmen, als daß er noch $< a + b$ ist, und den wir schlechtweg x nennen; b) für jedes dieser x noch alle y, die α) größer sind, als der kleinere von je zwey zusammengehörigen Grenzwerthen, welche die Gleichung $y' = \varphi x$ angibt, und β) kleiner als ein gewisser Werth, den wir schlechtweg y nennen, und nur dahin bestimmen, daß er noch | kleiner seyn soll, als der zum letzten x gehörige 60
größere Grenzwerth, den die Gleichung $y' = \varphi x$ angibt.

4. Dieser Inhalt s ist offenbar eine gleichfalls veränderliche Größe, indem, wenn x z. B. um Δx, und y um Δy wächst, zu jenem Flächenstücke gleichfalls ein gewisser Theil hinzukömmt; nähmlich derjenige, der alle Puncte von der Abscisse x bis $x + \Delta x$, und von der y bis $y + \Delta y$ enthält. Es hängt daher s von x und y, sodann von der Beschaffenheit der Fläche selbst in diesen Gegenden, also von den Gleichungen $z = f(x, y)$, $y' = \varphi x$, und der constanten Größe a, imgleichen von der Entfernung E ab. Wir können also sagen, s sey eine Function von x und y, welche aus der Natur der Functionen φx und $f(x, y)$, und aus den Constanten a und E bestimmbar seyn muß. Wir wollen sie durch $F(x, y)$ bezeichnen.

5. Nimmt die Abscisse $x = ap$ (Fig. 12) um $\Delta x = p\pi$, und die Abscisse $y = aq$ um $\Delta y = qk$ zu; so ist der sämmtliche Zuwachs, welchen

die Fläche erfährt, $= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$, ein Flächenstück, das aus drey Theilen besteht, welche sich so unterscheiden, daß die Puncte des einen alle über dem Rechtecke πr, jene des andern über dem $r\varrho$, jene des dritten endlich über dem Rechtecke rk in senkrechter Richtung stehen. Das mittlere Stück, nähmlich dasjenige, welches über $r\varrho$ steht, enthält bloß jene Puncte, die zu den Abscissen von x bis $x + \Delta x$, und von y bis $y + \Delta y$ gehören; woraus sich ergibt, daß auch sein Inhalt, den wir durch P bezeichnen wollen, bloß von denjenigen Werthen abhange, welche die Function $z = f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ annimmt, wenn man für m, n in ihr jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet. Wenn man ferner durch Annahme eines neuen Coordinatensystems, dessen Axen x und y den vorigen parallel sind, sämmtliche z um eine gleiche Größe d vermindert, während x und y ungeändert bleiben: so darf sich begreiflicher Weise an der Function $F(x, y)$, mithin auch an der Größe P nichts ändern. Hieraus folgt, wie im § 32 N. 5, daß P eigentlich
61 bloß von den Werthen | abhange, welche $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - d$, oder, wenn man $d = f(x, y)$ setzt, welche die Größe $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)$ annimmt, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet. Denkt man sich endlich zwey oder mehrere Flächen von der Beschaffenheit, daß der Quotient $\frac{f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)}{m\Delta y}$ so wohl, als auch der $\frac{f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)}{n\Delta y}$ bey einerley m und n immer von gleicher Größe ist, wie verschieden auch die absolute Größe von Δx, Δy u. s. w. in diesen Flächen sey: so ist es bekannt, daß diese Flächen einander ähnlich sind, und also folgt aus § 49, daß auch der Inhalt dieser Flächen $= P$ zu dem Inhalte einer aus ihnen auf ähnliche Art bestimmten Fläche, etwa der $r\varrho = \Delta x \,.\, \Delta y$, ein überall gleiches Verhältniß habe, d. h. daß $\frac{P}{\Delta x \,.\, \Delta y}$ in allen diesen Flächen von gleicher Größe sey. Dies lehret uns nun, daß die Function $\frac{P}{\Delta x \,.\, \Delta y}$ bloß von den Werthen abhange, welche die beyden Functionen $\frac{f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)}{m\Delta x}$ und $\frac{f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)}{n\Delta y}$ annehmen, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch nebst 0 und 1 setzet.

6. Nun mag $\zeta = \varphi(x, y)$ die Gleichung für eine andere Fläche bedeuten, bey welcher übrigens die Hülfsgleichung $y' = \psi x$, wie auch die Größen a und E die nähmlichen sind. Ihr Inhalt sey $= \Phi(x, y)$; die Größe aber, welche aus $\Phi(x, y)$ auf eben die Art abgeleitet ist, wie P aus $F(x, y)$, soll durch Π dargestellt seyn. Es bezeichnen also $F(x, y)$ und

$\Phi(x, y)$ Dinge von einerley Art, Inhalte nähmlich von Flächen; und da nach N. 4 $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ bey einerley ψx, a und E, bloß aus der Natur der Functionen $f(x, y)$ und | $\varphi(x, y)$ bestimmbar seyn müssen: so gibt es 62
sicher auch irgend ein so allgemein lautendes Gesetz, daß sich nach ihm für eine jede Art von Flächen die Functionen $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ aus den Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ herleiten lassen. Aber nach N. 5 werden die Größen $\frac{P}{\Delta x \Delta y}$, $\frac{\Pi}{\Delta x \Delta y}$ bloß durch die Werthe bestimmt, welche $\frac{f(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-f(x, y)}{m\Delta x}$, $\frac{f(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-f(x, y)}{n\Delta y}$ und $\frac{\varphi(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-\varphi(x, y)}{m\Delta x}$, $\frac{\varphi(x+\Delta mx, y+n\Delta y)-\varphi(x, y)}{n\Delta y}$ annehmen, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch, sammt 0 und 1, setzet: also erfolgt auch diese Bestimmung nach irgend einem für alle Flächen gleichlautenden Gesetze. Denn diese jetzt genannten Größen sind aus den vorigen, nähmlich aus $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$; $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ selbst nach einem beyderseits gleichlautenden Gesetze abgeleitet.

