Ú v o d

1. P r e d m e t   š t ú d i a

Diferenciálne (d.)rovnice sa rozdeľujú na obyčajné a parciálne. Obyčajnou d. rovnicou rozumieme vzťah medzi hodnotami nezávisle premennej a príslušnými hodnotami nejakej funkcie tejto premennej a niektorými jej deriváciami. Parciálna d. rovnica je vzťah medzi hodnotami aspoň dvoch nezávisle premenných a príslušnými hodnotami nejakej funkcie a niektorými jej parciálnymi deriváciami. Rádom d. rovnice obyčajnej alebo parciálnej rozumieme rád najvyššej derivácie alebo parciálnej derivácie, ktorá sa v d. rovnici vyskytuje. Napríklad

$$y' = xy, \quad xy'' = y \tag{1}$$

predstavujú d. rovnice obyčajné 1. a 2. rádu a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

d. rovnice parciálne tiež 1. a 2. rádu. Spravidla môžeme obyčajnú d. rovnicu n-tého rádu vyjadriť vzorcom tvaru

$$F\,(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

kde F značí istú funkciu $n + 2$ premenných x, y, y', ..., $y^{(n)}$ definovanú v nejakom obore a podobne parciálnu d. rovnicu n-tého rádu, napr. o dvoch nezávisle premenných vzorcom

$$\Phi\,\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

Riešením alebo integrálom d. rovnice obyčajnej (parciálnej) rozumieme každú funkciu, ktorá jej vyhovuje, t.j. ktorá sa vyznačuje tým, že hodnoty nezávisle premennej(premenných) a príslušné hodnoty funkcie a jej derivácie (parciálnych derivácií) sú vo vzťahu danom d. rovnicou. Napr. funkcia daná pre všetky čísla x vzorcom

$$y(x) = C\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

kde C značí ľubovoľnú konštantu, je riešením prvej d. rovnice (1), keďže v každom čísle x je

$$y'(x) = x \cdot C e^{\frac{x^2}{2}}$$

takže každá hodnota nezávisle premennej x a príslušné hodnoty tejto funkcie $y(x)$ a jej derivácie $y'(x)$ sú vo vzťahu

$$y'(x) = x \cdot y(x),$$

ktorý vyjadruje prvá d. rovnica (1). Tento príklad nás tiež poučuje o tom, že d. rovnica môže mať nekonečne mnoho riešení, lebo vidíme, že rôzne konštanty C dávajú rôzne riešenia.

Predchádzajúce pojmy sa dajú rozšíriť i na systémy d. rovníc obyčajných alebo parciálnych, ktoré vyjadrujú vždy niekoľko vzťahov medzi hodnotami nezávisle premennej (premenných) a príslušnými hodnotami niekoľkých funkcií a ich derivácií (parciálnych derivácií).

D. rovnice sa v matematike vyskytujú od objavenia d. a integrálneho počtu v 17. storočí. Z jednoduchých úloh o dotyčniciach kriviek sa vyvinula teória d. rovníc, ktorá je dnes veľmi rozsiahla a obsažná a patrí k najdôležitejším v matematike. Niektoré obory v matematike, napr. d. geometria, sú s ňou v najužšej súvislosti, ale teória d. rovníc má veľkú dôležitosť i pre iné disciplíny, fyziku, chémiu, inžinierske vedy a i., ktorým je neoceniteľnou pomôckou.

V teórii d. rovníc sa d. rovnice a systémy d. rovníc triedia, zisťujú sa podmienky pre existenciu a počet ich riešení, popisujú sa metódy vedúce k explicitnému vyjadreniu a k numerickým alebo grafickým výpočtom riešenia, skúmajú sa vlastnosti riešení v súvislosti so známymi vlastnosťami d. rovníc, predovšetkým v okolí tzv. singulárnych bodov, študujú sa význačné d. rovnice, a systémy d. rovníc majúce zvláštnu dôležitosť pre použitie v iných vedných oboroch a pod. Metódy vedúce k týmto cieľom, pravda, i výsledky sú najrozmanitejšie a závisia spravidla už od prvých predpokladov o povahe študovaných d. rovníc, predovšetkým od toho, či funkcie ich vytvárajúce sú reálne funkcie reálnych premenných, prípadne s ďalšími vlastnosťami, napr. spojité alebo analytické funkcie komplexných premenných.

<u>V ďalšom sa budeme zaoberať len d. rovnicami obyčajnými</u> a s ohľadom na to budeme stručne hovoriť o d. rovniciach, vynechávajúc prívlastok <u>obyčajných</u>. Obory definície, ktoré sa v našich úvahách vyskytnú, budú reálne a tiež funkcie, o ktorých budeme uvažovať, budú reálne.

Z veľmi obsažnej látky sú v týchto skriptách spracované samozrejme len niektoré kapitoly. Ich výber som urobil vzhľadom na to, aby čitateľ získal jednak solídne základy teórie obyčajných d. rovníc, jednak široký rozhľad po príslušných metódach a výsledkoch. Predovšetkým sa snažím zaviesť čitateľa dosť ďaleko od látky preberanej v bežných učebniciach a v niektorých smeroch až k výsledkom z najposlednejších čias. Na mnohých miestach, predovšetkým, kde ide o možnosti širokého rozšírenia vyloženej látky, uvádzam bez podrobnejšieho výkladu prehľadné pohľady na tieto širšie teórie. Svoj výklad spestrujem mnohými príkladmi, ktoré robím so zreteľom objasniť príslušné situácie a zvýšiť čitateľov záujem.

Pôvodne český rukopis týchto skrípt preložil do slovenčiny doc. dr. Michal Greguš, ktorému súčasne ďakujem i za mnohé cenné rady, ktorými prispel k zlepšeniu textu. Rovnako som zaviazaný členom Katedry matematiky pri UK v Bratislave s. Šedovi, s. Mamrilovi, s. Moravčíkovi a s. Neubrunovej za technickú pomoc a s. Lettrichovi za starostlivé narysovanie obrázkov.

O. Borůvka