4 Teorie transformací

Tato kapitola bude věnována popisu transformací dvou libovolných rovnic (q), (Q). Na rozdíl od předchozí kapitoly budeme uvažovat rovnice oscilatorické i neoscilatorické.

Transformační problém obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu se poprvé objevil roku 1834 v práci *De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis* německého matematika E. E. Kummera a proto bývá označován jako Kummerův transformační problém. V této práci E. E. Kummer poprvé uvažoval transformaci (zachováváme Kummerovo označení a způsob zápisu)

$$y(x) = w(x)v(z), \tag{4.0.1}$$

která převede řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice 2. řádu tvaru

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

na řešení $v = v(z)$ rovnice

$$\frac{d^2v}{dz^2} + P(z)\frac{dv}{dz} + Q(z)v = 0.$$

Přitom jeho největším přínosem bylo objevení nelineární diferenciální rovnice 3. řádu, jejímž řešením dostaneme funkci $z = z(x)$ vystupující v transformační rovnici (4.0.1)

$$2\frac{d^3z}{dzdx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dzdx}\right)^2 - Z\frac{dz^2}{dx^2} + X = 0,$$

kde $Z = 2\frac{dP}{dz} + P^2 - 4Q$, $X = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q$.

E. E. Kummer odvodil také vztah pro funkci $w = w(x)$ ve tvaru

$$w^2 = c \cdot e^{\int Pdz} \cdot e^{-\int pdz} \cdot \frac{dx}{dz},$$

kde c je libovolná konstanta a e základ přirozeného logaritmu.

Delší dobu zůstávala nezodpovězená otázka, zda Kummerova transformace (4.0.1), která je lineární vzhledem k řešením y a v, nemůže být nahrazena obecnějším vztahem

$$y(x) = f(x, v(z(x))).$$

Koncem devatenáctého století dokázali nezávisle na sobě různými metodami P. Stäckel (J. reine angew. Math. 111 (1893)), S. Lie (Leipziger Ber. 1894) a E. J. Wilczynski (Amer. J. Math. 23 (1901)), že Kummerova transformace tvaru (4.0.1) je nejobecnější transformací, která převádí libovolnou lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu ($n \geq 2$) na rovnici téhož typu.

Po vydání Kummerova pojednání se začaly objevovat práce mnoha matematiků (F. Brioschi, A. R. Forsyth, G. H. Halphen, E. Laguerre aj.), v nichž byly studovány lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, jejich transformace, kanonické tvary atd. Avšak roku 1910 G. D. Birkhoff ukázal, že všechny doposud uveřejněné výsledky týkající se transformací mají pouze lokální charakter.

Takové výsledky ovšem nedostačují pro studium problémů globálního charakteru, jako je např. ohraničenost, periodicita, oscilatorické chování, nenulová řešení a mnoho dalších.

Samozřejmě, že jisté izolované výsledky globálního charakteru existovaly, např. Sturmova věta o separaci nulových bodů řešení lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Ovšem neexistovala ucelená teorie s dostatečně obecnými metodami k řešení globálních otázek.

Globálními vlastnostmi lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v Jacobiho tvaru se v padesátých letech tohoto století začal systematicky zabývat O. Borůvka.

O. Borůvka vyšel z výsledků E. E. Kummera, aplikoval je na rovnice v Jacobiho tvaru

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \quad j = (a,b),\ -\infty \le a < b \le \infty, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \quad Q \in C^0(J), \quad J = (A,B),\ -\infty \le A < B \le \infty \tag{Q}$$

a postupně vytvořil obsáhlou teorii globálních transformací těchto rovnic, jejíž základy vyložíme v této kapitole.

Definice 4.0.1 Nechť $h(t)$, $X(t)$ jsou funkce definované na otevřeném intervalu $k \subseteq j$ takové, že platí

1. $h \in C^2$, $X \in C^3$
2. $h \cdot X' \neq 0$ pro každé $t \in k$
3. $K := X(k) \subseteq J$.

Transformací rovnic (q), (Q) rozumíme uspořádanou dvojici $[h, X]$ funkcí $h(t)$, $X(t)$ takovou, že pro každé řešení Y rovnice (Q) je funkce

$$y(t) = h(t)Y(X(t)) \tag{4.0.2}$$

řešením rovnice (q).

Funkce X se nazývá *transformační funkce rovnic* (q), (Q) nebo *jádro transformace* $[h, X]$ a funkce h *faktor transformace* $[h, X]$.

Poznámka. Mluvíme-li o transformaci rovnic (q), (Q) ve smyslu předchozí definice, uvažujeme transformaci řešení Y na intervalu $K := X(k) \subseteq J$ na řešení y na intervalu $k \subseteq j$.

Nebo ještě obecněji, transformaci části řešení Y na intervalu $I := X(i) \subseteq K \subseteq J$ na část řešení y na intervalu $i \subseteq k \subseteq j$.

Již jsme se zmínili, že transformacemi rovnic 2. řádu se poprvé zabýval E. E. Kummer, jehož největším přínosem byl objev nelineární diferenciální rovnice 3. řádu udávající vztah mezi koeficienty rovnic a transformační funkcí. Aplikujeme-li tento vztah na rovnice v Jacobiho tvaru dostaneme výsledek zformulovaný v následující větě.

Věta 4.0.2 *Každá transformační funkce X rovnic (q), (Q) je ve svém definičním intervalu $k \subseteq j$ řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu, tzv. Kummerovy rovnice*

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t) \tag{Qq}$$

a faktor h transformace $[h, X]$ rovnic (q), (Q) je jednoznačně určen funkcí X až na multiplikativní konstantu $c \neq 0$

$$h(t) = \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{4.0.3}$$

Poznámky.