7. Aus § 43 kann man schließen, daß die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ stetig seyn müssen; und folglich nähern sich die Werthe $\frac{f(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-f(x, y)}{m\Delta x}$ und | $\frac{f(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-f(x, y)}{n\Delta y}$ den 63
Werthen $\frac{d^x f(x, y)}{dx} + \frac{n\Delta y}{m\Delta x} \cdot \frac{d^y f(x, y)}{dy}$ und $\frac{d^y f(x, y)}{dy} + \frac{m\Delta x}{n\Delta y} \cdot \frac{d^x f(x, y)}{dx}$; die Werthe $\frac{\varphi(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-\varphi(x, y)}{m\Delta x}$ und $\frac{\varphi(x+m\Delta x, y+n\Delta y)-\varphi(x, y)}{n\Delta y}$ aber den Werthen $\frac{d^x\varphi(x, y)}{dx} + \frac{n\Delta y}{m\Delta x} \cdot \frac{d^y\varphi(x, y)}{dy}$ und $\frac{d^y\varphi(x, y)}{dy} + \frac{m\Delta x}{n\Delta y} \cdot \frac{d^x\varphi(x, y)}{dx}$ so sehr, als man nur immer will, wenn man die Größen Δx, Δy klein genug nimmt. Endlich ist wenigstens für gewisse Flächen, z. B. für ebene, die Function $\Phi(x, y)$ gleichfalls stetig; und also nach Taylors bekanntem Lehrsatze:

$$\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x, y) = \Delta x \frac{d^x\Phi(x, y)}{dx} + \Delta y \frac{d^y\Phi(x, y)}{dy} + \\ + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^{xx}\Phi(x, y)}{dx^2} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{d^{yy}\Phi(x, y)}{dy^2} + \Delta x \Delta y \frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx\,dy} + \ldots$$

Dieses ist nach der Bemerkung des N. 5 der Inhalt des dreytheiligen Flächenstücks, das über den Rechtecken πr, $r\varrho$, rk steht. Von diesem Flächenstücke bleibt, wenn man $\Delta y = 0$ setzt, bloß der über πr stehende Theil übrig. In der so eben gegebenen Formel aber bleiben für $\Delta y = 0$ bloß diejenigen Glieder stehen, welche keine Δy enthalten; also sind es nur

diese, nähmlich $\Delta x \frac{d^x\Phi(x, y)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^{xx}\Phi(x, y)}{dx^2} + \ldots$, welche den Inhalt des über πr stehenden Flächenstücks geben. Auf eine gleiche Art läßt sich beweisen, daß es nur die kein Δx enthaltenden Glieder: $\Delta y \frac{d^y\Phi(x, y)}{dy} + \frac{\Delta y^2}{2} \cdot \frac{d^{yy}\Phi(x, y)}{dy^2} + \ldots$ sind, welche den Inhalt des über rk stehenden Stückes ausdrücken. Hieraus folgt von selbst, daß die noch übrigen Glieder, nähmlich diejenigen, welche in Δx und Δy zugleich multipliciret sind, den Inhalt des über $r\varrho$ stehenden Stückes geben, daß mithin
64 $\Pi = \Delta x \, \Delta y \left[\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy} + \ldots\right]$ und also | $\frac{\Pi}{\Delta x \, \Delta y} = \frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy} + \ldots$ sey. Also ist $\frac{\Pi}{\Delta x \, \Delta y}$ eine Function, die sich dem Werthe $\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy}$ so sehr, als man nur immer will, nähert, wenn man $\Delta x, \Delta y$ klein genug nimmt. Es folgt, daß eben dieses Verhältniß auch zwischen den Functionen $\frac{P}{\Delta x \, \Delta y}$ und $\frac{d^{xy}F(x, y)}{dx \, dy}$ Statt finden müsse; daher nun alle Bedingungen zur Anwendung des § 9 vorhanden sind. Hat man folglich für irgend ein x und y die Gleichungen $\frac{d^x f(x, y)}{dx} = \frac{d^x\varphi(x, y)}{dx}$ und $\frac{d^y f(x, y)}{dy} = \frac{d^y\varphi(x, y)}{dy}$; so sind die bestimmenden Stücke der Functionen $\frac{d^{xy}F(x, y)}{dx \, dy}$ und $\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy}$, in welche $\frac{P}{\Delta x \, \Delta y}$ und $\frac{\Pi}{\Delta x \, \Delta y}$ für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ übergehen, nähmlich die Größen $\frac{d^x f(x, y)}{dx} + \frac{n\Delta y}{m\Delta x} \frac{d^y f(x, y)}{dy}$ und $\frac{d^x\varphi(x, y)}{dx} + \frac{n\Delta y}{m\Delta x} \frac{d^y\varphi(x, y)}{dy}$; $\frac{d^y f(x, y)}{dy} + \frac{m\Delta x}{n\Delta y} \frac{d^x f(x, y)}{dx}$ und $\frac{d^y\varphi(x, y)}{dy} + \frac{m\Delta x}{n\Delta y} \frac{d^x\varphi(x, y)}{dx}$ einander offenbar gleich. Mithin ist $\frac{d^{xy}F(x, y)}{dx \, dy}$ völlig auf eben die Art aus den Größen $\frac{d^x f(x, y)}{dx}$ und $\frac{d^y f(x, y)}{dy}$ wie $\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy}$ aus den Größen $\frac{d^x\varphi(x, y)}{dx}$ und $\frac{d^y\varphi(x, y)}{dy}$ zusammengesetzt.

