Kapitola IV.

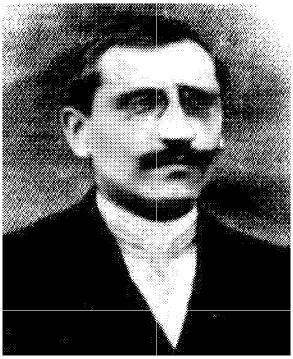
Lebesgueův a Perronův integrál (20. století)

Ke konci 19. století byl, zhruba řečeno, vývoj matematické analýzy ukončen, pokud šlo o průzkum vlastností spojitých funkcí. Riemannův integrál kupříkladu poskytl odpověď na otázku, jak nalézt funkci, když je dána její derivace, pokud tato derivace je spojitou funkcí. V teoriích bylo třeba dělat umělá a nepříliš vkusná omezení, která ze hry vylučovala nespojité funkce. V průběhu 19. století došlo také k výraznému posunu v tom, jak se matematicky nahlíželo na proces integrování. V první fázi popsal Cauchy způsob, jakým lze definovat integrál pro specifickou třídu spojitých funkcí. Ve druhé fázi uvažoval Riemann libovolnou funkci, definoval integrál podle Cauchyova postupu a položil otázku, jaké jsou funkce, které v jeho smyslu mají integrál. Zavedl tak novou třídu *riemannovsky integrovatelných funkcí* a podal charakterizaci jejích prvků.

Ve vývoji matematiky 19. století lze vystopovat jistý zlom v metodě. Stručně jej lze charakterizovat tím, že v matematických aktivitách byly konkrétní výpočty nahrazeny myšlením v pojmech. Přitom jde o myšlení v obecných pojmech, které nahradily konkrétní hodnoty, konkrétní funkce apod. Pod pojmem si vlastně lze představit i množinu prvků, kterých se týká. Ve třídě všech funkcí vymezí např. pojem spojitosti nebo integrovatelnosti v Riemannově smyslu jisté podmnožiny (spojité nebo riemannovsky integrovatelné funkce), kterých se týká. Matematické důkazy jsou pak vedeny tak, že se nemluví o konkrétním prvku, ale o celé třídě prvků, které mají jistou vlastnost. Z hlediska dnešních metod by se mohlo zdát, že jde o banalitu, kterou není nutno připomínat. V minulém století se však právě tento přístup dostával postupně do matematiky a B. Riemann byl jedním z průkopníků této moderní filozofie matematické tvorby. Dlužno podotknout, že případ jeho teorie integrálu skýtá v tomto směru poměrně slabé potvrzení, jiné jeho výsledky o tom svědčí daleko zřetelněji.

Z hlediska teorie integrálu lze naše století bez nadsázky nazvat stoletím Lebesgueovým.

Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) studoval na Ecole Normale Supérieure. Do roku 1906 žil v Rennes a pak se přestěhoval do Poitiers, kde se stal profesorem. V roce 1912 byl povolán do Paříže jako *maître des conférences* a posléze se stal profesorem na Collège de France. Členem Akademie byl zvolen v roce 1922.



H. L. Lebesgue

První oznámení o tom, že byl vytvořen nový integrál, silnější než integrál Riemannův, se objevilo v r. 1901 v *Comptes Rendus* v práci s názvem *Sur une généralisation de l'intégrale définie* od H. Lebesguea a podrobně potom v r. 1902 v Lebesgueově disertaci[3] *Intégrale, Longeur, Aire* (Ann. di Matem. (3), 7, 231 – 359).

V roce 1904 pak Lebesgue napsal knihu *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France,* Gauthier–Villars, Paris, 1904, která vyšla znovu v roce 1928 v řadě *Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions.* Tato kniha vycházela z jeho přednášek, které měl v roce 1902–3 na Collège de France.

