Základy teorie matic

19. Podobné matice

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971. pp. 137--143.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401348

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

19. PODOBNÉ MATICE

19.1. Definice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná čtvercová matice stupně n. Matice $\boldsymbol{B}$ téhož stupně n se nazývá *podobná* matici $\boldsymbol{A}$, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{Q}$ stupně n taková, že platí

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}.$$

19.2. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou čtvercové stupně n. Pak platí:

1. Matice $\boldsymbol{A}$ je podobná matici $\boldsymbol{A}$ (reflexivnost).
2. Je-li $\boldsymbol{A}$ podobná $\boldsymbol{B}$, je $\boldsymbol{B}$ podobná $\boldsymbol{A}$ (symetrie).
3. Je-li $\boldsymbol{A}$ podobná $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}$ podobná $\boldsymbol{C}$, pak $\boldsymbol{A}$ je podobná $\boldsymbol{C}$ (tranzitivnost).

Důkaz: 1. První tvrzení je zřejmé (pro $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$).

2. Předně je $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$; odtud máme

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}) = \boldsymbol{A},$$

takže matice $\boldsymbol{Q}^{-1}$ má nyní touž úlohu jako dříve matice $\boldsymbol{Q}$.

3. V třetím případě z relací

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$$

plyne

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P})^{-1}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}),$$

což dokazuje tvrzení 3.

19.3. Poznámky. 1. Každý vztah definovaný mezi prvky, libovolné (neprázdné) množiny, který je reflexivní, symetrický a tranzitivní, nazývá se ekvivalence. Vidíme, že podobnost matic libovolného n-tého řádu je ekvivalencí.

2. Vzhledem k symetrii nemusíme u podobných matic

rozeznávat jejich pořadí a můžeme stručně mluvit o podobných maticích $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

19.4. Věta. Dvě podobné matice mají stejné

1. charakteristické kořeny;
2. charakteristická čísla, příslušná k jednotlivým kořenům.

Důkaz: 1. První tvrzení bylo dokázáno ve větě 16.12.1.

2. Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ podobné matice, takže je např.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

a je-li a kořen jejich charakteristických rovnic, pak

$$\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{Q}$$

a odtud podle 16.12.2 plyne

$$(\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{E})^k = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{E})^k\,\boldsymbol{Q}\,.$$

Protože matice $\boldsymbol{Q}$ je regulární, mají matice $(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{E})^k$, $(\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{E})^k$ stejnou nulitu (srov. větu 16.10 a poznámku 16.11) pro každé přirozené k. Jsou tedy charakteristická čísla příslušná k témuž kořenu a podobných matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejná.

Tím je důkaz proveden.

Z tvrzení 1, 2 a věty 17.8. plyne

3. Dvě podobné matice mají tytéž minimální polynomy.

19.5. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou podobné, takže $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$. Nechť a je α-násobný $(\alpha > 0)$ charakteristický kořen matice $\boldsymbol{B}$ (a ovšem též $\boldsymbol{A}$). Nechť

$$\boldsymbol{y}_1^1, \ldots, \boldsymbol{y}_{\alpha_r}^1; \boldsymbol{y}_1^2, \ldots, \boldsymbol{y}_{\alpha_{r-1}}^2; \ldots; \boldsymbol{y}_1^r, \ldots, \boldsymbol{y}_{\alpha_1}^r \tag{105}$$

je normální soustava vektorů, příslušná k α-násobnému kořenu 0 matice $\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{E}$.

Pak

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_1^1, \ldots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_{\alpha_r}^1, \ldots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_1^r, \ldots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_{\alpha_1}^r \tag{106}$$

je normální soustava vektorů, příslušná k α-násobnému kořenu 0 matice $\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{E}$.

Důkaz: Pro zjednodušení pišme

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{Q}\mathbf{y}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1 = \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_r}^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r = \mathbf{Q}\mathbf{y}_{\alpha_1}^r .$$

Podle předpokladu jsou pro matici $\boldsymbol{B} - a\mathbf{E}$ vektory

$$\mathbf{y}_1^1, \ldots, \mathbf{y}_{\alpha_r}^1 \text{ řádu } r ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{y}_1^r, \ldots, \mathbf{y}_{\alpha_1}^r \text{ řádu } 1 .$$

Přitom platí

$$(\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^1 = \mathbf{y}_1^2, \ldots, (\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_r}^1 = \mathbf{y}_{\alpha_r}^2 ,$$
$$(\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^2 = \mathbf{y}_1^3, \ldots, (\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_{r-1}}^2 = \mathbf{y}_{\alpha_{r-1}}^3 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_1^{r-1} = \mathbf{y}_1^r, \ldots, (\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_{\alpha_2}^{r-1} = \mathbf{y}_{\alpha_2}^r .$$

Mimoto jsou vektory (105) nezávislé.

Z předpokladu, že pro $n = 1, 2, \ldots, \alpha_r$ jsou vektory $\mathbf{y}_n^1$ řádu r, plyne

$$\boldsymbol{0} = (\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})^r\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^r\,\mathbf{Q}\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^r\,\mathbf{x}_n^1 ,$$
$$\boldsymbol{0} \neq (\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{y}_n^1 = \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{Q}\mathbf{y}_n^1 =$$
$$= \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{x}_n^1 .$$

Odtud vynásobením maticí $\mathbf{Q}$ plyne

$$(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^r\,\mathbf{x}_n^1 = \boldsymbol{0} , \quad (\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})^{r-1}\,\mathbf{x}_n^1 \neq \boldsymbol{0} .$$

Jsou tedy vektory $\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1$ řádu r. Podobně zjistíme, že vektory

$$\mathbf{x}_1^2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-1}}^2 \text{ jsou řádu } r - 1 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{x}_1^r, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r \text{ jsou řádu } 1 .$$