1. Podle předchozí definice transformační funkcí rovnic (q), (Q) rozumíme každou funkci $X \in C^3$, $X' \neq 0$ pro niž platí, že uspořádaná dvojice $[h, X]$ reprezentuje transformaci rovnic (q), (Q). Nadále budeme libovolnou funkci f splňující podmínky $f \in C^3$, $f' \neq 0$ nazývat funkcí *regulární*.

2. *Transformačním problémem* budeme rozumět problém určení všech možných transformací rovnic (q), (Q), tj. všech možných transformačních funkcí rovnic (q), (Q) a zkoumání jejich vlastností.

Důkaz Věty 4.0.2**.**

Odvození rovnice (Qq) a vztahu (4.0.3) provedeme pomocí transformace závisle a nezávisle proměnné.

Uvažujme diferenciální rovnice (q), (Q) a proveďme transformaci závisle proměnné $y(t) = h(t)z(t)$ a transformaci nezávisle proměnné $z(t) = Y(T)$, $T = X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$. Podle Věty 1.2.1 a jejího Důsledku 1.2.2 víme, že výsledná transformace $y(t) = h(t)Y(X(t))$ převádí řešení Y diferenciální rovnice (Q) na intervalu J na řešení y diferenciální rovnice (q) na intervalu j a pro nosič Q platí

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)). \tag{4.0.4}$$

Nejprve vyjádřeme faktor h transformace $[h, X]$ pomocí funkce X. Derivací vztahu $X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$ dostaneme $X'(t) = h^{-2}(t)$, odkud

$$h(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{4.0.5}$$

Zbývá odvození rovnice (Qq). Dosazením funkce h ze vztahu (4.0.5) do vztahu (4.0.4) obdržíme výraz

$$q(t) = Q(T)X'^2 - \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} + \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2},$$

což je hledaná rovnice (Qq)

$$q(t) = -\{X, t\} + Q(T)X'^2.$$

Teorii transformací lze rozdělit na dvě části podle toho, jaké podmínky klademe na transformační funkci. O *obecných transformacích* mluvíme v případě, že neklademe na transformační funkci žádné další požadavky kromě podmínek uvedených v Definici 4.0.1, o *úplných transformacích* v případě, že definiční obor transformační funkce je shodný s definičním oborem rovnice (q) a obor hodnot transformační funkce s definičním oborem rovnice (Q).

4.1 Obecné transformace

4.1.1 Řešení Kummerovy rovnice (Qq)

Hlavní roli v celé teorii transformací hraje Kummerova rovnice (Qq), neboť jejími řešeními jsou transformační funkce. Následující odstavec je proto věnován otázkám týkajícím se řešení této rovnice.

Řešením Kummerovy rovnice

$$-\{X,t\}+Q(X)X'^2=q(t) \tag{Qq}$$

rozumíme funkci X definovanou v intervalu $k\subseteq j$. Přitom nás budou zajímat pouze řešení regulární, tj. $X\in C^3$ a $X'\neq 0$ pro každé $t\in k$; $X(k)=K\subseteq J$.

Lze dokázat, že je-li funkce $X(t)$ regulárním řešením rovnice (Qq) na intervalu $k\subseteq j$, pak existuje inverzní funkce $x(T)$ k funkci X definovaná na intervalu $K=X(k)\subseteq J$ a platí, že $x(T)$ je řešením rovnice

$$-\{x,T\}+q(x)\dot{x}^2=Q(T). \tag{qQ}$$

Ve všech dále uvedených tvrzeních budeme mluvit pouze o funkci X, tj. řešení rovnice (Qq). Pro funkci x inverzní k X platí tvrzení analogická.

Víme, že každá transformační funkce X rovnic (q), (Q) je regulárním řešením Kummerovy rovnice (Qq). Nyní odpovězme na otázku, zda také naopak každé regulární řešení rovnice (Qq) je transformační funkcí rovnic (q), (Q).

Věta 4.1.1 *Nechť funkce $X(t)$ je regulárním řešením rovnice (Qq) na intervalu $k\subseteq j$. Vyberme $t_0\in k$ libovolně a označme hodnoty funkce X, X', X'' v bodě t_0 jako X_0, X_0', X_0''.*

Uspořádaná dvojice funkcí

$$[\frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}},X(t)],$$

kde c je libovolná nenulová konstanta, reprezentuje transformaci $[h,X]$ rovnic (q), (Q), kdy je každé řešení Y rovnice (Q) transformováno na funkci

$$\overline{y}(t)=c\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}, \tag{4.1.1}$$

která je částí řešení y rovnice (q) na intervalu k splňující počáteční podmínky

$$y(t_0)=c\frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}},\quad y'(t_0)=c\left[\frac{\dot{Y}(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}X_0'-\frac{1}{2}\frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\frac{X_0''}{X_0'}\right]. \tag{4.1.2}$$

Důkaz.

Nechť X je regulární řešení rovnice (Qq) na intervalu k a Y libovolné řešení rovnice (Q) na intervalu J. Budeme dokazovat, že funkce $\overline{y}$ daná vztahem (4.1.1) je částí jistého řešení y rovnice (q) splňující podmínky (4.1.2).