Lebesgueova teorie integrálu

Svoji knihu *Leçons sur l'integration* ... koncipoval H. Lebesgue jako přehled základních postupů pro vybudování teorie integrálu. Na základě dříve známých postupů, např. z klasického postupu pro integrování spojitých funkcí nebo z Riemannova integrálu, Lebesgue dochází k jednoduchým pozorováním a formuluje následující: ... *cílem je přiřadit každé omezené funkci* $f(x)$*, definované na konečném intervalu* (a, b)*, kladném, záporném nebo nulovém* (tím Lebesque rozumí situace $a < b$, $a > b$, resp. $a = b$), *nějaké konečné číslo* $\int_a^b f(x)dx$*, které nazveme integrálem* $f(x)$ *na* (a, b)*, a které splňuje následující podmínky:*

1. *Pro libovolná* a, b *a* h *máme*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx.$$

2. *Pro libovolná* a, b, c *máme*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0.$$

3.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

[3]J. C. Burkill v roce 1944 ve vzpomínkovém článku o H. Lebesgueovi napsal, že *nepochybně tato disertace je jedna z nejlepších, kterou kdy nějaký matematik napsal.*

4. *Když je $f \geq 0$ a $b > a$, potom také*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5.

$$\int_0^1 1dx = 1.$$

6. *Když posloupnost $f_n(x)$ konverguje k $f(x)$, přičemž monotonně roste, potom posloupnost integrálů z $f_n(x)$ konverguje k integrálu z $f(x)$.*

Lebesgue tedy podává *deskriptivní* definici integrálu; jde o jistý systém axiomů, které má integrál splňovat. Závěrem Lebesgueova úsilí byla ucelená teorie míry a měřitelných funkcí spolu s analytickou definicí integálu, která má dosti názornou geometrickou interpretaci.

Podmínky 1. – 6. dají další vlastnosti, které integrál musí mít.

Kupříkladu z 3. podmínky lze jednoduše odvodit, že (v případě $f(x) = \varphi(x) = 0$) je $\int_a^b [0+0]dx = \int_a^b 0dx = \int_a^b 0dx + \int_a^b 0dx$, a proto $\int_a^b 0dx = 0$. Z téhož se snadno odvodí $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Z 4. podmínky pak dostaneme, že když je $f \leq g$ a $b > a$, potom také

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Bez problémů lze také odvodit, že pro reálné k platí

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

a že je

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Nechť je dán interval $[a, b]$. Pro danou (libovolnou) množinu $M \subset [a, b]$ definujme její *charakteristickou funkci* χ_M tak, že položíme

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \in [a,b] \setminus M \end{cases}$$

(pojem charakteristické funkce množiny Lebesgue explicitně ve své knize neuvedl).

Nechť funkce f definovaná na intervalu $[a, b]$ je omezená, tj. platí

$$l < f(x) < L \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Předpokládejme, že je dán systém

$$l = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = L$$

a definujme

$$M_i = \{x \in [a,b]; \quad l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}.$$

M_i je tedy množina těch prvků $x \in [a,b]$, pro které je funkční hodnota funkce f v intervalu $[l_{i-1}, l_i)$, viz obr. 16. Z toho, jak je definována množina M_i a charakteristická funkce χ_{M_i}, je

$$l_{i-1}\chi_{M_i}(x) \leq f(x) \leq l_i\chi_{M_i}(x) \quad \text{pro } x \in M_i.$$

Označme integrální součty

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} l_{i-1}\chi_{M_i}(x), \quad \Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i\chi_{M_i}(x)$$

Potom je

$$\psi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Z uvedeného pak dostaneme

$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_{i-1}\chi_{M_i}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i\chi_{M_i}(x)dx = \int_a^b \Psi(x)dx,$$

neboli také

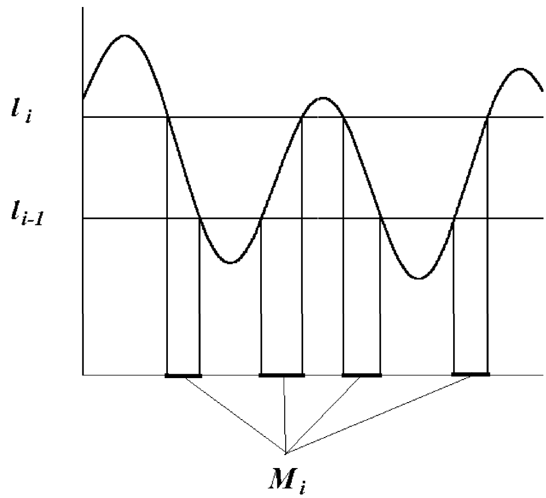
$$\sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \int_a^b \chi_{M_i}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} l_i \int_a^b \chi_{M_i}(x)dx.$$