8. Es soll nun $\zeta = \varphi(x, y)$ die Gleichung für eine **ebene Fläche** bedeuten, und also von der Form $\zeta = \alpha + \beta x + \gamma y$ seyn. Für eine solche Fläche wissen wir $\Phi(x, y)$ zu berechnen. Doch auch ohne uns in diese Berechnung einzulassen, und daraus erst (durch Differenziation) $\frac{d^{xy}\Phi(x,y)}{dx \, dy}$,
65 welches allein wir brauchen, abzuleiten, | können wir letzteres unmittelbar berechnen, wenn wir erwägen, daß $\Pi = \Delta x \, \Delta y \left[\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx \, dy} + \ldots\right]$ der

Inhalt bloß jenes Stückes der Ebene sey, daß über $r\varrho$ stehet. Dies Flächenstück ist begreiflich ein Parallelogramm,*) dessen vier Winkelpuncte zu den vier Ordinaten z; $z + \beta . \Delta x$; $z + \gamma . \Delta y$; $z + \beta . \Delta x + \gamma . \Delta y$ gehören. Aus diesem Umstande lassen sich leicht die Seiten und eine Diagonale desselben, und hieraus endlich sein Inhalt berechnen, den man $= \Delta x \, \Delta y \, [1 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}$ finden wird. Also ist $\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx\, dy} = [1 + + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}$. Aber aus $\varphi(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$ folgt $\frac{d^x\varphi(x, y)}{dx} = \beta$, und $\frac{d^y\varphi(x, y)}{dy} = \gamma$. Mithin ist $\frac{d^{xy}\Phi(x, y)}{dx\, dy} = \left[1 + \left(\frac{d^x\varphi(x, y)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^y\varphi(x, y)}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Folglich muß auch $\frac{d^{xy}F(x, y)}{dx\, dy} = \left[1 + \left(\frac{d^x f(x, y)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^y f(x, y)}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ seyn, woraus man durch Integration, wenn man die constanten Größen mittelst der Hülfsgleichung $y' = \psi x$, und den gegebenen a und E gehörig bestimmt, $F(x, y)$ selbst finden kann.

§ 51.

Anmerkung. Die ebene Fläche, deren Betrachtung uns hier zur Berechnung des Inhalts jeder andern verhalf, ist, wenn man ihre Coordinaten auf denselben Axen mit dieser annimmt, einer durch den Punct m, der zu x, y, z gehört, gelegten Berührungsebene entweder gleichlaufend, oder gar einerley mit ihr: ein Umstand, der auch hier zu ähnlichen Bemerkung, wie jene des § 34, Stoff gibt.[63]) |

§ 52. 66

Erklärungen. 1. Ein Raumding, zu dessen jedem Puncte es, anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren abwärts, wenigstens eine durchaus zusammenhängende Fläche voll Puncte gibt, heißt Körper überhaupt (Fig. 20 und 21).

2. Ein Raumding, dessen jeder Theil, der sich nach eben gegebener Erklärung als Körper ansehen läßt, mit dem noch übrigen Theile, der sich nun gleichfalls als Körper muß ansehen lassen, wenigstens eine Fläche gemein hat, heißt ein einziger durchaus zusammenhangender Körper (Fig. 21).

3. Ein Körper, in dem sich Puncte finden, die anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren herab, nur eine begrenzte Fläche voll Puncte zu ihren Nachbarn haben, heißt ein begrenzter Körper (Fig. 21).

*) Herr du Bourguet in dem (Vorrede S. IX) angezeigten Werke erklärt § 534 diese Parallelogramme durch ein Versehen für Rechtecke.

4. Jene Puncte selbst z. B. $e, e, \ldots$ werden des Körpers Grenzpuncte; die andern, z. B. m, n (die also eine geschlossene Fläche, nähmlich eine Kugelfläche um sich herum haben) innere Puncte genannt.

§ 53.

Aufgabe. Die zweckmäßigste Weise anzugeben, wie jeder bestimmbare Körper aus einer hinlänglichen Anzahl gegebener Puncte bestimmt werden könne.

Auflösung. Betrachtungen, wie in § 17 und 43 zeigen, daß es bey jedem Körper unendlich viele x; und zu jedem derselben (mit einer höchstens nur endlichen Menge von Ausnahmen) unendlich viele y; und zu jedem aus diesen (mit derselben Einschränkung) unendlich viele z geben müsse; indem die Gleichung $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{1}{2}} = u$, für einerley x, y, z und u, so viele Werthe von Δx, Δy, Δz zulassen muß, daß die sämmtlichen zu $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ gehörigen Puncte eine ganze Fläche bilden. Allein noch mehr, x muß der Werthe nicht nur überhaupt unendlich viele haben, sondern alle, die zwischen gewissen Grenzen |
67 liegen, und eben so y für jeden Werth von x, und z für jeden von y. Dieses erhellet ganz so, wie die ähnliche Behauptung in § 17 oder 43. Soll endlich der Körper bestimmt seyn; so müssen alle diese (unendlich vielen) Grenzen bestimmt seyn. Es muß daher erstlich gegeben seyn eine endliche Menge von Grenzen, innerhalb welcher gesammte x enthalten sind; z. B. a und $a + b$, dann $a + b + c$ und $a + b + c + d$, u. s. w.; dann eine endliche Menge von Gleichungen von der Form $y' = \varphi x$, welche die Grenzwerthe aller zu jedem x gehörigen y bestimmen; wobey noch angezeigt seyn muß, innerhalb welcher Werthe von x jede dieser Gleichungen angewandt werden soll; letztlich noch eine endliche Menge von Gleichungen von der Form $z' = f(x, y)$, welche die Grenzwerthe aller zu jedem x und y gehörigen z festsetzen; wobey wieder angemerkt seyn muß, innerhalb welcher Werthe von x und y jede derselben gelte.