Funkce $\overline{y}$ má na intervalu k druhou derivaci

$$\overline{y}''(t)=c\frac{\ddot{Y}(X)}{\sqrt{|X'|}}X'^2-c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}\{X,t\}. \tag{4.1.3}$$

Dále využijeme toho, že funkce Y splňuje rovnici (Q) a funkce X rovnici (Qq). V každém bodě $t \in k$ tedy platí

$$\ddot{Y}(X) = Q(X)Y(X), \qquad -\{X, t\} = -Q(X)X'^2 + q(t).$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (4.1.3) dostáváme

$$\overline{y}''(t) = c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}Q(X)X'^2 + c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}[-Q(X)X'^2 + q(t)],$$

odkud

$$\overline{y}''(t) = q(t)\overline{y}.$$

Tedy funkce $\overline{y}$ je řešením rovnice (q). Podmínky (4.1.2) obdržíme derivací vztahu (4.1.1).

Důsledek 4.1.2 *Funkce X je regulárním řešením rovnice (Qq) právě tehdy, když je transformační funkcí rovnic (q), (Q).*

Následující dvě věty ukazují vztah mezi řešením rovnice (Qq) a prvními fázemi rovnic (q) a (Q). Na základě jejich platnosti následně dokážeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq).

Věta 4.1.3 *Nechť $X(t)$ je regulární řešení rovnice (Qq) na intervalu $k \subseteq j$. Vyberme $t_0 \in k$ libovolně a označme hodnoty funkce X, X', X'' v bodě t_0 jako X_0, X_0', X_0''. Dále nechť $\mathcal{A}$ je libovolná první fáze rovnice (Q).*

Pak funkce $\overline{\alpha}$ definovaná na intervalu k vztahem

$$\overline{\alpha}(t) = \mathcal{A}(X(t)), \qquad t \in k \tag{4.1.4}$$

je částí jisté první fáze α rovnice (q), která je jednoznačně určena Cauchyovskými počátečními podmínkami

$$\alpha(t_0) = \mathcal{A}(X_0), \qquad \alpha'(t_0) = \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0', \qquad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathcal{A}}(X_0)X_0'^2 + \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0''.$$

Důkaz.

Nechť $\mathcal{A}$ je první fází rovnice (Q), tj. první fází libovolné báze (U, V) rovnice (Q). Tedy v intervalu J platí tg $\mathcal{A} = U/V$ všude, kromě nulových bodů řešení V. Platí, že obrazem řešení U, V v transformaci $[h, X]$ rovnic (q), (Q) jsou funkce

$$\overline{u}(t) = h(t)U(X(t)), \qquad \overline{v}(t) = h(t)V(X(t)),$$

jež jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q) definovaná na intervalu k a jsou částí nějakých řešení u, v rovnice (q).

Nechť α_0 je první fází báze (u, v). Pak pro $t \in k$ dostáváme

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{\overline{u}(t)}{\overline{v}(t)} = \frac{h(t)U(X(t))}{h(t)V(X(t))} = \frac{U(X(t))}{V(X(t))} = \mathrm{tg}\,\mathcal{A}(X(t)).$$

Odtud $\alpha_0(t) + m\pi = A(X(t))$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Protože α_0 je první fází báze (u, v), je i funkce $\alpha = \alpha_0(t) + m\pi$ první fází báze (u, v) a $\overline{\alpha}$ část fáze α definované na intervalu k.

Derivací vztahu (4.1.4) obdržíme počáteční podmínky pro $\alpha'(t_0)$ a $\alpha''(t_0)$.

Poznámka. Za použití funkce x inverzní k X platí, že funkce $\overline{\mathcal{A}}$ definovaná na intervalu $K = X(k)$ vztahem

$$\overline{\mathcal{A}}(T) = \alpha(x(T)), \qquad T \in K$$

je částí první fáze $\mathcal{A}$ rovnice (Q) a fáze $\mathcal{A}$ je určena odpovídajícími Cauchyovskými počátečními podmínkami.

Věta 4.1.4 *Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou libovolné fáze rovnic (q), (Q) takové, že $\alpha(j) \cap \mathcal{A}(J) \neq 0$.*
Označíme-li

$$L = \alpha(j) \cap \mathcal{A}(J), \qquad k = \alpha^{-1}(L), \qquad K = \mathcal{A}^{-1}(L),$$

pak ke každému číslu $t \in k$, resp. $T \in K$ existuje právě jedno číslo $Z(t) \in K$, resp. $z(T) \in k$ splňující rovnici

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(Z(t)), \qquad \textit{resp.} \qquad \alpha(z(T)) = \mathcal{A}(T). \tag{4.1.5}$$

Důkaz.

Zvolme $t \in k$ libovolně. Pak $\alpha(t) \in L = \mathcal{A}(K)$ a protože fáze $\mathcal{A}$ roste nebo klesá, existuje právě jedno číslo $Z(t) \in K$ splňující první rovnici (4.1.5). Analogicky pro druhou rovnici (4.1.5).

Poznámka. Funkce $Z(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$, $z(T) = \alpha^{-1}\mathcal{A}(T)$, definované vztahem (4.1.5) v intervalech k, K jsou zřejmě navzájem inverzní, náleží do třídy C^3 a jsou regulárním řešením rovnic (Qq), (qQ). Nazýváme je *řešení generovaná fázemi α, $\mathcal{A}$.*

Následující věta je jednou z nejdůležitějších v teorii obecných transformací.

Věta 4.1.5 *(O existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq))*
Nechť $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X_0'(\neq 0)$, X_0'' jsou libovolné. Pak existuje právě jedno „nejširší“ řešení $Z(t)$ rovnice (Qq) v jistém intervalu $k \subseteq j$ splňující Cauchyovy podmínky

$$Z(t_0) = X_0, \qquad Z'(t_0) = X_0', \qquad Z''(t_0) = X_0'', \tag{4.1.6}$$

kde „nejširší“ znamená, že každé jiné řešení (Qq) splňující stejné počáteční podmínky je částí $Z(t)$.

Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou libovolné první fáze rovnic (q), (Q) takové, že $\alpha(j) \cap \mathcal{A}(J) \neq 0$ a nechť jejich hodnoty v bodech t_0, X_0 jsou dány vztahy

$$\alpha(t_0) = \mathcal{A}(X_0), \qquad \alpha'(t_0) = \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0', \qquad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathcal{A}}(X_0)X_0'^2 + \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0''. \tag{4.1.7}$$

Pak $Z(t)$ je řešení rovnice (Qq) generované fázemi α, $\mathcal{A}$ a platí

$$Z(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t)), \qquad t \in k.$$

Důkaz.

Vyberme jednu z fází, například fázi α, libovolně. Pak podle Věty 2.1.5 je fáze $\mathcal{A}$ jednoznačně určena hodnotami $\mathcal{A}(X_0)$, $\dot{\mathcal{A}}(X_0)$, $\ddot{\mathcal{A}}(X_0)$, které jsou dány vztahy (4.1.7) a $X_0 \in J$ libovolně.

Řešení $Z(t)$ generované fázemi α, $\mathcal{A}$ zřejmě splňuje počáteční podmínky (4.1.6). Chceme ukázat, že každé řešení $X(t)$ rovnice (Qq) definované v intervalu $k \subseteq j$ počátečními podmínkami (4.1.6) je částí řešení $Z(t)$. Podle Věty 4.1.3 je funkce $\overline{\alpha}(t) = \mathcal{A}(X(t))$ definovaná v intervalu k částí jisté první fáze α_0 rovnice (q), která je jednoznačně určena stejnými počátečními podmínkami (4.1.6) jako fáze α. Z toho plyne, že $\alpha_0(t) = \alpha(t)$ pro $t \in j$ a dále $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$ pro $t \in k$. Tedy $X(t)$ je částí $Z(t)$ na intervalu k.

4.1.2 Transformace řešení rovnic (q), (Q)

Nechť jsou dána libovolná řešení y, Y rovnic (q), (Q). Budeme se zabývat otázkou, zda můžeme při užití vhodného řešení $X(t)$ rovnice (Qq) transformovat jedno z nich, např. Y, vztahem

$$\overline{y}(t) = \frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

na část $\overline{y}$ druhého řešení y, kde $t \in k \subseteq j$. Jak dále uvidíme, odpověď na tuto otázku bude za jistých předpokladů kladná a dokonce budeme moci předepsat libovolnou hodnotu X_0, kterou funkce X nabývá v libovolném bodě $t_0 \in j$, tj. $X(t_0) = X_0$.

Věta 4.1.6 *Nechť y, Y jsou libovolná řešení rovnic (q), (Q) definovaná na intervalech j, J. Dále nechť $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ jsou libovolná čísla splňující jednu z následujících podmínek:*

$$(a)\ y(t_0) \neq 0 \neq Y(X_0) \qquad (b)\ y(t_0) = 0 = Y(X_0).$$

Pak existuje nejširší řešení X rovnice (Qq) nabývající hodnoty X_0 v bodě t_0, tj. $X_0 = X(t_0)$, které transformuje řešení Y na intervalu J na část $\overline{y}$ řešení y vztahem

$$\overline{y}(t) = \varepsilon \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$, přičemž v případě (a) je

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} y(t_0) Y(X_0)$$

a v případě (b)

$$\varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sgn} y'(t_0)\dot{Y}(X_0) & \text{pro } X \text{ rostoucí,} \\ -\operatorname{sgn} y'(t_0)\dot{Y}(X_0) & \text{pro } X \text{ klesající.} \end{cases}$$

V případě (a) existuje právě jedno rostoucí a právě jedno klesající nejširší řešení X rovnice (Qq), v případě (b) existuje nekonečně mnoho rostoucích a nekonečně mnoho klesajících řešení X.

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 210–211.

Poznámka. Podle předchozí věty tedy ke každému řešení Y na J a řešení y na j existuje funkce X definovaná na intervalu $k \subseteq j$, jejímž oborem hodnot je interval $X(k) = J$, která transformuje řešení Y na J na řešení $\overline{y}$ na intervalu $k \subseteq j$.

Speciální případ, kdy je řešení Y na intervalu J transformováno na řešení y na intervalu j, nastane za předpokladu, že funkce X je definovaná na intervalu $k = j$ a navíc $X(j) = J$. Tomuto případu se budeme věnovat v odstavci *Úplné transformace.*

4.1.3 Vztah mezi transformačním problémem a centrálními dispersemi

V tomto odstavci se omezíme pouze na oscilatorické diferenciální rovnice (q) s nosičem $q < 0$ a budeme zkoumat vztahy mezi transformační funkcí X a centrálními dispersemi.

Podle Věty 3.1.3 platí, že všechny centrální disperse 1. druhu φ_n rovnice (q) jsou v intervalu j řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$-\{\varphi_n, t\} + q(\varphi_n){\varphi_n}'^2 = q(t) \tag{qq}$$

a dále za předpokladu $q \in C^2$ jsou všechny centrální disperse ψ_n, χ_n, ω_n 2., 3. a 4. druhu v intervalu j řešením rovnic $(\widehat{q}\widehat{q})$, $(\widehat{q}q)$, $(q\widehat{q})$. Vidíme, že tyto rovnice jsou speciálními případy Kummerovy rovnice (Qq).