Dosud jsme nikterak nevyužili v úvahách 6. podmínku. V tomto okamžiku je dobré si uvědomit, že když se v systému $l = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = L$ bude zmenšovat hodnota $\max(l_i - l_{i-1})$, budou příslušné funkce ψ a Ψ konvergovat k funkci f a tato konvergence bude monotonní. Přesněji řečeno, budou–li dány dva systémy $l = l_0^1 < l_1^1 < \cdots < l_{n_1}^1 = L$ a $l = l_0^2 < l_1^2 < \cdots < l_{n_2}^2 = L$ přičemž $\max(l_i^2 - l_{i-1}^2) < \max(l_i^1 - l_{i-1}^2)$, potom platí

$$\psi^1(x) \leq \psi^2(x) \leq f(x) \leq \Psi^2(x) \leq \Psi^1(x),$$

pokud $\psi^1(x), \Psi^1(x)$ jsou funkce odpovídající prvnímu a $\psi^2(x), \Psi^2(x)$ druhému systému podle definice, která byla dána výše.

Podle 6. podmínky pak lze určit i hodnotu $\int_a^b f(x)dx$ (užitím limity), pokud budeme umět vypočítat hodnoty integrálů $\int_a^b \chi_{M_i}(x)dx$, jinými slovy, pokud budeme umět počítat integrály z charakteristických funkcí množin obsažených v intervalu $[a,b]$.



Obr. 16. Lebesqueovy integrální součty

Stejně jako v případě Riemannova integrálu, i zde jde o aproximaci hodnoty integrálu jistými součty, ty ovšem mají ve srovnání s Riemannovými součty jinou a trochu složitější povahu, jsou to součty typu $\sum_{i=1}^{n} l_i \int_a^b \chi_{M_i}(x)dx$.

Názorná představa, která za tímto postupem stojí, je celkem jednoduchá. Lze ji vyložit tak, že chceme-li např. zjistit, kolik peněz máme v kapse, můžeme postupovat metodou riemannovských součtů tak, že budeme jednotlivé hodnoty (desetníky, dvacetníky, ... , stokoruny, ... , pětitisícikoruny) postupně vytahovat a průběžně sčítat, nebo můžeme postupovat po lebesgueovsku a jednotlivé hodnoty seskupovat, tj. klást na zvláštní hromady desetníky, dvacetníky, ... , stokoruny, ... , pětitisícikoruny, ... a poté, co máme prázdnou kapsu, zjistit, kolik máme od jednotlivých hodnot kusů, tj. zjistit velikost množin $M_{0.1\ K\check{c}}, \dots, M_{5000\ K\check{c}}, \dots$ (to znamená vlastně výpočet $\int_a^b \chi_{M_i}(x)dx$), provést příslušné vynásobení a pak součet. Metoda výčetek je občas vyžadována v peněžních ústavech a je v případě větších obnosů složených z malých platidel (např. po rozbití prasátka nebo „vyprázdnění" mincovního automatu) celkem praktická.

Problém určení integrálu funkce Lebesgue tedy převedl na určení integrálu jednodušších charakteristických funkcí χ_M množin $M \subset [a, b]$, které nabývají hodnot 0 a 1. V případě, že je M interval, tj. $M = [c, d] \subset [a, b]$, je $\int_a^b \chi_M(x)dx = \int_c^d dx = d - c$, je integrál charakteristické funkce χ_M délkou intervalu M.

Z tohoto důvodu je přirozené považovat integrály charakteristických funkcí χ_M množin $M \subset [a, b]$ za *míru* množin M a problém určení integrálu redukovat na určování míry množin v intervalu $[a, b]$.