Dále pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$, $n = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-k+1}$ plyne z předpokladu

$$(\boldsymbol{B} - a\mathbf{E})\,\mathbf{y}_n^k = \mathbf{y}_n^{k+1} \text{ neboli } \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})\,\mathbf{Q}\mathbf{y}_n^k = \mathbf{y}_n^{k+1}$$

vztah

$$(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})\,\mathbf{x}_n^k = \mathbf{Q}\mathbf{y}_n^{k+1} = \mathbf{x}_n^{k+1},$$

tj.

$$(\boldsymbol{A} - a\mathbf{E})\,\mathbf{x}_n^k = \mathbf{x}_n^{k+1}.$$

Proto zbývá dokázat, že jsou nezávislými vektory

$$\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1; \mathbf{x}_1^2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-1}}^2; \ldots, \mathbf{x}_1^r, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r.$$

Předpokládejme naopak, že jsou závislé, takže existuje relace

$$m_1\mathbf{x}_1^1 + m_2\mathbf{x}_2^1 + \ldots + m_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_1}^r = \mathbf{0},$$

kde aspoň jedno z čísel m_n je různé od nuly.

Pišme předešlou relaci stručněji ve tvaru

$$\sum m_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Odtud je

$$\sum m_n\mathbf{Q}\mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

takže

$$\mathbf{Q}\sum m_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

což značí, že se vektor $\sum m_n\mathbf{y}_n$ transformuje lineární substitucí o matici $\mathbf{Q}$ v nulový vektor. Odtud složením s maticí $\mathbf{Q}^{-1}$ dostaneme

$$\sum m_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Protože čísla m_n nejsou všechna rovna nule, plyne z předešlého vztahu, že vektory $\mathbf{y}_n$ jsou závislé. To však je proti předpokladu a důkaz je hotov.

19.6. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou podobné, takže $\boldsymbol{B} = \mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{Q}$ a

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha; \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta; \ldots; \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma$$

je normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{B}$.

Pak

$$Q\boldsymbol{a}_1, \ldots, Q\boldsymbol{a}_\alpha; Q\boldsymbol{b}_1, \ldots, Q\boldsymbol{b}_\beta; \ldots; Q\boldsymbol{s}_1, \ldots, Q\boldsymbol{s}_\sigma$$

je normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: Tvrzení je důsledkem předešlé věty.

19.7. Věta. (obrácení věty 19.4). Když dvě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož stupně n mají stejné charakteristické kořeny i stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům, pak jsou podobné.

Je-li

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha; \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta; \ldots; \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma, \tag{107}$$

popř.

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_\alpha; \tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_\beta; \ldots; \tilde{\boldsymbol{s}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma \tag{108}$$

normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{A}$, popř. $\boldsymbol{B}$ a

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma],$$
$$\tilde{\boldsymbol{P}} = [\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma],$$

pak matice $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}$ převádí matici $\boldsymbol{A}$ v matici $\boldsymbol{B}$ ve smyslu vzorce $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

Důkaz: Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož řádu n mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům. Nechť (107), popř. (108) je normální soustava vektorů matice $\boldsymbol{A}$, popř. $\boldsymbol{B}$, přičemž vždy k témuž charakteristickému kořenu patří skupiny vektorů označené stejným písmenem, např.

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha; \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_\alpha. \tag{109}$$

Protože matice $\tilde{\boldsymbol{P}}$ je regulární, existuje matice $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}$. Pro ni platí $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{P}}$, tj.

$$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma] = \boldsymbol{Q}[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma] =$$
$$= [\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma],$$

a tedy

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma . \quad (110)$$

Označme pro okamžik např. písmenem x některý charakteristický kořen (obou) matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. K tomuto kořenu patří skupina vektorů (109) pro matici $\boldsymbol{A}$, popř. $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{x}_1^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_r}^1, \ldots, \boldsymbol{x}_1^r, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_1}^r$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1^1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_{\alpha_r}^1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^r, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_{\alpha_1}^r .$$

Přitom vektory

$$\boldsymbol{x}_1^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_r}^1$$

jsou řádu r, atd. Podle významu těchto vektorů platí ($n = 1, 2, \ldots$)

$$(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x}_n^r = \boldsymbol{0}$$

a odtud

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r = \boldsymbol{0} .$$

Podobně je

$$(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E})\, \tilde{\boldsymbol{x}}_n^r = \boldsymbol{0} ,$$

takže

$$(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E})\, \tilde{\boldsymbol{x}}_n^r = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r .$$

Odtud přičtením vektoru $x\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r$ k oběma stranám dostaneme

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r .$$

Dále máme

$$(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x}_n^{r-1} = \boldsymbol{x}_n^r$$

a odtud podle (110) plyne

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^r = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^r .$$

Dále platí

$$(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E})\, \tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1} = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^r .$$

Je tedy

$$(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E})\, \tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1} .$$

Odtud přičtením vektoru $x\tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1}$ k oběma stranám plyne

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{x}}_n^{r-1} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_n^{r-1},$$

atd. Vidíme tedy, že platí vztahy

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\ \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{a}}_2, \ldots, \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{s}}_\sigma = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}_\sigma,$$

takže je

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{P}} = (\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\,\tilde{\boldsymbol{P}}. \tag{111}$$

Protože matice $\tilde{\boldsymbol{P}}$ je regulární, násobením předešlé relace (111) inverzní maticí $\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}$ obdržíme

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

čímž je věta dokázána.

19.8. Věta. Každé dvě čtvercové sdružené matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ jsou podobné.

Důkaz plyne z věty 19.7. a poznámky 17.7.