Také jsme ukázali, že centrální disperse libovolného druhu je třídy C^3 a má nenulovou derivaci. Můžeme tedy říci, že centrální disperse libovolného druhu je regulárním řešením rovnice (Qq) a podle Důsledku 4.1.2 je tedy transformační funkcí reprezentující transformaci rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$. Uvažujeme přitom všechny čtyři vzájemně možné transformace. Tyto úvahy vedou k následující větě, která je pouze jinou formulací Věty 3.1.3.

Věta 4.1.7 *Nechť y značí libovolné řešení rovnice (q) a y_1 řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Dále nechť φ_n, ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,\ m = \pm 1, \pm 2, \dots$) jsou libovolné centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q).*

Pak uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}}, \varphi_n(t)\right]$$

reprezentuje transformaci rovnic (q), (q), kdy je každé řešení y rovnice (q) transformováno na to samé řešení y.

Dále za předpokladu $q \in C^2$ platí, že uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\psi_n'(t)}}, \psi_n(t)\right]$$

reprezentuje transformaci rovnic $(\widehat{q})$, $(\widehat{q})$, kdy je každé řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$ transformováno na to samé řešení y_1,

$$\left[\frac{(-1)^m}{\sqrt{\chi_m'(t)}}, \chi_m(t)\right]$$

transformaci rovnic (q), $(\widehat{q})$, kdy je každé řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$ transformováno na řešení y rovnice (q) a

$$\left[\frac{(-1)^m}{\sqrt{\omega_m'(t)}}, \omega_m(t)\right]$$

transformaci rovnic $(\widehat{q})$, (q), kdy je každé řešení y rovnice (q) transformováno na řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$.

Důkaz.

Větu lze jednoduše dokázat pomocí vztahů pro derivace dispersí. Například ze vztahu (3.1.3) pro centrální dispersi 1. druhu plyne

$$y(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}} y(\varphi_n(t)),$$

kde y je řešení rovnice (q). Tedy uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}}, \varphi_n(t)\right]$$

reprezentuje transformaci rovnic (q), (q), kdy je každé řešení rovnice (q) transformováno na to samé řešení.

Analogicky dostaneme vztahy pro centrální disperse ostatních druhů.

Shrneme-li předchozí poznatky, můžeme říci, že centrální disperse oscilatorických diferenciálních rovnic jsou jistým řešením Kummerova transformačního problému pro diferenciální rovnici (q) a její průvodní rovnici $(\widehat{q})$.

4.1.4 Vztah mezi transformačním problémem a obecnými dispersemi

V tomto odstavci se opět omezíme na oscilatorické rovnice a ukážeme si souvislost mezi obecnými dispersemi a transformační funkcí oscilatorických rovnic (q), (Q).

Podle Věty 3.2.4 platí, že každá obecná disperse X rovnic (q), (Q) je v intervalu j řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t),$$

která je Kummerovou rovnicí (Qq).

Také jsme ukázali, že pro obecnou dispersi X na intervalu j platí $X \in C^3$ a $X' \neq 0$. Můžeme tedy říci, že obecná disperse X je regulárním řešením rovnice (Qq) a podle Důsledku 4.1.2 je tedy transformační funkcí reprezentující transformaci rovnic (q), (Q). Přesnou transformační rovnici uvádí následující věta.

Věta 4.1.8 *Nechť X je obecná disperse diferenciálních rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Nechť $Y \in R$ je libovolné řešení rovnice (Q) a $y \in r$ jeho vzor v lineárním zobrazení p. Pak funkce $Y(X)/\sqrt{|X'|}$ je řešením rovnice (q) a v intervalu j platí*

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = \pm\sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|}\, y(t),$$

kde znaménko nezávisí na výběru řešení Y.

Důkaz.

Nechť X je obecná disperse rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Dále nechť α je libovolná fáze báze (u, v) rovnice (q) taková, že $\alpha(t_0) = 0$ a $\mathcal{A}$ libovolná fáze báze (U, V) rovnice (Q) taková, že $\mathcal{A}(T_0) = 0$. Pak podle Věty 3.2.3 obecná disperse X splňuje v intervalu j funkcionální rovnici

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)). \tag{4.1.8}$$

Vyjádřeme nyní řešení y a jeho obraz Y v zobrazení p pomocí fází. Využijeme přitom vztahy (2.1.6), tj.

$$u = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'|}} \sin \alpha, \qquad v = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'|}} \cos \alpha.$$

Víme, že obecné řešení y lze vyjádřit ve tvaru $y = c_1 u + c_2 v$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Zvolíme-li $c_1 = \gamma \cos k_2$, $c_2 = \gamma \sin k_2$ ($\gamma > 0, 0 \leq k_2 < 2\pi$), pak pro řešení y dostáváme

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad k_1 = \gamma\varepsilon\sqrt{|w|}. \tag{4.1.9}$$

Obrazem řešení $y = c_1 u + c_2 v$ v zobrazení p je řešení $Y = c_1 U + c_2 V$, kde U, V jsou dány vztahy

$$U = E \frac{\sqrt{|W|}}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}} \sin \mathcal{A}, \qquad V = E \frac{\sqrt{|W|}}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}} \cos \mathcal{A}.$$

Po dosazení dostáváme

$$Y = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} k_1 \frac{\sin(\mathcal{A} + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}}.$$

Tedy

$$Y(X(t)) = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} k_1 \frac{\sin(\mathcal{A}(X(t)) + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}(X(t)) \cdot X'(t)|}},$$

odkud za využití vztahu (4.1.8) a (4.1.9) plyne

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} y(t),$$

kde $\varepsilon E = \pm 1$.

Poznámky.