Lebesgue v této souvislosti shledal, že funkce ψ, které nabývají jen hodnoty 0 a 1, jsou plně určeny množinou

$$\{x \in [a, b]; \quad \psi(x) = 1\};$$

integrál z takové funkce přes interval $[a, b]$ je kladný nebo nulový a přiřadí tak množině $\{x \in [a, b]; \psi(x) = 1\}$ jisté nezáporné číslo.

Když se podmínky pro integrování, tak jak jsme je v Lebesgueově formě uvedli výše (viz podmínky 1. – 6.), převedou do *geometrické* řeči, dostane se Lebesgue k novému problému, problému míry množiny, který je formulován v následujícím odstavci.

Lebesgueova teorie míry

Lebesgue ve své disertační práci a posléze i v knize *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France* formuloval problém míry takto:

Problémem je přiřadit každé omezené množině E bodů na ose ox jisté číslo $m(E)$, které je kladné nebo nula, nazývá se mírou, a které má následující vlastnosti:[4]

1'. *Dvě stejné množiny*[5] *mají tutéž míru.*

2'. *Množina, která je sjednocením konečného nebo spočetného počtu po dvou disjunktních množin, má míru rovnou součtu měr komponent.*

3'. *Míra množiny všech bodů intervalu $(0, 1)$ je rovna 1.*

Lebesguem formulované podmínky 1. – 6. pro integrál – v tomto případě integrál charakteristické funkce nějaké množiny E – dají vlastnosti 1'. – 3'. stanovené pro míru, jestliže položíme

$$m(E) = \int_a^b \chi_E(x)dx.$$

Nechť $E \subset [a, b]$ je množina. Zařaďme body množiny E do nějakého konečného nebo spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Míra tohoto systému intervalů je podle vlastnosti 2' součtem délek jednotlivých intervalů. Jelikož je E částí uvedeného systému otevřených intervalů – za předpokladu, že množinu E lze skutečně opatřit mírou $m(E)$ – je součet délek jednotlivých intervalů systému, o němž je řeč, horní hranicí míry množiny E, tj. tento součet je větší nebo roven hodnotě $m(E)$. Množina všech horních hranic tohoto typu má evidentně infimum, které Lebesgue označil $m_e(E)$ a nazval *vnější mírou množiny E (mesure extérieure E).*

Na tomto místě je vhodné připomenout, že každá otevřená množina $G \subset [a, b]$ je sestavena z nejvýše spočetného systému navzájem disjunktních otevřených *intervalů.* Na základě vlastnosti 2' lze tedy zjistit míru $m(G)$ pro otevřené množiny G. Lebesgueovu definici vnější míry $E \subset [a, b]$ pak lze také psát ve tvaru

$$m_e(E) = \inf m(G),$$

[4]Symbolem *ox* se rozumí reálná osa, dnes označovaná $\mathbb{R}$.

[5]Podle Lebesguea jsou dvě množiny na přímce stejné, jestliže mají tu vlastnost, že posunutím jedné z nich obě množiny splynou.

kde se infimum bere přes všechny otevřené množiny $G \subset [a, b]$ obsahující množinu E.

Pokud má množina E míru, je vždy $m(E) \leq m(G)$, a proto též (z vlastností infima) je

$$m(E) \leq m_e(E).$$

Buď $C(E)$ doplněk množiny E v $[a, b]$, tj.

$$C(E) = \{x \in [a, b]; x \notin E\}.$$

Pak je

$$m(E) + m(C(E)) = m([a, b]),$$

tj.

$$m(E) = m([a, b]) - m(C(E)) \geq m([a, b]) - m_e(C(E)),$$

protože je $m(C(E)) \leq m_e(C(E))$.

Číslo $m([a, b]) - m_e(C(E))$ pak Lebesgue označil $m_i(E)$ a nazval *vnitřní mírou množiny E (mesure intérieure de E).*

Čísla $m_e(E)$ a $m_i(E)$ (tj. vnější a vnitřní míra množiny E) jsou definována pro jakoukoli množinu E, míra $m(E)$ však pro ni existovat nemusí.