§ 54.

Anmerkung. So sind denn die Gleichungen, die zur Bestimmung eines Körpers erforderlich sind, ganz von derselben Form, wie die für eine Fläche; was sich auch leicht begreifen läßt. Eben so leicht ist auch darzuthun, daß die Puncte, die zu den Grenzwerthen der z, d. h. zur Ordinate $z' = f(x, y)$ gehören, des Körpers Grenzpuncte sind; wie auch, daß sie zusammen eine Fläche, und zwar eine geschlossene bilden. Hieraus ergibt sich dann, daß jeder bestimmbare Körper durch eine in sich zurückkehrende Fläche begrenzt seyn müsse, und durch die Angabe derselben bestimmt sey.

§ 55.

Erklärung. Ein Prisma heißt ein Raumding, das alle und sonst keine andere Puncte enthält, als

1. jene, die in zwey geometrisch gleichen ebenen Flächen A und B, deren Seiten einander parallel sind, und in dem Raumdinge C liegen, das alle gleichnahmigen Grenzpuncte von A und B durch gerade Linien verbindet. |

2. Die sämmtlichen Puncte, welche von dem aus der Vereinigung 68
von A, B, C entstehenden Raumdinge eingeschlossen werden.

§ 56.

Lehrsatz. Jedes Prisma ist ein Körper, und zwar wenn A (oder B) bestimmbar ist, ein bestimmbarer.

Beweis. Es läßt sich zeigen:

1. daß das Raumding C eine Fläche;

2. daß die aus den dreyen A, B, C bestehende Fläche eine in sich zurückkehrende Fläche sey, die mithin Puncte umschließt;*) und zwar

3. Puncte eines Körpers, d. h. Puncte von der Art, welche die § 52 beschriebene Eigenschaft haben;

4. daß auch die Puncte der Flächen A, B, C Puncte dieses Körpers sind, und zwar

5. Grenzpuncte.

Hieraus folgt dann nach § 54, daß wenn A (oder B), folglich auch C bestimmbar ist, auch dieser ganze Körper bestimmbar sey.

§ 57.

Erklärung. Der Inhalt eines Körpers heißt eine Größe, die aus der Natur desselben mittelst Beziehung auf eine gegebene Entfernung E nach einem solchen Gesetze herleitbar ist, daß wenn dieselbe für einen gewissen Körper $= s$, für einen andern $= \sigma$ ist, sie für den Körper, der jene zwey als integrirende Bestandtheile enthält, $= s + \sigma$ befunden wird.

---

*) Ein Punct heißt von einer Fläche umschlossen, wenn jede gerade Linie, die man sich durch ihn denkt, zu beyden Seiten desselben, eine ungerade Anzahl Puncte mit ihr gemein hat.

§ 58.

Lehrsatz. Körper, die geometrisch gleich sind, sind auch von gleichem Inhalte.

Beweis. Wie § 21. |

69 § 59.

Lehrsatz. Die Inhalte gleichwinkeliger Parallelepipeden stehen in einem zusammengesetzten Verhältnisse der Längen ihrer Seiten.

Beweis. Auf ähnliche Art wie § 47.

§ 60.

Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Inhalte anderer Körper, welche auf ähnliche Art aus ihnen abgeleitet sind.

Beweis. Wie der des ähnlichen Satzes § 30.

§ 61.

Aufgabe. Den Inhalt jedes bestimmbaren Körpers zu finden, wenn die zu seiner Bestimmung hinlängliche Anzahl von Gleichungen zwischen rechtwinkeligen Coordinaten, nebst der Entfernung E, auf welche der Inhalt bezogen werden soll, gegeben ist.

Auflösung. 1. Wir brauchen bloß zu zeigen, wie der Inhalt eines Körperstückes zu berechnen sey, für welches einerley Gleichung $z' = f(x, y)$ zur Bestimmung der Grenzwerthe aller z, und einerley Hülfsgleichung $y' = \varphi x$ zur Bestimmung der zu jedem x gehörigen Grenzwerthe von y gilt. Denn weiß man den Inhalt eines jeden solchen Stückes für sich allein, so gibt die Summe aller nach § 57 den Inhalt des ganzen Körpers.

2. Es gelte demnach bey allen Werthen der x, welche nicht außerhalb der Grenzen a und $a + b$, und bey allen Werthen der y, welche nicht außerhalb der durch die Gleichung $y' = \varphi x$ bestimmten Grenzwerthe von y liegen, für die Grenzwerthe der z die Gleichung $z' = f(x, y)$.