1. Při vhodně zvoleném zobrazení $\overline{p}$, kde p a $\overline{p}$ jsou lineárně závislá, dostáváme

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = y(t).$$

2. Nechť U, V jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (Q) a W je wronskián báze (U, V). Pak řešení

$$u = \frac{U(X)}{\sqrt{|X'|}}, \qquad v = \frac{V(X)}{\sqrt{|X'|}}$$

rovnice (q) jsou také lineárně nezávislá a pro wronskián w báze (u, v) platí

$$w = W \cdot \operatorname{sgn} X'.$$

Z Věty 4.1.8 vidíme, že každá obecná disperse oscilatorických rovnic (q), (Q) reprezentuje transformační funkci rovnic (q), (Q), tj. je řešením Kummerovy rovnice (Qq). A naopak, podle Věty 3.2.5 je množina všech regulárních řešení rovnice (Qq) tvořena právě obecnými dispersemi rovnic (q), (Q). Z těchto úvah okamžitě plyne následující tvrzení.

Důsledek 4.1.9 *Funkce X je transformační funkcí oscilatorických rovnic (q), (Q) právě tehdy, když je obecnou dispersí rovnic (q), (Q).*

Poznámky.

1. Vztah mezi transformačním problémem a dispersemi 1. až 4. druhu:

   Připomeňme, že disperse 1. až 4. druhu jsou speciálními případy obecných dispersí rovnic (q) a $(\widehat{q})$. Tedy disperse 1. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u rovnice (q) transformováno na nějaké řešení v té samé rovnice (q), přičemž je zachována lineární nezávislost řešení. Obdobně disperse 2. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q), transformováno na nějaké řešení v_1 té samé rovnice $(\widehat{q})$, disperse 3. druhu je jádrem transformace, která transformuje každé řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$ na nějaké řešení v rovnice (q) a disperse 4. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u rovnice (q) transformováno na nějaké řešení v_1 rovnice $(\widehat{q})$.

2. Srovnání transformací, jejichž jádrem jsou centrální disperse k-tého druhu a disperse k-tého druhu ($k = 1, 2, 3, 4$):

   Předpokládejme, že rovnice (q) je oscilatorická s nosičem $q < 0$, $q \in C^2$ pro každé $t \in j$ (předpoklad $q \in C^2$ zajišťuje existenci průvodní rovnice $(\widehat{q})$ k rovnici (q)).

   (a) Nechť $\varphi_n, \psi_n, \chi_m, \omega_m$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ jsou centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q) dané v Definici 3.1.1. Nechť u je libovolné řešení rovnice (q) a u_1 je řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Připomeňme přitom, že platí vztah $u_1 = u'/\sqrt{-q}$. Následující tabulka popisuje transformace rovnic a jejich řešení v případě, že jádrem transformace je některá z centrálních dispersí.

Jádro transformace	Transformace rovnic	Transformace řešení	Transformační rovnice
φ_n	$(q), (q)$	$u \mapsto u$	$u(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}} u(\varphi_n(t))$
ψ_n	$(\widehat{q}), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto u_1$	$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\psi_n'(t)}} \frac{u'(\psi_n(t))}{\sqrt{-q(\psi_n(t))}}$
χ_m	$(q), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto u$	$u(t) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\chi_m'(t)}} \frac{u'(\chi_m(t))}{\sqrt{-q(\chi_m(t))}}$
ω_m	$(\widehat{q}), (q)$	$u \mapsto u_1$	$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\omega_m'(t)}} u(\omega_m(t))$

Tab. 2 Transformace, jejichž jádrem jsou centrální disperse

   (b) Nechť X_1, X_2, X_3 a X_4 jsou disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q) dané v Definici 3.2.6. a nechť p značí generátor příslušné disperse. Nechť u je libovolné řešení rovnice (q) a v jeho obraz v lineárním zobrazení p. Dále nechť u_1, v_1 značí odpovídající řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Připomeňme přitom, že platí vztah $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ a $v_1 = v'/\sqrt{-q}$. Při volbě vhodného generátoru dané disperse jsou v intervalu j splněny transformační rovnice uvedené v následující tabulce.

Jádro transformace	Transformace rovnic	Transformace řešení	Transformační rovnice
X_1	$(q), (q)$	$u \mapsto v$	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_1'(t)\rvert}} u(X_1(t))$
X_2	$(\widehat{q}), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto v_1$	$\frac{v'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_2'(t)\rvert}} \frac{u'(X_2(t))}{\sqrt{-q(X_2(t))}}$
X_3	$(q), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto v$	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_3'(t)\rvert}} \frac{u'(X_3(t))}{\sqrt{-q(X_3(t))}}$
X_4	$(\widehat{q}), (q)$	$u \mapsto v_1$	$\frac{v'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_4'(t)\rvert}} u(X_4(t))$

Tab. 3 Transformace, jejichž jádrem jsou disperse 1. až 4. druhu

4.2 Úplné transformace

Při studiu úplných transformací vyjděme z Věty 4.1.5 o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq). Podle této věty existuje právě jedno „nejširší“ řešení $Z(t)$ rovnice (Qq) definované v intervalu $k \subseteq j$ splňující počáteční podmínky. Obor hodnot K řešení $Z(t)$ tvoří podinterval intervalu J, tj. $K \subseteq J$. Je zřejmé, že obecně se interval k nerovná j, ani interval K se nerovná J. To znamená, že řešení Y rovnice (Q) nejsou obecně transformovány funkcí $Z(t)$ na řešení y rovnice (q) v jejich celých definičních oborech, ale pouze v částech definičních oborů.

Transformacím rovnic v jejich celých definičních oborech se budeme věnovat v tomto odstavci.

Řešení $X(t)$ rovnice (Qq) budeme nazývat *úplné*, je-li jeho definiční obor k roven intervalu j a obor hodnot $X(k) = K$ je roven intervalu J, tj.

$$k = j, \qquad X(k) = K = J.$$

Podobně mluvíme o *úplných transformacích* rovnic (q), (Q) právě tehdy, když je transformační funkce $X(t)$ úplným řešením rovnice (Qq). Tehdy je každé řešení Y rovnice (Q) na intervalu J transformováno na řešení y rovnice (q) na intervalu j.

Lze dokázat, že je-li transformace $[\frac{c}{\sqrt{|X'|}}, X]$ rovnic (q), (Q) úplná, pak je i inverzní transformace $[\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{|x'|}}, x]$ rovnic (Q), (q) úplná. V této souvislosti budeme mluvit o *úplných vzájemně inverzních transformacích* rovnic (q), (Q).

Chceme určit nutnou a dostatečnou podmínku pro existenci úplného řešení rovnice (Qq), tj. pro existenci úplné transformace rovnic (q), (Q) a počet těchto transformací.

Uvažujme tedy rovnice (q), (Q) na jejich definičních intervalech $j = (a, b)$, $J = (A, B)$. Víme, že každé řešení X rovnice (Qq) je jednoznačně určeno dvěma vhodnými prvními fázemi α, $\mathcal{A}$ rovnic (q), (Q) vztahem $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$, $t \in k \subseteq j$. Tehdy říkáme, že řešení X je generováno těmito fázemi.

Věta 4.2.1 *Dvě fáze α, $\mathcal{A}$ diferenciálních rovnic (q), (Q) generují úplné řešení X rovnice (Qq) právě tehdy, když jsou fáze α, $\mathcal{A}$ podobné.*

Důkaz.

(a) Nechť X je úplné řešení rovnice (Qq) a α, $\mathcal{A}$ první fáze, jež řešení X generují. Pak $X(j) = J$ a pro $t \in j$ platí $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$. Tedy obory hodnot fází α, $\mathcal{A}$ se v definičních oborech j, J těchto fází shodují, tj. $\alpha(j) = \mathcal{A}(J)$. Tedy podle Definice 2.3.1 jsou fáze α, $\mathcal{A}$ podobné.

(b) Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou podobné fáze rovnic (q), (Q) definované v intervalech j, J. Tedy platí $\alpha(j) = \mathcal{A}(J)$. Z toho plyne, že v intervalu j je obor hodnot funkce X konstruované vztahem $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$ roven intervalu J a dále že pro $t \in j$ je splněn vztah $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$. Fáze α, $\mathcal{A}$ tedy generují úplné řešení X rovnice (Qq).

Z předchozí věty plyne, že rovnice (Qq) má úplné řešení X právě tehdy, když existují podobné fáze rovnic (q), (Q). Podle Věty 2.3.2 existují podobné fáze rovnic (q), (Q) právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu. Z toho okamžitě plyne následující důsledek.

Důsledek 4.2.2 *Diferenciální rovnice (Qq) má úplné řešení právě tehdy, když jsou rovnice (q), (Q) stejného typu a druhu.*

Tedy úplné vzájemně inverzní transformace rovnic (q) a (Q) existují právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu. Říkáme, že rovnice (q) a (Q) jsou úplně (globálně) transformovatelné jedna na druhou. V tomto směru lze ukázat, že platí:

1. Každá rovnice je globálně transformovatelná na sebe.
2. Je-li rovnice (Q) globálně transformovatelná na rovnici (q), pak také rovnice (q) je globálně transformovatelná na rovnici (Q).
3. Je-li (Q) globálně transformovatelná na (R) a (R) globálně transformovatelná na (P), pak také (Q) je globálně transformovatelná na (P).

Můžeme tedy říci, že relace „globální transformovatelnosti" je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je tedy relací ekvivalence. Rovnice, které jsou na sebe vzájemně globálně transformovatelné, nazýváme proto globálně ekvivalentní. Jinou formulací Důsledku 4.2.2 je tzv. kritérium globální ekvivalence pro rovnice 2. řádu.

Borůvkovo kritérium globální ekvivalence pro rovnice 2. řádu:

Dvě homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu jsou globálně ekvivaletní právě tehdy, když jsou stejného typu druhu.

Na množině všech homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu lze tedy vytvořit rozklad příslušný této ekvivalenci. Každá třída tohoto rozkladu bude obsahovat rovnice, které jsou globálně ekvivalentní. Je vhodné vybrat z každé třídy jednu rovnici (samozřejmě spolu s definičním intervalem), která bude reprezentovat celou třídu. Takovou rovnici nazveme rovnicí kanonickou. Protože všechny rovnice dané třídy jsou ekvivalentní s rovnicí kanonickou, můžeme zkoumat vlastnosti řešení rovnic dané třídy invariantní k uvažovaným transformacím prostřednictvím vlastností rovnice kanonické.

Borůvkovy kanonické tvary lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu:

$y'' = -y$	na	$(0, \pi/2)$	konečný typ 1,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, \pi)$	konečný typ 1,	speciální druh
$y'' = -y$	na	$(0, 3\pi/2)$	konečný typ 2,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, 2\pi)$	konečný typ 2,	speciální druh
...			...	...
$y'' = -y$	na	$(0, (m-1/2)\pi)$	konečný typ m,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, m\pi)$	konečný typ m,	speciální druh
...			...	...
$y'' = -y$	na	$(0, \infty)$	nekonečný typ,	vpravo oscilator.
$y'' = -y$	na	$(-\infty, 0)$	nekonečný typ,	vlevo oscilator.
$y'' = -y$	na	$(-\infty, \infty)$	nekonečný typ,	oboustranně oscilator.

Kritérium globální ekvivalence a kanonické tvary pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu lze považovat za jedny z nejdůležitějších výsledků monografie [16]. Byla jimi v jistém smyslu završena Borůvkova teorie globálních vlastností lineárních homogenních rovnic 2. řádu v reálném oboru.

V dalších letech se tato teorie stala základem pro vytvoření teorie globálních vlastností lineárních rovnic n-tého řádu, jejíž výsledky byly shrnuty v monografii F. Neumana *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations* [C18].

Závěrem uveďme dva příklady, jež slouží ke konstrukci diferenciální rovnice s předepsanými vlastnostmi. Využijeme zde větu o transformaci závisle a nezávisle proměnné a ilustrujeme platnost Borůvkova kritéria globální ekvivalence.

Příklad 1.

Chceme nalézt diferenciální rovnici (q) definovanou na intervalu $(-\infty, \infty)$, která je globálně ekvivalentní s rovnicí $\ddot{Y} = -Y$ definovanou na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Uvažujme tedy rovnice

$$y'' = q(t)y, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \tag{Q}$$

a hledejme nosič $q(t)$ rovnice (q) a globální transformaci rovnic (q), (Q) ve tvaru $y(t) = h(t)Y(X(t))$. Využijeme přitom Věty 1.2.1. Nejprve zvolme vhodnou funkci $X(t) = T$ tak, aby přetransformovala interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, například

$$X(t) = T = \operatorname{arctg} t.$$

Z Věty 1.2.1 (ii), s využitím této konkrétní volby T, plyne

$$\operatorname{arctg} t = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma) d\sigma,$$

odkud

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{h^2(t)} \qquad \text{a tedy} \qquad h(t) = \pm\sqrt{1+t^2}.$$

Podle téže věty platí pro nosiče rovnic (q) a (Q) vztah

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)).$$

Dosazením funkce $Q(T) = -1$ a funkce $h(t) = \pm\sqrt{1+t^2}$ do tohoto vztahu dostáváme

$$q(t) = 0.$$

Schématické znázornění transformace rovnic (q), (Q):

$\ddot{Y} = -Y, \quad T \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$ konečný typ 1, speciální druh

$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{1+t^2} \cdot Y(T), \quad T = \operatorname{arctg} t$

$y'' = 0, \quad t \in (-\infty, \infty)$

Transformace báze řešení:

$$U = \sin T \qquad \longrightarrow \qquad u = \sqrt{1+t^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} t) = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = t$$

$$V = \cos T \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{1+t^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} t) = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1$$

Vidíme, že řešení u má právě jeden nulový bod a řešení v nemá žádný nulový bod. Tedy nalezená rovnice (q) je stejně jako rovnice (Q) konečného typu 1, speciálního druhu.

Příklad 2.

Modifikujme předcházející úlohu na nalezení diferenciální rovnice (q) definované na intervalu $(-\infty, \infty)$, která je globálně ekvivalentní s rovnicí $\ddot{Y} = -Y$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ a obecně na intervalu $(-k\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2})$.

Uvažujme tedy nejprve rovnice

$$y'' = q(t)y, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\pi, \pi) \tag{Q}$$

a postupujme analogicky jako v příkladě 1. Vyberme vhodnou funkci $X(t) = T$ tak, abychom přetransformovali interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\pi, \pi)$, například

$$T = 2 \operatorname{arctg} t.$$

Z Věty 1.2.1 (ii), s využitím této konkrétní volby T, plyne

$$2 \operatorname{arctg} t = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma) d\sigma,$$

odkud

$$\frac{2}{1+t^2} = \frac{1}{h^2(t)} \qquad \text{a tedy} \qquad h(t) = \pm\sqrt{\frac{1+t^2}{2}}.$$

Dosazením funkcí $h(t)$ a $Q(T) = -1$ do vztahu $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$ obdržíme

$$q(t) = \frac{-3}{(1+t^2)^2}.$$

Schématické znázornění transformace rovnic (q), (Q):

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\pi, \pi), \qquad \text{konečný typ 2, speciální druh}$$

$$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot Y(T), \quad T = 2\operatorname{arctg} t$$

$$y'' = \frac{-3}{(1+t^2)^2} y, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Transformace báze řešení:

$$U = \sin T \qquad \longrightarrow \qquad u = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot \sin(2\operatorname{arctg} t) = \sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$V = \cos T \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot \cos(2\operatorname{arctg} t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Vidíme, že řešení u má právě jeden nulový bod a řešení v má dva nulové body. Tedy nalezená rovnice je konečného typu 2, speciálního druhu. Opět jsme ověřili, že rovnice (q) a (Q) jsou stejného typu a druhu.

Obecně můžeme dokázat:

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-k\tfrac{\pi}{2}, k\tfrac{\pi}{2}), \qquad \text{konečný typ k, speciální druh}$$

$$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{\frac{1+t^2}{k}} \cdot Y(T), \quad T = k\operatorname{arctg} t$$

$$y'' = \frac{1-k^2}{(1+t^2)^2} y, \quad t \in (-\infty, \infty) \qquad \text{konečný typ k, speciální druh}$$

Uvedené příklady pouze ilustrují některé pojmy Borůvkovy teorie. Ukázky využití této teorie při řešení některých problémů, například ve variačním počtu nebo ve studiu asymptotických vlastností řešení rovnic 2. a 3. řádu, přesahuje rámec této práce. Více podrobností lze nalézt v monografii F. Neumana *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations* [C18] nebo v monografii M. Greguše *Third Order Linear Differential Equation* [C22].