Jsou-li nyní G a $\widetilde{G}$ takové otevřené množiny v $[a, b]$, že $E \subset G$ a $C(E) \subset \widetilde{G}$, je

$$m(G) + m(\widetilde{G}) \geq m([a, b]),$$

a odtud

$$m_e(E) + m_e(C(E)) \geq m([a, b]),$$

neboli

$$m_e(E) \geq m([a, b]) - m_e(C(E)) = m_i(E).$$

Proto je vždy

$$m_e(E) \geq m_i(E).$$

Lebesgue po této úvaze říká, že množiny E, pro které je $m_e(E) = m_i(E)$, jsou *měřitelné* a jejich *míra* $m(E)$ je společná hodnota $m_e(E)$ a $m_i(E)$. Pokud má E rozumně definovanou míru na základě toho, že známe míru intervalu, např. když je $E = [c, d] \subset [a, b]$, není tato nová definice ve sporu s tím, co už víme.

Po této definici pak Lebesgue konstatuje, že zbývá zjistit, zda takto definovaná míra splňuje podmínky 1', 2' a 3' a vskutku je všechny prověří.

Významnou úlohu hrají takové množiny $M \subset \mathbb{R}$, pro které je $m(M) = 0$; jde o *množiny míry nula.*

Jestliže např. funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má nějakou vlastnost pro každé $x \in [a, b] \setminus M$, kde $m(M) = 0$, říká se, že f má tuto vlastnost *skoro všude.* Např. $f(x) = g(x)$ skoro všude v $[a, b]$ znamená, že existuje množina $M \subset [a, b]$ s $m(M) = 0$ tak, že pro $x \in [a, b] \setminus M$ je $f(x) = g(x)$ (tj. platí $f(x) = g(x)$ pro $x \in [a, b]$, až na množinu M, která má nulovou míru). S těmito pojmy se lze v soudobé analýze setkat velmi často.

Lebesgueův integrál se postupně v matematice 20. století zabydloval, své pozice si upevnil zejména tím, že byl velmi vhodný pro vyšetřování ve funkcionální analýze. S touto tendencí je zpočátku svázáno zejména jméno maďarského matematika **F. Riesze** (1880 – 1956).

C. CARATHÉODORY

Po době zrání Lebesgueova přístupu k integraci došlo k prvním pokusům systematicky vyložit matematickou analýzu pomocí Lebesgueova integrálu. Zde jistě stojí za zmínku učebnice v Německu působícího řeckého matematika **C. Carathéodoryho** (1873 – 1950) *Vorlesungen über reelle Funktionen,* která vyšla v roce 1918 u Teubnera v Lipsku.

Současně se také rozvíjel přístup k Lebesgueovu integrálu tím, že se rozpracovávaly nové definice, které byly v případě reálných funkcí ekvivalentní definici, kterou udal Lebesgue, byly však současně takové, že je bylo možné převádět do složitějších abstraktních situací. Do této kategorie patří práce **P. J. Daniella** z let 1917 – 1920 (např. práce *A general form of integral* z Annals of Mathematics z roku 1918). Jeho přístup byl založen na tom, že přirozeným způsobem považoval za známé integrály schodovitých funkcí a ty pak pomocí monotonních limitních přechodů rozšiřoval na třídy funkcí obecnějších. Na integrál pohlížel jako na funkcionál, který podle jistých pravidel přiřadí funkci nějakou hodnotu. Otázkou pak pochopitelně je – stejně jako v případě Riemannova nebo Lebesgueova přístupu – jakým funkcím tuto hodnotu přiřadit lze a jakým nikoliv.

Nevýhody Lebesgueova integrálu

Lebesgueův integrál vykazoval nesporné výhody ve srovnání s Riemannovým integrálem. Připomeňme ty nejvýraznější z nich.

a) *K tomu, aby funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ byla integrovatelná v Lebesgueově smyslu, nemusí být spojitá v žádném bodě intervalu.*

Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná v Riemannově smyslu, je spojitá skoro všude v $[a,b]$. Už tato skutečnost ukazuje, že třída funkcí, které mají Lebesgueův integrál, je bohatší než třída funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu.