3. Um den Inhalt des zu diesen sämmtlichen Werthen der x, y, z gehörigen Körperstückes zu finden, betrachten wir erstlich den Inhalt s eines veränderlichen Theils desselben, und zwar desjenigen, den man erhält, wenn man der Werthe für x, y, z folgende annimmt:

70 a) für x, alle von a bis zu einem, den wir nicht | näher bestimmen, als daß er noch $< a + b$ seyn soll, und den wir schlechtweg x nennen;

b) bey jedem dieser x noch alle y, die α) größer als der kleinere von zwey zusammengehörigen Grenzwerthen, welche die Gleichung

$y' = \varphi x$ angibt, und β) kleiner sind, als ein gewisser Werth, welchen wir schlechtweg y nennen, und nur dahin bestimmen, daß er noch kleiner seyn soll, als der zum letzten x gehörige größere Grenzwerth, den die Gleichung $y' = \varphi x$ anzeigt;

c) für jedes dieser x und y endlich noch alle z, welche nicht außerhalb je zweyer zusammengehöriger, durch die Gleichung $z' = f(x, y)$ bestimmter Grenzwerthe liegen, d. h. alle z, welche für die erwähnten x und y zu Folge der Gleichung $z' = f(x, y)$ möglich sind.

4. Offenbar ist dieser Inhalt eine veränderliche Größe; denn wenn z. B. x um Δx, und y um Δy wächst, so kömmt zu jenem Körperstücke gleichfalls noch ein Theil hinzu; nähmlich derjenige, der alle Puncte von der Abscisse x bis $x + \Delta x$, und von der y bis $y + \Delta y$ enthält. Es hängt also s von x und y, dann aber auch von der Beschaffenheit des Körpers selbst in diesen Gegenden, d. h. von den Gleichungen $y' = \varphi x$, $z' = f(x, y)$ und der constanten Größe a, ingleichen von der Entfernung E ab. Man kann daher sagen, s sey eine Function von x und y, welche aus der Natur der Functionen φx und $f(x, y)$, und aus den Constanten a und E bestimmbar seyn muß. Wir wollen sie durch $F(x, y)$ bezeichnen.

5. Nimmt die Abscisse x (Fig. 12) $= ap$ um $\Delta x = p\pi$, und die Abscisse $y = aq$ um $\Delta y = qk$ zu; so ist der sämmtliche Zuwachs, den der Körper erfährt $= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$; ein Körperstück, das aus drey Theilen besteht, welche sich so unterscheiden, daß die Puncte des einen alle über dem Rechtecke πr, jene des andern über dem $r\varrho$, jene des dritten endlich über dem Rechtecke rk in senkrechter Richtung stehen. Das mittlere Stück, nähmlich dasjenige, so über $r\varrho$ steht, enthält bloß jene Puncte, die zu den Abscissen von x bis $x + \Delta x$, und von y bis
$y + \Delta y$ gehören; | woraus sich ergibt, daß auch sein Inhalt, den wir 71
durch P bezeichnen wollen, bloß von denjenigen Werthen abhange, welche die Function $z' = f(x + m\Delta x,\ y + n\Delta y)$ annimmt, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch, nebst 0 und 1, setzet. Dagegen aber wäre der bloße Zuwachs von z' oder $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y) - f(x, y)$ zur Bestimmung dieses Körperstücks offenbar unzureichend; indem die Puncte, die zu jedem $x + m\Delta x$ und $y + n\Delta y$ gehören, nicht bloß durch die Größe des Unterschieds $\Delta z'$, sondern durch die verschiedenen Werthe bestimmt werden, welche die z' für ein und dasselbe $x + m\Delta x$, und $y + n\Delta y$ hat, und diese gibt uns begreiflich nur die Function $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ selbst zu erkennen. Wird aber die Function P bloß durch die Werthe bestimmt, welche $f(x + m\Delta x,\ y + n\Delta y)$ annimmt, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch nebst 0 und 1

setzet; so wird gewiß auch die Function $\frac{P}{\Delta x\, \Delta y}$ durch $\Delta x, \Delta y$ und durch die eben erwähnten Werthe der $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ bestimmt.

6. Nun mag $\zeta' = \varphi(x, y)$ die Gleichung für was immer für einen andern Körper bedeuten, bey welchem die Hülfsgleichung $y' = \psi x$, wie auch die Größen a und E die nähmlichen sind. Der Inhalt dieses Körpers sey $= \Phi(x, y)$, und eine Größe, die aus $\Phi(x, y)$ auf eben die Art, wie P aus $F(x, y)$ abgeleitet ist, soll durch Π vorgestellt seyn. So bezeichnen also $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ Dinge von einerley Art, Inhalte nähmlich von Körpern; und da nach N. 4 bey einerley ψx und a und E, die Functionen $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ bloß von der Natur der Functionen $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ abhängen: so gibt es auch sicher irgend ein so allgemein lautendes Gesetz, daß sich nach ihm für eine jede Art von Körpern die Functionen $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ aus den $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ herleiten lassen. Nach N. 5 werden aber die Functionen $\frac{P}{\Delta x\, \Delta y}$ und $\frac{\Pi}{\Delta x\, \Delta y}$ bloß durch
72 die Werthe be- | stimmt, welche $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ und $\varphi(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ annehmen, wenn man für m, n jeden gedenkbaren echten Bruch nebst 0 und 1 setzet; also erfolgt auch diese Bestimmung gewiß nach irgend einem für alle Körper gleichlautenden Gesetze. Denn diese jetzt erwähnten Größen sind aus der vorigen $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$; $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ selbst nach einerley Gesetze abgeleitet.

7. Aus § 53 ist zu schließen, daß die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ stetig seyn müssen; oder daß sich die Werthe $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ und $\varphi(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ den Werthen $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ so sehr, als man nur immer will, nähern, wenn man Δx, Δy klein genug nimmt. Endlich ist wenigstens für gewisse Körper z. B. für solche, die mit Ebenen begrenzt sind, auch $\Phi(x, y)$ eine stetige Function, und also nach Taylors Lehrsatze:

$$\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y) = \Delta x \frac{\mathrm{d}^x\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x} + \Delta y \frac{\mathrm{d}^y\Phi(x, y)}{\mathrm{d}y} + \\ + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\mathrm{d}^{xx}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\Delta y^2}{2}\frac{\mathrm{d}^{yy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}y^2} + \Delta x\, \Delta y \frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} + \ldots,$$

welches nach der Bemerkung des N. 5 der Inhalt des dreytheiligen Körperstückes ist, das über den Rechtecken πr, $r\varrho$ und rk steht. Man überzeugt sich nun auf dieselbe Art, wie im § 50 N. 7, daß der Inhalt des über $r\varrho$ stehenden Körperstückes bloß durch diejenigen Glieder der eben angeführten Formel ausgedrückt wird, welche in Δx und Δy zugleich multipliciret sind. Also ist $\Pi = \Delta x\, \Delta y \left[\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} + \ldots\right]$, und folglich $\frac{\Pi}{\Delta x\, \Delta y} = \frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} + \ldots$ Die Function $\frac{\Pi}{\Delta x\, \Delta y}$ nähert sich also

zum Werthe $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ so sehr, als man nur immer will, wenn man Δx. Δy klein genug nimmt. Folglich muß eben dies Verhältniß auch zwischen den Functionen $\frac{P}{\Delta x\,\Delta y}$ und $\frac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ Statt finden. | Daher sind auch hier **73**
wieder alle Bedingungen des § 9 vorhanden. Die Größen, in welche die Functionen $\frac{P}{\Delta x\,\Delta y}$ und $\frac{\Pi}{\Delta x\,\Delta y}$ für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ übergehen, nähmlich $\frac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ und $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ hängen also bloß von den Werthen ab, in welche die Größen $f(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ und $\varphi(x + m\Delta x, y + n\Delta y)$ für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ übergehen, d. h. von $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$. Wenn folglich für irgend ein x und y $f(x, y) = \varphi(x, y)$ ist; so sind die bestimmenden Stücke der Functionen $\frac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ und $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ einander gleich. Also ist $\frac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ völlig auf eben die Art aus der Größe $f(x, y)$, wie $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ aus der Größe $\varphi(x, y)$ zusammengesetzt.

8. Es soll nun die Fläche, in der die Endpuncte der Ordinaten $\zeta' = \varphi(x, y)$ liegen, aus einer oder mehreren E b e n e n bestehen, so werden wir $\Phi(x, y)$ oder doch $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ sehr leicht berechnen können; wenn wir erwägen, daß $\Pi = \Delta x\,\Delta y \,.\left[\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} + \ldots\right]$ der Inhalt bloß desjenigen Körperstücks sey, das über $r\varrho$ stehet. Nehmen wir also (weil dies am Einfachsten ist) an, daß die so eben erwähnten Ebenen, in denen die zu ζ' gehörigen Puncte liegen, p a r a l l e l zur Ebene der x und y laufen; so sind die Werthe von ζ' für alle x und y constant. Um aber $\zeta' = z' = f(x, y)$ setzen zu können; muß man der parallelen Ebenen in diesem Körper so viele Paare annehmen, als Paare von Werthen die Größe z' in der Gleichung $z' = f(x, y)$ hat. Bezeichnen wir nun diese verschiedenen Werthe vom größten positiven bis zu dem kleinsten negativen (oder auch umgekehrt) durch $z', z'', z''', z^{IV}, \ldots$; so ist das über $r\varrho$ stehende Körperstück eine Summe von | Parallelepipeden, deren Grundflächen $= r\varrho =$ **74**
$= \Delta x\,\Delta y$, und deren Höhen $= z' - z''$; $z''' - z^{IV}$; ... sind. Der Inhalt desselben ist also nach § 59 $= \Delta x\,\Delta y[(z' - z'') + (z''' - z^{IV}) + \ldots] = \Pi$. Daher ist $\frac{\mathrm{d}^{xy}\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ oder die Größe, in welche $\frac{\Pi}{\Delta x\,\Delta y}$ für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ übergeht, $= (z' - z'') + (z''' - z^{IV}) + \ldots$ Also muß auch $\frac{\mathrm{d}^{xy}(\Phi(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = (z' - z'') + (z''' - z^{IV}) + \ldots$ seyn; woraus man, da die Werthe $z', z'', z''', z^{IV}, \ldots$ durch die Gleichung $z' = f(x, y)$ gegeben sind, durch Integri-

rung die Function $F(x, y)$ selbst finden kann, wenn man die beyzusetzenden Constanten mittelst der Gleichung $y' = \varphi x$, und der gegebenen a und E gehörig bestimmt.

§ 62.

Anmerkung. Insgemein lehret man, daß $\dfrac{\mathrm{d}^{xy}F(x, y)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = z'$ sey; eine Formel, die sich aus der unsrigen für den besondern Fall ergibt, wenn der zu berechnende Körper ein durchaus zusammenhangender von der Art ist, daß jede der Ordinaten z' seine Oberfläche nur in zwey Puncten schneidet, deren der eine stets in der Ebene der x und y liegt; oder mit andern Worten, wenn man den Inhalt bloß eines solchen Körperstücks suche, das auf der einen Seite durch die Ebene der x und y begrenzt wird. In diesem Falle ist nähmlich $z'' = 0$, und die Größen z''', $z^{IV}, \ldots$ sind gar nicht vorhanden; daher denn $(z' - z'') + (z''' - z^{IV}) + \ldots$ bloß in z' übergehet. — Da übrigens das Parallelepipedum, dessen Vergleichung uns hier zur Berechnung des Inhalts aller anderer Körper verholfen hat, durch den Punct m, der zu x, y, z gehört, hindurch geht: so lassen sich auch hier wieder Betrachtungen, wie die des § 34, anstellen.[64])

§ 63.

75 Schlußanmerkung. Die sichtbare Analogie, | die in den Erklärungen von Linie (§ 11), Fläche (§ 35) und Körper (§ 52) obwaltet; die eben so große, die man in den Erklärungen der Länge einer Linie (§ 19), des Inhaltes einer Fläche (§ 45) und eines Körpers (§ 57) antrifft; die Leichtigkeit endlich, und die Gleichförmigkeit, mit der sich aus diesen sechs Erklärungen bloß durch die Anwendung der höchst einfachen Methode des § 9 die Formeln zur Ausmessung dieser drey Arten der geometrischen Ausdehnung in ihrer größten Allgemeinheit herleiten lassen (§ 32, 50, 61), dies alles ist, wie ich glaube, geeignet, das günstigste Vorurtheil für die hier vorgetragene Theorie zu wecken. Je strenger sie aber der Leser geprüft, und je mehr Nachdenken er auf sie verwendet haben wird; um desto völliger wird er sich auch von ihrer Richtigkeit überzeugen. |

---

76 Anhang.

Vorstehende Abhandlung war bereits seit Jahr und Tag druckfertig, als des Herrn Dr. A. L. Crelle (k. Preußischen Oberbaurathes)[48]) Schrift: über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen auf Geometrie und Mechanik, Berlin 1816, erschien; in welcher die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, sammt jenen zwey Lehrsätzen der Mechanik, die wir in unserer Abhandlung § 10 als Beyspiel vortragen, und überdies noch die Theorie der Berührung und der Taylorsche Lehrsatz einer neuen Bearbeitung unterzogen werden. Der wahrheitsliebende Herr Verfasser entdeckte nähmlich an seiner früheren Darstellung dieser Lehren (Versuch einer Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen, 1. Band, Göttingen 1813) gewisse Mängel, die er jetzt zu ergänzen trachtet. Ob ihm dies in Betreff der beyden letzteren Gegenstände gelungen sey, ist eine Frage, die nicht hieher gehöret; wohl aber gehört es hieher, zu untersuchen, ob die fünf ersteren Lehrstücke durch diese neueste Bearbeitung schon so befriedigend dargestellt sind, daß jede weitere Bemühung überflüssig wäre?

I. „Die Rectification der Curve in der Ebene gründet Herr Crelle auch hier wieder auf den Satz, „daß jede Linie, die eine andere, in ihrer ganzen Länge nach einer und derselben Seite convexe Linie, mit welcher sie zwey Puncte gemein hat, umschließt, länger ist, als die umschlossene Linie" (S. 51). Von seinem Beweise für diesen Satz sagt er (S. 51), es sey „derjenige, den Legendre (Elémens de Géométrie l. IV. propos. IX. cinq. Edit. p. 116) im Sinne gehabt, aber nicht ganz deutlich ausgesprochen hat". Herr Crelle fängt ihn auf folgende Art an: „Wenn die umschlossene Linie nicht | selbst die kürzeste unter allen Linien ist, von welchen 77
ABM an der convexen Seite umschlossen wird; so sey es unter diesen umschließenden Linien irgend eine andere".

Nun wird auf die bekannte Art gezeigt, daß es keine dergleichen kürzeste Linie auf der convexen Seite von *AMB* geben könne; indem sich zu jeder, welche man dafür annehmen mag, noch eine kürzere angeben läßt; woraus sodann, weil diese Linie der Voraussetzung zu Folge auch nicht auf der convexen Seite von *AMB* liegen soll, gefolgert wird, daß *AMB* selbst diese kürzeste Linie sey. In diesem Beweise ist der Ausdruck: „die kürzeste Linie unter denjenigen, welche *AMB* umschließen", einer Zweydeutigkeit ausgesetzt; indem er unbestimmt läßt, ob man darunter eine Linie verstehe, die selbst zur Classe der umschließenden gehört, oder nicht. Soll das Erstere seyn; so ist es ungereimt, zu sagen, *AMB* selbst sey diese Linie; denn *AMB* umschließt nicht *AMB*. Soll aber unter der kürzesten Linie aus allen, welche die *AMB* umschließen, nur eine Linie überhaupt verstanden werden, welche die Eigenschaft hat, kürzer als alle *AMB* umschließende zu seyn; so ist es ungereimt, sie unter der Classe der umschließenden zu suchen;

denn wie kann eine Linie, welche *AMB* umschließt, kürzer als jede *AMB* umschließende, also auch kürzer als sie selbst seyn? — Doch diese Widersprüche liegen nur in den Ausdrücken des Beweises, und könnten bey einem andern Vortrage desselben leicht vermieden werden. Der wesentlichste Fehler aber steckt im ersten Satze, in welchem eigentlich Folgendes ausgesagt wird: Wenn die umschlossene Linie nicht kürzer ist, als jede der sie umschließenden, so muß es unter diesen eine, die kürzer als alle übrigen ist, geben. Dieses ist nun genau dieselbe Voraussetzung, die auch Legendre machte, und deren Unzulässigkeit wir schon in der Vorrede S. XI. ff. umständlich dargelegt haben. — |

78 Erfreulich war uns zu finden, daß nach Herrn Crelle's Meinung der Satz, den man als eine zweyte Voraussetzung in diesem Beweise annehmen muß, nähmlich, daß die gerade Linie die kürzeste zwischen zwey Puncten ist, kein Grundsatz sey, sondern eines Beweises bedürfe. Aber folglich ist derjenige, den er S. 53 ff. liefert, nicht von der Art, daß wir ihm unsern Beyfall schenken könnten.

Wenn irgend eine krumme Linie *AMB* kürzer als die gerade *AB* wäre; so ließen sich allerley gebrochene Linien *AQPB* bilden, welche (nach Euklid I. 20) größer als *AB* sind, und folglich die *AMB* noch mehr überträfen. „Nun wird es (sagt Herr Crelle) unter diesen sich an *AMB* anschließenden Linien, die *AMB* übertreffen, nothwendig eine geben müssen, die *AMB* am meisten übertrifft". Dieses kann aber, wie er ganz richtig zeigt, nicht seyn. „Folglich ist es unmöglich, daß die gerade Linie *AB* länger sey, als irgend eine andere convexe Linie zwischen *A* und *B*, mithin ist sie unter allen die kürzeste." Dieser Beweis ist, wie Jeder sieht, noch fehlerhafter, als der vorhergehende. Denn erstlich daraus, daß die gerade Linie *AB* nicht länger sey, als *AMB*, folgt ja nicht, daß sie kürzer seyn müsse. Wie willkürlich ist ferner nicht die Voraussetzung: Unter den Linien, die sich an *AMB* anschließen, und sie übertreffen, muß es nothwendig eine geben, die sie am meisten übertrifft! Dieser Satz ist eben so ungereimt, wie der vorhin gerügte, in Betreff dessen wir auf unsere Vorrede verwiesen haben. Das Subject desselben ist nähmlich etwas sich selbst Widersprechendes. Weit gefehlt also, daß man ihn ohne Beweis als einen Grundsatz annehmen könnte, muß man ihn vielmehr aus der Reihe der Sätze, die in der Wissenschaft aufgestellt werden dürfen, geradezu ausstreichen, indem er überhaupt gar keine Wahrheit ausdrückt. |

79 II. Die Rectification der krummen Linien doppelter Krümmung leitet Herr Crelle von jener der Linien einfacher Krüm-

mung ab, indem er (S. 60) die cylinderartige Fläche betrachtet, in welcher die sämmtlichen Ordinaten z liegen, und diese dann in eine Ebene ausdehnt. Ein solches Ausdehnen ist, wie Jeder sieht, eine Art Bewegung, und alle Vorstellungen von Bewegung sind in der Geometrie als etwas Fremdartiges zu vermeiden. Auch müßte man erst beweisen, daß durch die Ausdehnung dieser cylinderartigen Fläche in eine Ebene die krumme Linie, die auf ihr verzeichnet ist, keine Veränderung an ihrer Länge erfahre. Dieses rein geometrisch ausgedrückt, lautet: Wenn in zwey Linien, deren die Eine eine gerade, die Andere eine krumme Abscissenlinie, jedoch von einfacher Krümmung hat, zu gleichlangen Abscissen immer gleiche Ordinaten gehören; so sind diese Linien auch von gleicher Länge. Die Bedingung, daß die krumme Abscissenlinie nur von einfacher Krümmung seyn dürfe, ist in diesem Satze wesentlich. Wer sollte nun verlangen, daß man ihn ohne Beweis, als einen Grundsatz, zugebe? —

III. Bey Complanation der Flächen verweiset Herr Crelle (S. 61) auf ein Raisonnement, das jenen bey der Rectification der Linien gebrauchten ganz ähnlich seyn soll, das aber hier auszuführen ihm der Raum verbietet. Ohne Zweifel würde es also denselben Einwendungen ausgesetzt seyn, die wir bey jenen gerügt haben.

IV. Die beyden Lehrsätze der Mechanik beweiset der Herr Verfasser völlig auf die Art, die wir in unserer Abhandlung § 10. S. 49 schon als unbefriedigend bezeichnet haben.

V. Die Quadratur ebener Flächen und die Cubirung der Körper verrichtet Herr Crelle (S. 42—48) auf eine von der gewöhnlichen zwar etwas | abweichende Art; doch so, daß jener Vorwurf einer **80**
Einmengung zufälliger Nebenbegriffe, den wir der Methode der Grenzen (Vorr. S. XVII) gemacht, auch hier noch Statt findet. Oder wer sollte nicht erkennen, daß jene Betrachtung einer zwischen der kleinsten und der größten liegenden Ordinate, die gerade so groß ist, daß ein aus ihr und dem Abscissenzuwachse gebildetes Rechteck dem Zuwachse des krummlinig begrenzten Flächenraumes gleicht, eine sehr fremdartige Betrachtung sey, wenn man bloß diesen letzteren berechnen will? — Ein anderer Fehler ist es, daß der Herr Verfasser sich erlaubt, einer Gleichung, deren Gültigkeit nur für alle solche Fälle erwiesen ist, wo die veränderliche Größe einen nicht der Null gleichen Werth hat, gerade auf den Fall, wo dieser Werth gleich Null ist, anzuwenden. Doch dieser Fehler wäre auf die bekannte Art, die im binomischen Lehrsatze § 28 befolgt ist, leicht zu verbessern.