Následující tvrzení ukazuje, že pro Lebesgueův integrál platí dosti silná konvergenční věta:

b) *Když je $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ posloupnost funkcí integrovatelných v Lebesgueově smyslu, která bodově konverguje k funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, a je $|f_n| \leq g$, kde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná v Lebesgueově smyslu, potom je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*

integrovatelná v Lebesgueově smyslu a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Když je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkce integrovatelná v Lebesgueově smyslu, potom pro každé $s \in [a,b]$ existuje integrál

$$\int_a^s f(x)dx = F(s)$$

a funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá.* V aritmetizované podobě to znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když je $[c_k, d_k]$ libovolný systém nepřekrývajících se intervalů v $[a,b]$, pro který je $\sum_k m([c_k, d_k]) < \delta$, potom je $\sum_k |F(d_k) - F(c_k)| < \varepsilon$.

Je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutně spojitá, potom má derivaci $F'(x)$ skoro všude, tj. existuje množina $M \subset [a,b]$ s $m(M) = 0$ tak, že pro $x \in [a,b] \setminus M$ existuje

$$F'(x) = \lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

c) *Když má funkce F v intervalu $[a,b]$ omezenou derivaci F', pak je funkce F' integrovatelná v Lebesgueově smyslu v $[a,b]$ a platí*

$$\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

pro každé $x \in [a,b]$.

Pohlédneme-li na tvrzení c), vidíme ihned jeho podobnost se známým Newtonovým – Leibnizovým vztahem. Poněkud omezující je zde ovšem předpoklad, že derivace F' má být omezená.

Trochu jiné je následující tvrzení.

d) *Je-li funkce F spojitá v $[a,b]$ a má-li v $[a,b]$ derivaci F' všude až na spočetnou množinu bodů a je-li F' integrovatelná v Lebesgueově smyslu, pak platí*

$$\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

pro každé $x \in [a,b]$.

V posledním tvrzení d) zase poněkud překvapí požadavek, že F' má být integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Tento požadavek však v této větě vynechat nelze.

Položíme-li totiž

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\dfrac{\pi}{x^2}) & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

dostaneme funkci, která má ve všech bodech intervalu $[0,1]$ derivaci

$$F'(x) = -\frac{2\pi}{x}\cos(\frac{\pi}{x^2}) + 2x\sin(\frac{\pi}{x^2}) = f(x) + g(x),\ 0 < x \leq 1,$$

$$F'(0) = 0.$$

Není těžké se přesvědčit, že funkce F není v $[0,1]$ absolutně spojitá, a proto funkce F' nemůže být v intervalu $[0,1]$ integrovatelná v Lebesgueově smyslu.

Funkce F' ovšem má v intervalu $[0,1]$ Newtonův integrál a platí

$$(N)\int_0^1 F'(x)dx = F(1) - F(0) = 0.$$

Podíváme-li se na funkci F', zjistíme, že sčítanec

$$g(x) = 2x\sin(\frac{\pi}{x^2}),\quad 0 < x \leq 1,\quad g(0) = 0$$

je lebesgueovsky integrovatelný, a že potíže s integrovatelností působí funkce

$$f(x) = -\frac{2\pi}{x}\cos(\frac{\pi}{x^2}),\quad 0 < x \leq 1,\quad f(0) = 0,$$

protože je $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx = \infty$.

Tento klasický příklad ukazuje, že Lebesgueův integrál není obecně způsobilý rekonstruovat funkci na základě znalosti její derivace, tj. s Lebesgueovým integrálem na levé straně nemusí platit vztah

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

pro každé $x \in [a,b]$ ani v tom případě, že derivace F' existuje všude v intervalu $[a,b]$. To ovšem znamená, že pro Lebesgueův integrál neplatí Newtonův – Leibnizův vztah, který po staletí sloužil k výpočtům konkrétních integrálů a je dodnes ideálem v základních kurzech matematické analýzy. Tento fakt byl matematiky pociťován jako podstatný nedostatek Lebesgueova integrálu.

Navíc je z uvedeného příkladu vidět, že přestože pro každé $\varepsilon \in (0,1]$ existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varepsilon^1 F'(x)dx = F(1) - F(\varepsilon) = -F(\varepsilon)$$

a existuje i vlastní limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 F'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+} F(\varepsilon) = 0,$$

neexistuje Lebesgueův integrál $\int_0^1 F'(x)dx$.

Uvedené nedostatky jinak velmi účinného Lebesgueova integrálu vedly záhy po Lebesgueových pracích na začátku století k pokusům vytvořit integrál, pro který by tvrzení výše uvedeného typu d) platilo *bez* předpokladu integrovatelnosti funkce F'. Jednalo se tedy o nalezení teorie takového integrálu, který by zaručil integrovatelnost derivace funkce, pokud tato v nějakém rozumném smyslu existuje.

Řešením tohoto problému se zabývali zejména A. Denjoy a O. Perron. V roce 1912 vytvořil A. Denjoy teorii integrálu, který tomuto požadavku vyhověl; šlo o tzv. *totalizaci (Denjoyův totál),* která představuje poměrně složitý proces založený na použití transfinitních čísel. Brzy potom propojil N. Luzin novou Denjoyovu integraci s pojmem zobecněné absolutní spojitosti (ACG_*). To vedlo k tvrzení:

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná v Denjoyově smyslu, když existuje ACG_* funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tak, že je $F' = f$ skoro všude v $[a,b]$.

To odpovídá následujícímu známému tvrzení pro Lebesgueův integrál:

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná v Lebesgueově smyslu, když existuje absolutně spojitá funkce (AC funkce) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tak, že je $F' = f$ skoro všude v $[a,b]$.

V tomto textu se nebudeme podrobněji zabývat Denjoyovým přístupem k problému.

K dalšímu pokusu o odstranění uvedených nepříjemných vlastností Lebesgueova integrálu došlo v práci *Über den Integralbegriff* (1914) německého matematika **Oskara Perrona** (1880 – 1975). Po relativně krátké době se ukázalo, že Denjoyův a Perronův integrál jsou ekvivalentní pojmy. Perronův postup naznačíme v další části.

Perronův integrál

Budeme uvažovat omezený uzavřený interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Buď dána funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $x \in [a,b]$.
Definujme vztahem

$$\overline{D}g(x) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ x+h\in[a,b]}} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

horní derivaci funkce g v bodě $x \in [a,b]$ a vztahem

$$\underline{D}g(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ x+h\in[a,b]}} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

dolní derivaci funkce g v bodě $x \in [a,b]$.

Pro každé $x \in [a,b]$ je dle definice

$$\underline{D}g(x) \leq \overline{D}g(x),$$

a když má funkce g v bodě $x \in [a,b]$ derivaci $g'(x)$, potom

$$g'(x) = \underline{D}g(x) = \overline{D}g(x).$$

Dá se dokázat, že

když je funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že je

$$\underline{D}g(x) \geq 0 \quad \textit{pro každé} \quad x \in [a,b],$$

potom je funkce g neklesající v $[a,b]$.

Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkce $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *majorantou k funkci f*, když pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$\underline{D}M(x) \geq f(x).$$

Funkce $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *minorantou k funkci f*, když pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$\overline{D}m(x) \leq f(x).$$

Platí následující tvrzení:

Když je $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ majoranta a $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ minoranta k funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, potom pro každé c, d, $a \leq c \leq d \leq b$, platí

$$M(d) - M(c) \geq m(d) - m(c).$$

O. Perron předložil následující definici:

Když k dané funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existuje majoranta i minoranta a když

$$\inf_M (M(b) - M(a)) = \sup_m (m(b) - m(a)) = I \in \mathbb{R},$$

kde infimum bereme přes všechny majoranty a suprémum přes všechny minoranty k funkci f, řekneme, že funkce f má *Perronův integrál* $(P) \int_a^b f(x)dx$ *od a do b* a klademe

$$I = (P) \int_a^b f(x)dx.$$

Dále platí tvrzení:

Pro danou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existuje Perronův integrál $(P) \int_a^b f(x)dx$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje majoranta M a minoranta m k funkci f v intervalu $[a, b]$ tak, že platí

$$M(b) - M(a) - (m(b) - m(a)) \leq \varepsilon.$$

Je užitečné si uvědomit, že když má funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitivní funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tj. když platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, potom má funkce f Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ a má rovněž Perronův integrál $(P) \int_a^b f(x)dx$, protože primitivní funkce F k funkci f je současně majorantou i minorantou k funkci f v $[a, b]$, a dle definicí mají oba integrály stejnou hodnotu. Majoranty a minoranty v definici Perronova integrálu nahrazují primitivní funkci, požadavky na ně kladené jsou ale podstatně slabší, než požadavek existence primitivní funkce v případě Newtonova integrálu. Z tohoto důvodu lze očekávat, že Perronův integrál bude existovat pro širší třídu funkcí, než jsou funkce mající Newtonův integrál.

Posléze se skutečně ukázalo, že když je funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná v Lebesgueově smyslu, je integrovatelná i v Perronově smyslu a integrály podle obou definicí mají stejné hodnoty. Naopak to však není pravda, příklad uvedený v předešlé části to zřetelně ukazuje. Funkce, kterou jsme tam definovali, má Perronův integrál (protože má dokonce integrál Newtonův), ale integrovatelná v Lebesgueově smyslu není.

Na tomto místě ještě připomeňme, že pro Lebesgueův integrál platí, že když je funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná, potom je integrovatelná i její absolutní hodnota $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$. Lebesgueův integrál je proto *absolutně konvergentní.*

Perronův integrál tuto vlastnost nemá. Když je totiž funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná v Perronově smyslu, potom její absolutní hodnota $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná být nemusí. To je rovněž vidět z příkladu, který jsme uvedli výše. Perronův integrál je proto v kategorii tzv. *neabsolutně konvergentních integrálů.*

Pozoruhodné však je, že když je funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná a je integrovatelná i její absolutní hodnota $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ v Perronově smyslu, pak je tato funkce integrovatelná i ve smyslu Lebesgueově.

Teorie integrace, které se zaměřily na odstraňování vad Lebesgueova integrálu, směřovaly hlavně k tomu, aby platil Newtonův – Leibnizův vztah

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Znak integrace $\int$ na levé straně má přitom různé významy, dle toho, jakou teorii integrálu máme na mysli. Vedle toho je také důležité, jaký význam se dá výrazu F' pro danou funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

V případě Lebesgueova integrálu např. víme, že stačí, aby funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ měla derivaci F' skoro všude v intervalu $[a, b]$ a aby tato derivace byla v Lebesgueově smyslu integrovatelná. Pak Newtonův – Leibnizův vztah platí.

Jestliže bude funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutně spojitá, pak má derivaci F' skoro všude v intervalu $[a, b]$ a tato derivace je automaticky integrovatelná, tj. pro absolutně spojité funkce platí uvedený Newtonův – Leibnizův vztah vždy.

S. Saks

V případě, že integrál je Perronův, platí Newtonův – Leibnizův vztah s tím, že F' je tzv. *aproximativní derivace.* S tímto pojmem a ani s dalšími jemnými pojmy moderní reálné analýzy se zde zabývat nebudeme, jenom připomeneme, že moderní teorie integrálu (Lebesgueova a i těch dalších, které po něm postupně byly ve 20. století vybudovány) vedla k mimořádnému rozvoji teorie reálných funkcí, která je pro vědecké bádání v oblasti klasické analýzy v tomto století typická.

První souborná kniha orientovaná na Perronův a Denjoyův integrál spolu se všemi náležitostmi z reálné analýzy je kniha polského matematika **Stanislawa Sakse** (1897 – 1942) *Theorie de l'Intégrale* která vyšla v roce 1933 a potom v přepracované anglické verzi *Theory of the Integral* v roce 1937. Tato kniha pak byla vydána ještě mnohokrát v různých podobách a dodnes je jedním ze základních děl reálné analýzy.

⋆ ⋆ ⋆

Ve dvacátém století došlo k velikému rozvoji pohledů na integrál. Zejména významný byl Lebesgueův objev, který výrazně ovlivnil rozvoj celé matematické analýzy. Postupy Perronova typu vedly k odstranění nesrovnalostí mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem.