

Zapomenutý matematik Henry Lowig (1904–1995)

Jindřich Bečvář; Vlastimil Dlab
Löwigovy práce z algebry

In: Martina Bečvářová (author); Antonín Slavík (author); Vlastimil Dlab (author); Jindřich Bečvář (author): Zapomenutý matematik Henry Lowig (1904–1995). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2012. pp. 117–136.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402211>

Terms of use:

- © MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze
- © Bečvářová, Martina
- © Slavík, Antonín
- © Dlab, Vlastimil
- © Bečvář, Jindřich

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

LÖWIGOVY PRÁCE Z ALGEBRY

Koncem třicátých let se Löwigův zájem začal přesouvat k abstraktní algebře. Přejít k této disciplíně zprostředkovalo patrně jeho studium některých prací týkajících se Booleových okruhů a rozvíjející se teorie svazů.¹ Jejich autory byli především Garrett Birkhoff (1911–1996), Edward Vermilye Huntington (1874–1952), Øystein Ore (1899–1968) a Marshall Harvey Stone (1903–1989).

O teorii svazů, jejím vzniku, vývoji a problémech viz např. [Me], [Kö], [HK], [B11], [B12], [B13], [G4], [G5], [G7], [Ro], [ABH]. Zájemcům o teorii svazů a Booleových algeber je možno doporučit učebnice a monografie [BD], [B10], [G1], [G2], [G3], [G6], [G8], [H], [Si], [Sz] atd.

* * *

H. Löwig ve svých pracích z teorie svazů a Booleových algeber navazoval zejména na pojednání G. Birkhoffa nazvané *On the structure of abstract algebras* [B5] z roku 1935 – citoval je ve svých pracích [L10], [L14], [L15], [L16], [L17], [L18], [L21] a [L23]. Několikrát uvedl v seznamu použité literatury i Birkhoffův článek *Rings of sets* [B8] z roku 1937; bylo to v pracích [L10], [L12], [L13] a [L14]. V článku [L10] citoval ještě Birkhoffovy práce *On the combination of topologies* [B7] z roku 1936 a *Lattices and their applications* [B9] z roku 1938. Birkhoffovu monografii *Lattice Theory* [B10] z roku 1967 (3. vydání) citoval v práci [L23].

V článku [L10] se odkazoval ještě na práci D. van Dantziga *Zur topologischen Algebra I. Komplettierungstheorie* [Da] z roku 1933, na práci Boole-Schrödersche *Verbände* [K] Fritze Kleina z roku 1936 a na práci L. V. Kantoroviče *Lineare halbgeordnete Räume* [Ka] z roku 1937.

V práci [L11] citoval H. Löwig Dedekindovo pojednání *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe* [De2] z roku 1900 a Oreovu práci *On the foundation of abstract algebra I* [Or] z roku 1935. V článku [L12] se odkazoval na pojednání Leopolda Löwenheima (1878–1957) z roku 1910 nazvané *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkül* [L], na článek Norberta Wienera (1894–1964) z roku 1917 pojmenovaný *Certain formal invariances in Boolean algebras* [Wi] a na práci *A generalization of the syllogism* [Be1] z roku 1924 od B. A. Bernsteina. V článku [L13] citoval Oreovu práci *On the foundation of abstract algebra I* [Or] z roku 1935.

V práci [L19] citoval H. Löwig článek *Completely distributive complete lattices* [Ra] z roku 1952, jehož autorem je George Neal Raney, v pracích [L20] a [L21] článek *Eine Konstruktion absolut freier Algebren* [Ke1] z roku 1965 od Roberta Kerkhoffa a v práci [L10] a [L24] Stoneovo pojednání *The theory of representations for Boolean algebras* [St1] z roku 1936.

¹ Poznamenejme, že se v tehdejších pracích utvářející se funkcionální analýzy, které H. Löwig studoval, objevovaly u některých autorů úvahy o svazech podprostorů Hilbertových prostorů.

V několika pracích se H. Löwig odkazoval na následující monografie: v [L14] na *Mengenlehre* [Hau] Felixe Hausdorffa (1868–1942) z roku 1944 (reprint 3. vydání), v [L16] na *Grundlagen der Analysis* [La] Edmunda Landaua (1877–1938) z roku 1930, v [L22] na *Lectures on Continuous Geometry* [No1] Johna von Neumanna (1903–1957) z roku 1937 a později na jeho knihu *Continuous Geometry* [No2] z roku 1960, v [L24] na *Introduction to Lattice Theory* [Sz] Gábora Szásze z roku 1963 a na *Distributive lattices* [BD] Raymonda Balbese a Philipa Dwingera z roku 1974.

* * *

V roce 1941 publikoval H. Löwig v americkém časopisu *Annals of Mathematics* rozsáhlou práci *Intrinsic topology and completion of Boolean rings* [L10] týkající se rozšíření Booleova okruhu na σ -úplný Booleův okruh, v němž je původní okruh hustý. K tomuto cíli mu posloužila metoda založená na pojmu *vnitřního prvku*, která připomíná konstrukci reálných čísel založenou na Cauchových posloupnostech. H. Löwig zde zobecnil řadu výsledků z teorie Booleových σ -okruhů, k nimž došli Holbrook Mann MacNeille (1907–1973) v práci *Partially ordered sets* [MN], J. von Neumann v přednáškách *Lectures on Continuous Geometry* [No1] a M. H. Stone v práci *Algebraic characterizations of special Boolean rings* [St2], na obecné Booleovy okruhy.

Löwigoва práce [L10] obsahuje 151 vět, vyniká neobyčejnou důkladností; důslednost v prezentaci výroků a pečlivost, která často svádí k puntičkářství, je typická pro všechny Löwigovery publikace. Například 108. věta obsahuje 17 nerovností týkajících se dolních a horních limit posloupností. Takováto pečlivost však nutně vede ke zdoluhavé prezentaci, kterou je možno pozorovat již v jeho práci *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl* [L6] ve srovnání s prací Friedricha Rieszeho (1880–1956) nazvanou *Zur Theorie des Hilbertschen Raumes*, která za Löwigovou prací v časopisu *Acta Litterarum Scientiarum Szeged* v roce 1934 následuje.

H. Löwig v roce 1951 publikoval ještě krátké pojednání týkající se Booleových algeber nazvané *On transitive Boolean relations* [L12]. Podal v něm nutné a postačující podmínky pro to, aby relace R definovaná vztahem

$$xRy \stackrel{\text{def}}{=} axy + bx\bar{y} + c\bar{x}y + d\bar{x}\bar{y} = 0$$

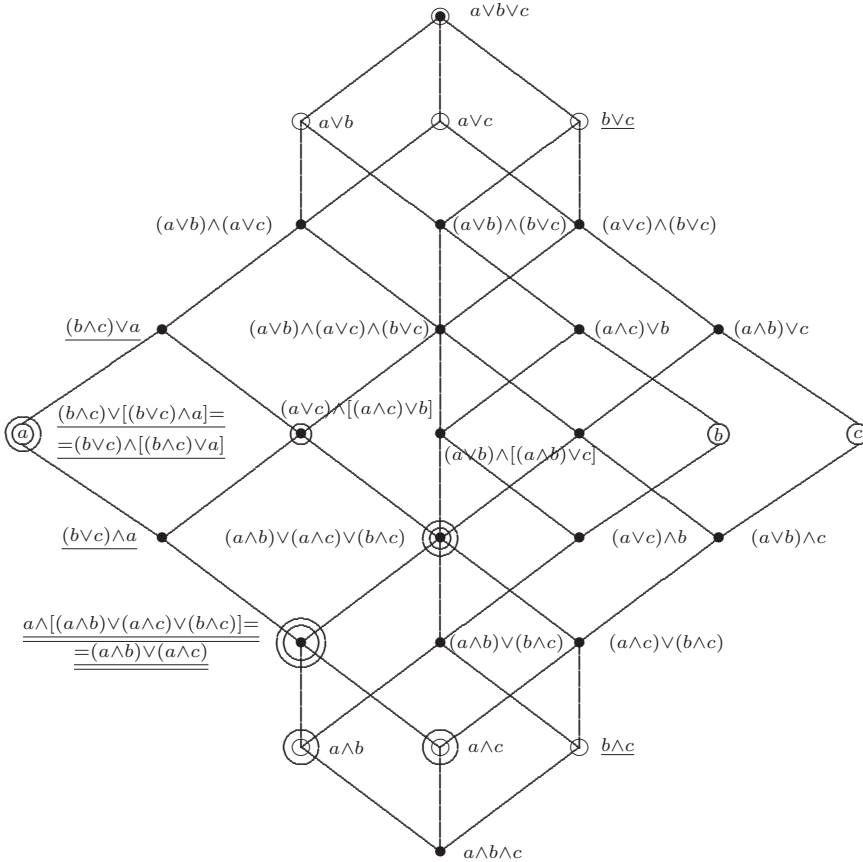
byla relací tranzitivní, resp. ekvivalencí, resp. kvaziuspořádáním, resp. polosupořádáním definujícím Booleovu algebru.

Publikace [L12], jako ostatně i další Löwigovery práce, svědčí o tom, jak pozorně autor studoval i starší literaturu; obsahuje důležité a cenné reference. Jen z nich se dozvíme o motivaci ke studiu relace R objevující se v Löwenheimově práci *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkül* [L] z roku 1910 a studované N. Wienerem roku 1917 v článku *Certain formal invariances in Boolean algebras* [Wi] a B. A. Bernsteinem roku 1924 v pojednání *A generalization of the syllogism* [Be1]. V této souvislosti nelze opomenout příspěvky *On a relation between the logical theory of classes and the geometrical theory*

of points [Kem] z roku 1890 Alfreda Braye Kempea (1849–1922) a *Sets of independent postulates for the algebra of logic* [H1] E. V. Huntingtona z roku 1904. Práce těchto matematiků předcházely pozdější Oreově a Birkhoffově snaze, zformulovat teorii algebraických struktur, zejména svazů, která ovlivnila, tak jako mnoho jiných algebraiků, i H. Löwiga.

* * *

Fundamentální význam pro vývoj teorie svazů měla práce Richarda Dedekinda (1831–1916) z roku 1900 nazvaná *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe* [De2], v níž abstrahoval chování normálních podgrup a ideálů a došel tak k pojmu *modulární svaz*.² Popsal strukturu volného modulárního svazu (o 28 prvcích) generovaného třemi prvky. Na následujícím obrázku připomeňme jeden tvar tohoto volného modulárního svazu; současně poznamenejme, že volný modulární svaz generovaný čtyřmi prvky je nekonečný.



Obr. 1 Volný modulární svaz generovaný třemi prvky

² Myšlenky, které dnes řadíme do teorie svazů, nacházíme i v jiných Dedekindových pracích, například v článku *Über Zerlegung von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler* [De1] z roku 1897.

Je pochopitelné, že už v počátcích teorie svazů, této nové disciplíny, byla chápána role i význam pojmů modulárního a distributivního svazu.

Je zajímavé podotknout, že Birkhoffův článek *On the combination of subalgebras* [B1] týkající se teorie svazů, který byl publikován roku 1933, žádný odkaz na Dedekindovu práci [De2] neobsahuje. G. Birkhoff zde definoval modulární zákon, modulární svazy nazýval *B-svazy*. Ještě v následujících článcích *Applications of lattice algebra* [B2] a *On the lattice theory of ideals* [B3] z roku 1934 mluvil o *B-svazech*, definoval zde i distributivní svazy, které nazýval *C-svazy*, ačkoliv se již o Dedekindově práci [De2] stručně zmínil. Teprve v poznámce *Note on the paper "On the combination of subalgebras"* [B4] z téhož roku uvedl, že ho na Dedekindovu práci [De2] upozornil Ø. Ore, a porovnal své výsledky s Dedekindovými. V pracích *On the structure of abstract algebras* [B5] z roku 1935 a *Lattices and their applications* [B9] z roku 1938 již použil současnou terminologii. Ø. Ore se odvolal na Dedekindovu práci [De2] již na začátku svého příspěvku *On the foundation of abstract algebra I* [Or] z roku 1935 a užíval terminologii Dedekindových svazů.

* * *

Pojem modularity motivoval první Löwigovy práce týkající se teorie svazů.

Pro každé tři prvky a, b, c libovolného svazu platí vztah

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$$

a duálně

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee [(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)].$$

Ø. Ore ve své práci [Or] poukázal na to, že pro libovolné tři prvky a, b, c modulárního svazu platí

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \quad (1)$$

a duálně

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee [(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)]. \quad (2)$$

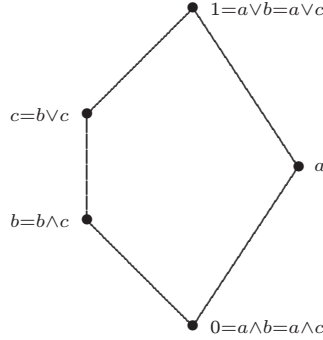
Zároveň dodal, že identity (1) a (2) mohou být považovány za jinou formulaci modulárního axiomu a že ve svazu, pro který modulární axiom neplatí, musí být tyto rovnosti nahrazeny nerovnostmi.³

Ve svazu na obrázku 2 (všeobecně značeném symbolem N_5 a nazývaném *pentagon*) platí

$$[a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c) \neq [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c),$$

³ It should be observed, and it is easily verified, that each of the relations (1) to (5) may be considered as a restatement of the axiom of Dedekind. In a structure in which the Dedekind axiom does not hold these identities must be replaced by inequalities. ([Or], str. 413)

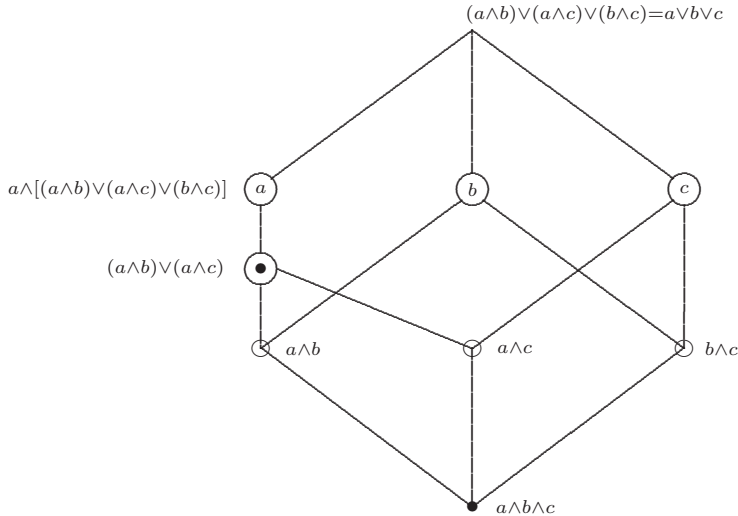
tj. svaz N_5 není modulární. Charakterizuje nemodulární svazy v tom, že každý svaz, který není modulární, obsahuje podsvaz izomorfní s N_5 . Přitom je snadné se přesvědčit, že prvky svazu N_5 splňují (1) i (2).



Obr. 2 Svaz N_5 : $b = [a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c) \neq [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c) = c$

Zevrubné vysvětlení tohoto problému podal H. Löwig ve svém článku *On the importance of the relation $[(A, B), (A, C)] = (A, [(B, C), (C, A), (A, B)])$ between three elements of a structure* [L11]. Sestrojil (nemodulární) svaz L_9 (viz obrázek 3), v němž prvky a, b, c nesplňují rovnost (1), a dokázal následující tvrzení, paralelní s výše zmíněnou charakteristikou modulárních svazů, tj. svazů splňujících pro každé tři prvky a, b, c identitu

$$[a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c) = [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c).$$



Obr. 3 Svaz L_9 : $a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Věta. Každý svaz, který nesplňuje pro libovolnou volbu prvků a, b, c rovnost (1), obsahuje podsvaz izomorfní se svazem L_9 .⁴

Touto větou H. Löwig vysvětlil, proč každý svaz s nejvýše osmi prvky splňuje identitu (1) pro každou volbu prvků a, b, c . Zároveň upozornil na zajímavou skutečnost, že totiž (duální) identita (2) je ve svazu L_9 splněna.⁵

Množina všech prvků x splňujících pro daný prvokvociet a/b distributivního svazu rovnost $(b \wedge x) \vee a = b$ tvoří prvoideál $P_{a/b}$. V poznámce *Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes* [L13] H. Löwig ukázal, že $P_{a/b} = P_{c/d}$ tehdy a jen tehdy, jsou-li prvokvocienty a/b a c/d podobné. Práce *Note on the self-duality of the unrestricted distributive law in complete lattices* [L19] a *On the completion of relatively complemented distributive lattices* [L24] se rovněž týkají distributivních svazů. V první z nich autor podal nový důkaz duality distributivních zákonů pro úplné svazy, kterou zformuloval roku 1952 G. N. Raney v článku *Completely distributive complete lattices* [Ra]. V druhé práci rozšířil vnoření relativně komplementárního distributivního svazu s nulovým prvkem do úplné Booleovy algebry (vytvořené jeho normálními ideály) na případ, kdy relativně komplementární svaz nemá nulu. Tohoto minimálního zúplnění dosáhl konstrukcí svazu normálních filtrů ve svazu normálních ideálů původního relativně komplementárního distributivního svazu.

Motivací práce *Note on the theory of independence in continuous geometries* [L22] je formulace Věty 2.7 ve von Neumannově monografii *Lectures on Continuous Geometry* [No1] z roku 1937. Věta 2.7 se týká charakterizace pojmu *nezávislosti* v úplném komplementárním modulárním svazu L .⁶ John von Neumann definoval podmnožinu $A \subseteq L$ jako nezávislou, jestliže pro každý (disjunktní) rozklad $A = X \cup Y$ platí

$$\left(\bigvee_{a \in X} a \right) \wedge \left(\bigvee_{a \in Y} a \right) = 0,$$

a uvedl tvrzení, že A je nezávislá právě tehdy, když

$$B = \left\{ \bigvee_{a \in X} a \mid X \subseteq A \right\}$$

je izomorfní s Booleovou algebrou všech podmnožin množiny A (přičemž spojení a průseky odpovídají sjednocením a průnikům). H. Löwig ukázal, že toto von Neumannovo tvrzení obecně neplatí a dokázal následující skutečnost: A je

⁴ THEOREM 8. Any structure in which the equation (2) is not generally valid contains at least one sub-structure of the ninth order having the same property.

THEOREM 9. Any structure of the ninth order in which the equation (2) is not generally valid is isomorphic with the structure Λ . ([L11], str. 578)

⁵ Tuto skutečnost ocenili např. R. Padmanabhan a S. Rudeanu roku 2008 v monografii *Axioms for Lattices and Boolean Algebras* [PR].

⁶ Viz též práce [B6], [Wh], [H2].

nezávislá právě tehdy, když zobrazení přiřazující každé podmnožině $X \subseteq A$ příslušný prvek $\bigvee_{a \in X} a \in B$ je izomorfismem. Přitom poukázal na to, že von Neumannova formulace platí v případě, že A je konečná podmnožina.

V práci *On the properties of freely generated algebras* [L14] H. Löwig formuloval svým typickým rigorózním způsobem pojem Birkhoffovy volně generované algebry v případě, že není žádného omezení na počet operací a na jejich aritu. Užitím striktně formálního značení odvodil v padesáti větách základní vlastnosti volných algeber, jejich homomorfismů, volnýchází a závislosti jejich prvků. Tato práce se stala základem pro navazující rozsáhlý soubor publikací [L15], [L16], [L17], [L18], [L20], [L21] a [L23], které na sebe navazují a jsou citovány např. v Grätzerově monografii *Universal Algebra* [G1]. Všechny svědčí o Löwigově mimořádné pečlivosti, která dokáže zavést čtenáře k vyhraněné abstraktnímu značení. Cílem těchto Löwigových prací je odstranění logických potíží, které jsou implicitně spojené s některými Birkhoffovými definicemi zavedenými v článku *On the structure of abstract algebras* [B5] z roku 1935. Ty se týkají především potíží spojených s transfiniteními konstrukcemi nutnými v důkazech existence volných algeber. H. A. Thurston, recenzent Löwigovy práce *Gesetzrelationen über frei erzeugten Algebren* [L15], např. poukázal na to, že přesné Löwigovy formulace dovolují rozhodnout, zda algebra nad množinou A bez jakýchkoliv operací je nebo není stejná jako algebra nad množinou A s operacemi, které jsou funkcemi s prázdným definičním oborem.⁷ Samotný fakt, že tyto práce obsahují 240 vět, čtenáře ujistí o jejich rozsahu.

* * *

Hodnocení Löwigových výsledků v algebře by nebylo úplné bez zmínky o jeho podrobném studiu a pozorné recenzní činnosti. To vše svědčí nejen o tom, s jakou důkladností sledoval současnou literaturu, ale též o jeho pečlivosti, jakou recenzovaným pracím věnoval. Dokumentujeme to několika příklady.

Během druhé světové války se H. Löwig seznámil s přednáškami *Lectures of Continuous Geometry* [No1], které J. von Neumann proslavil v letech 1935 až 1937 na Institute for Advanced Study v Princetonu v New Jersey. Podrobně je prostudoval a nalezl v nich několik nedostatků.⁸ V září roku 1946 napsal o svých zjištěních J. von Neumannovi. Teprve roku 1957 se z USA ozval Israel Halperin, který připravoval vydání von Neumannových přednášek *Continuous Geometry* [No2].⁹ Zahrnul Löwigovy opravy do knihy a pochvalně se o nich vyjádřil v doslovu (viz [No2], str. 291). Halperinovo vydání von Neumannových přednášek recenzoval pro *Mathematical Reviews*¹⁰ Fumitomo Maeda – téměř třetinu recenze věnoval objasnění Löwigových oprav.¹¹

⁷ *Löwig's precise formulations enable one to decide, for example, whether or not the algebra over A with no operations is the same as the algebra over A all of whose operations are functions on no elements.* (MR0067853 (16,786e))

⁸ Podrobnosti jsou uvedeny na stranách 36–37 této knihy.

⁹ John von Neumann roku 1957 zemřel.

¹⁰ MR0120174 (22#10931).

¹¹ Pasáž z Maedovy recenze je citována v této knize na straně 36–37. Poznamenejme, že

L. R. Wilcox a M. F. Smiley zveřejnili roku 1946 opravu svého článku *Metric lattices* [WS] z roku 1939, v níž poznamenali:

*Henry Loewig, in a letter dated September 23, 1940, which reached us March 28, 1946, pointed out and corrected a flaw in the paper cited.*¹²

H. Kenyon děkoval H. Löwigovi v článku *Two theorems about relations* [Ken] z roku 1963 za upozornění na chybu v dřívější verzi své práce.

H. Löwig rovněž poukázal na chybu v práci *On definitions of Boolean rings and distributive lattices* [Ôh] z roku 1968, kterou následně její autor Sakiho Ôhashi ve spolupráci s Kiyoshi Isékim v krátkém článku *Axiom systems of distributive lattice* [IÔ] z roku 1970 opravili:¹³

In a letter of Dr. H. F. J. Lowig to Ôhashi, he noted that Theorem 2 in [1], is true under an additional condition ... ([IÔ], str. 409)

* * *

Löwigova práce [L10] byla poměrně úspěšná. Roku 1951 ji citoval Basil C. Rennie (1920–1996) v článku *Lattices* [Re], ve stejném roce ji uvedli Leonid Vital'evič Kantorovič (1912–1986), Boris Zacharovič Vulich (1913–1978) a Aron Grigor'evič Pinsker (1905–1985) v seznamu bibliografických zdrojů své rozsáhlé společné práce *Poluuporjadočennye gruppy i linejnye poluuporjadočennye prostranstva* [KVP].

David O. Ellis a H. D. Sprinkle citovali práci [L10] jednak v drobném článku *Topology in B-metrized spaces* [ES1] z roku 1952, jednak v článku *Topology of B-metric spaces* [ES2] z roku 1956. Ve své druhé práci napsali:

*The work was suggested mainly by the interesting comparison between the distance geometries of ordinary metric spaces and the autometrized Boolean algebras studied by one of us (10, 11) and, more recently, by L. M. Blumenthal and others (5).*¹⁴ *There is a hint of the program, however, in a paper of Löwig around 1936 (22).* ([ES2], str. 250)

Práci [L10] citoval roku 1965 Fredos Papangelou v práci *Some considerations on convergence in Abelian lattice-groups* [Pa], roku 1967 se na ni odkazovali Jerold Chase Mathews a R. F. Anderson v článku *A comparison of two modes of order convergence* [MA], roku 1993 Jörg Stephan v práci *Varieties generated by lattices of breadth two* [Ste] a roku 2005 George Georgescu a Andrei Popescu v článku *Similarity convergence in residuated structures* [GP].

F. Maeda vydal roku 1958 německý překlad své japonské monografie z roku 1950 nazvaný *Kontinuierliche Geometrien* [M]. Velmi podrobnou recenzi této knihy uveřejnil I. Halperin (Bulletin of the American Mathematical Society 64(1958), 386–390), který se i zde zmínil o Löwigových opravách von Neumannova textu.

¹² Poznamenejme, že rozdíl mezi daty je způsoben válečnými událostmi.

¹³ Tato skutečnost je připomenuta i v monografii [PR] na stranách 62 a 201.

¹⁴ Míneha je práce Leonarda M. Blumenthala *Boolean geometry I*, National Bureau of Standards, 1952. Viz též Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1(1952), 343–360.

Práci [L11] citovala roku 1950 R. V. Petropavlovskaja v článku *O zakonach v strukturach* [Pe], roku 1965 se na práci [L11] odvolávali T. Tamura a F. M. Yaqub v práci *Examples related to attainability of identities on lattices and rings* [TY]; Löwigův přínos připomněl i Hans-Jürgen Hoehnke (nar. 1925), který o práci [TY] napsal referát pro časopis *Mathematical Reviews*.¹⁵

Ž. A. Omarov citoval práci [L11] v článcích *O mnogoobrazii rešetok, opredelennom toždestvom Ikbalunnisy* [Om1] z roku 1988 a *O peresečenii necharakterizuemymch mnogoobrazij rešetok* [Om2] z roku 1990.

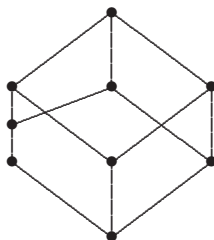
G. Birkhoff citoval v revidovaném vydání své monografie *Lattice Theory* [B10] z roku 1948 Löwigovy práce [L10] a [L11].¹⁶ Ve třetím vydání *Lattice theory* z roku 1967 je zmínka o H. Löwigovi na str. 142 v souvislosti s pracemi J. Schmidta, a J. Słomińskiego,¹⁷ v závěrečné bibliografii (str. 411–413) však Löwigovy práce [L10] a [L11] uvedeny nejsou.

George Grätzer (nar. 1936) citoval práci [L11] v první kapitole knihy *Lattice Theory. First Concepts and Distributive Lattices* [G2] z roku 1971.

The examples of lattice identities we have seen so far seem to suggest that all such identities are self-dual. The identity $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a$, where $a = x \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x))$, $b = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$, $c = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, is an example of a nonself-dual identity. (H. F. J. Lowig [1943]). ([G2], str. 63)

V jeho knize *General Lattice Theory* [G3] z roku 1978 a jejích dalších vydáních (1998, 2003, 2007, ruský překlad 1982) je tato pasáž ukončena obšírněji:

This identity holds in a lattice L iff L does not have a sublattice isomorphic to the dual of the lattice of Figure V.2.7; see H. F. J. Löwig [1943]. ([G3], str. 53)



Obr. 4 Obrázek V.2.7 z Grätzerovy monografie ([G3], str. 240)

Práci [L11] citoval G. Grätzer i v monografii *Lattice Theory. Foundations* [G8] z roku 2010. Výsledky článku [L11] připomněli rovněž Ranganathan Padmanabhan a Sergiu Rudeanu v knize *Axioms for Lattices and Boolean Algebras* [PR].

¹⁵ MR0191852(33#79).

¹⁶ Löwigovy výsledky jsou zmíněny na stranách 66, 109 a 166, v závěrečném seznamu literatury na stranách 272 až 274 však jeho práce uvedeny nejsou. V ruském překladu *Teoriya struktur* z roku 1952 byly tyto dvě práce zaneseny do seznamu literatury – viz str. 384. Citovány jsou na stranách 104, 160 a 233.

¹⁷ V ruském překladu *Teoriya rešetok* na straně 188.

Roman Sikorski (1920–1983) citoval Löwigovu práci [L12] v knize *Boolean Algebras* [Si] z roku 1960, v jejím druhém a třetím vydání z roku 1964, resp. 1969 uvedl v seznamu literatury práce [L10] a [L12].¹⁸

Poměrně často bylo odkazováno i na Löwigovy práce [L14], [L15] a [L16].

A. Nerode (nar. 1932) citoval roku 1959 práci [L15] v článku *Composita, equations, and freely generated algebras* [Ne], Walter Felscher (1931–2000) se odkazoval roku 1965 na práce [L14] a [L16] v článku *Zur Algebra unendlich langer Zeichenreihen* [F]. Mimo jiné zde napsal:

*In der mathematischen Logik hat man in den letzten Jahren viele und berechtigende Gründe gefunden, sich mit solchen formalen Sprachen zu befassen, denen unendlich lange Zeichenreihen zugrunde liegen ... Die Term- und Formelalgebren solcher Sprachen sind dann absolut freie Algebren mit infinitären Operationen, und eine algebraische Theorie solcher Algebren ist von LOWIG [1], [2], SŁOMINSKI [1], DIENER [1] und KERKHOFF [1] dargestellt worden.*¹⁹ ([F], str. 5)

Na Löwigovy práce často navazoval Jürgen Schmidt.

V článku *Peano-Bäume* [S1]²⁰ z roku 1960 se odkazoval na práci [L14]. V následujícím článku *Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations* [S2] citoval práce [L14] a [L15]. V úvodu napsal:

*Since in more recent times, especially following the needs of metamathematics, a deeper interest in infinitary operations has arisen (e.g. cf. DÖRGE [4], LÖWIG [6], [7], SOMINSKI [11]), we want to contribute to this development by extending MARCZEWSKI's theory to infinitary operations.*²¹ ([S2], str. 77)

O něco dále uvedl v poznámce pod čarou:

*In fact, LOWIG seems to be the only author on general algebra who profits by this convenient general form of induction (containing ordinary complete induction on natural numbers as an extremely special case), whereas other authors, e.e. SOMINSKI [11], make a sometimes more than exhaustive use of transfinite induction on rank numbers. Still, algebraic induction is frequently used in metamathematics, even by authors of the intuitionistic schools.*²² ([S2], str. 84)

V práci *Die Charakteristik einer allgemeinen Algebra. I.* [S3]²³ z roku 1962 se několikrát odvolával na Löwigovy články [L15] a [L16]. V článku *Some properties of algebraically independent sets in algebras with infinitary operations* [S4] z roku 1964 citoval Löwigovu práci [L14]. Mimo jiné uvedl:

¹⁸ V ruském překladu z roku 1969 druhého vydání monografie [Si] z roku 1964 jsou v seznamu literatury rovněž uvedeny práce [L10] a [L12].

¹⁹ Citovány jsou práce J. Słomiński [Sl], K.-H. Diener [Di0], R. Kerkhoff [Ke1].

²⁰ Článek byl věnován 60. výročí narození Karla Dörge (1899–1975).

²¹ Odkazy jsou na práce [Dö], [Mar1] a [Mar2].

²² V celém článku autor píše Sominski místo správného Słomiński.

²³ Práce je věnována Reinholdu Baerovi (1902–1979) k 60. narozeninám.

... the existence of the element basis for all elements x in the algebraically independent generating set M is secured in the special cases of finitary algebras and (reproducing a result of Löwig [1]) of absolutely free algebras ... ([S4], str. 123)

Na mnoha místech dalšího článku, nazvaného *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen* [S5] z roku 1965 citoval Löwigovu práci [L14]. Ve stejném roce se v článku *Die überinvarianten und verwandte Kongruenzrelationen einer allgemeinen Algebra* [S6] mnohokrát odkazoval na práce [L14] a [L15].

LOWIG, SŁOMIŃSKI und B. H. NEUMANN haben es unternommen²⁴, die Birkhoffsche Gleichungstheorie rein innermathematisch nachzubauen. An die Stelle der der Metamathematik angehörenden formalen Sprache der algebraischen Gleichungen treten als genaue innermathematische Gegenstücke die absolut freien Algebren²⁵ ...²⁶ ([S6], str. 131)

Peter Burmeister a Jürgen Schmidt citovali roku 1966 v článku *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen II* [BS] práci [L15]. J. Schmidt citoval práce [L14], [L15] a [L16] i v článku *Clones and semiclones of operations* [S7] z roku 1977 (publikováno roku 1982); o Löwigově práci [L14] se zmínil i H.-J. Hoehnke v referátu o Schmidtově práci [S7].²⁷

Práci [L16] citoval roku 1977 E. G. Manes v článku *Free algebraic theories* [Ma], který však byl publikován až roku 1982 v [CFS].

Robert Kerkhoff citoval články [L14] a [L16] v pracích *Eine Konstruktion absolut freier Algebren* [Ke1] z roku 1965 a *Über verallgemeinerte Peano-Algebren* [Ke2] z roku 1969.²⁸

V úvodu svého článku [Ke1] podal definici absolutně volné algebry:

Die Algebra A heißt absolut frei über einer Menge B, wenn eine Abbildung d von B in A existiert, so daß zu jeder Abbildung h von B in die Grundmenge

²⁴ LOWIG [5], [6] und SŁOMIŃSKI [13] für beliebige endlich- oder unendlichstellige Operationen, B. H. NEUMANN [9] unter Beschränkung auf endlichstellige Operationen.

²⁵ LOWIG [5]: freely generated algebras; SŁOMIŃSKI [13] p. 21: absolutely free algebras; B. H. NEUMANN [9] p. 50: free anarchic algebras; BIRKHOFF [3] p. 162: primitive algebras.

²⁶ Citovány jsou práce: J. Słomiński [Sł], B. H. Neumann [Neu], G. Birkhoff [B10].

²⁷ MR660904 (83m:08005).

²⁸ V obsáhlé recenzi knihy Paul Howard, Jean Estelle Rubin (1967–2002): *Consequences of the Axiom of Choice* [HR] zveřejněné v časopisu Zentralblatt für Mathematik (Zbl 0947.03001) napsal K.-H. Diener mimo jiné toto: *The proof of the existence of Peano algebras is a different matter. In 1965 R. Kerkhoff [Math. Ann. 158, 109–112 (1965; Zbl. 0192.09402)] published a surprisingly simple construction which does not make use of any form of the axiom of choice! Several other proofs had been published before (e.g., by Birkhoff, Löwig, Dörge, Harzheim, Peirce, Słomiński etc.); they all use consequences of the axiom of choice by assuming that the “arities” have well-ordered cardinalities, and that there exists a regular cardinal above them.* V knize [HR] je citována Löwigova práce [L7].

einer Algebra D vom Typ Δ genau ein Homomorphismus φ von A in D existiert mit $\varphi \circ d = h$. Bekanntlich (DIENER [2], §2; LOWIG [5], [6]; SŁOMIŃSKI [7], Chap. III, §1) ist eine absolut freie Algebra A über der Menge B durch folgende drei Eigenschaften (verallgemeinerte Peano-Axiome) charakterisiert:

- (P₁) Es existiert eine Injektion d von B in A , so daß A von $B^* = d(B)$ erzeugt wird und die Elemente aus B^* nicht als Bilder unter Operationen auftreten;
- (P₂) verschieden indizierte Operationen haben disjunkte Bilder;
- (P₃) die Operationen sind umkehrbar. ([Ke1], str. 109)

Egbert Harzheim roku 1966 citoval práci [L16] v článku *Über die Grundlagen der universellen Algebra* [Ha].²⁹

Karl-Heinz Diener, žák Jürgena Schmidta, se odkazoval v článku *Order in absolutely free and related algebras* [Di1] z roku 1966 na práce [L14] a [L15]. V úvodu napsal:

The class of all well-formed formulas of a formal language together with the operations corresponding to the logical connectives forms an absolutely free algebra; moreover, the recent study of formal languages with infinitely long expressions requires the admission of infinitary operations. On the other hand, absolutely free algebras, being special cases of free algebras, have been investigated in General Algebra both for their own interest and as a tool to define such notions as “equation” etc. without using metamathematical concepts (see e.g. Löwig [6], [7], Słomiński [11]). ([Di1], str. 63)

V příspěvku *On constructing infinitary languages $L_{\alpha\beta}$ without the axiom of choice* [Di2] z roku 1983 citoval K.-H. Diener práce [L14] a [L16]. V článku *On the transitive hull of a κ -narrow relation* [D3] z roku 1992 uvedl práce [L14] a [L16] a v článku *On the natural order relation in Peano algebras with finitary or infinitary operations* [Di4] z roku 1993 práci [L14]. V článku *On the predecessor relation in abstract algebras* [Di5] z roku 1993 rovněž citoval Löwigovy výsledky.

George Grätzer (nar. 1936) uvedl Löwigovy práce [L14], [L15], [L16], [L17] a [L18] v soupisu literatury své monografie *Universal Algebra* [G1] z roku 1968.³⁰ V dalším vydání své knihy z roku 2008 uvedl (viz *Additional Bibliography*) ještě práce [L20] a [L21].

Práce [L19] je zanesena i v souhrnné bibliografii (*The Continuous Lattices Bibliography*) otištěné ve sborníku *Continuous Lattices and their Applications* [HH] z roku 1985 a v bibliografii uvedené v článku *Teoriја struktur* [GSF], který roku 1970 publikovali M. M. Gluchov, I. V. Stel’ceckij a T. S. Fofanova.

²⁹ Článek byl připsán 65. výročí narození K. Dörge.

³⁰ Viz str. 346 (*Bibliography*). V úvodu (na straně ix) poděkoval za pomoc a podněty několika kolegům, mezi nimi i H. Löwigovi.

V. A. Artamonov uvedl v rozsáhlém přehledovém článku *Universal'nye algebry* [Ar] otištěném roku 1976 v periodiku *Itogi nauki i techniki. Algebra. Topologija. Geometrija* Löwigovy práce [L20] a [L21].

Na webových stránkách Jaroslava Ježka (1945–2011)

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jezek/bibua.pdf>

jsou v bibliografii prací z univerzální algebry a souvisejících témat (duben 2008, 321 stran) uvedeny Löwigovy práce [L11], [L14], [L15], [L16], [L17], [L18], [L20] a [L21].

* * *

Kromě H. Löwiga našla teorie svazů v Praze ve čtyřicátých a padesátých letech 20. století úrodnou půdu v pracích Vladimíra Kořínka (1899–1981)³¹ a jeho žáků Ludvíka Janoše, Čestmíra Vitnera a Václava Vilhelma. V. Kořínek publikoval roku 1941 práci *Der Schreiersche Satz und das Zassenhausssche Verfahren in Verbänden* [Ko1], ve stejném roce publikoval H. Löwig práci [L10]. Roku 1943 došlo k bližšímu kontaktu mezi oběma matematiky; jejich příležitostná korespondence pokračovala až do počátku osmdesátých let.³² V. Kořínek publikoval roku 1949 svoji druhou práci z teorie svazů *Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true* [Ko2]; v té době již byl H. Löwig v Hobartu.

Pod Kořínkovým vedením se zrodily doktorské práce L. Janoše *Vlastnosti Zassenhausova zjemnění* (1949/50), Č. Vitnera *Podmínky semimodularity ve svazech* (1951/52) a V. Vilhelma *Jordan-Hölderova věta ve svazech bez konečnosti řetězců* (1951/52), jejichž výsledky byly publikovány v letech 1953 a 1954 v časopisu *Czechoslovak Mathematical Journal* (viz [J], [Vit], [Vil]). Zdá se, že mezi těmito matematiky a H. Löwigem ani k odborným ani osobním kontaktům nedošlo. Z dostupných zdrojů o tom není nic známo.

H. Löwig se snažil udržet vztahy s českým prostředím. Jak už bylo řečeno, po několik desetiletí korespondoval s Vladimírem Kořínkem, své práce [L12], [L20] a [L22] publikoval v časopisu *Czechoslovak Mathematical Journal*. Pozorně sledoval publikace českých a slovenských matematiků spadající do teorii svazů a algeber, pro časopis *Mathematical Reviews* o nich psal referáty (jejich autory byli E. Gedeonová, V. Slavík, J. Ježek, J. Havrda, V. Vilhelm, D. Jakubíková-Studenovská, V. Rödl). O další produkci českých a slovenských matematiků v teorii svazů se lze dočíst v disertaci Štěpánky Bilové *Lattice Theory in Czech and Slovak Mathematics until 1963* [Bi] z roku 2004.³³

Na Löwigovy výsledky bezprostředně navázali pouze Ján Jakubík (nar. 1923) a Milan Kolibiar (1922–1994). Roku 1954 citovali ve společném článku *O nekotorych svojstvach par struktur* [JK] jeho práci [L12]. M. Kolibiar se odkazoval

³¹ V. Kořínkovi je věnována monografie Z. Kohoutová, J. Bečvář [KB].

³² Úryvky z jejich korespondence jsou uvedeny v první kapitole této knihy. Viz též [KB], str. 218–220.

³³ Ve své disertaci [Bi] se Š. Bilová nezmínila ani o Löwigových pracích, ani o jeho zájmu o českou a slovenskou produkci v teorii svazů.

v práci *Distributive sublattices of a lattice* [Kol] z roku 1972 na Löwigův článek [L19]. Ján Jakubík citoval roku 1988 Löwigovu práci [L10] ve svém článku *Sequential convergences in Boolean algebras* [J1]. O deset let později, roku 1998, se na ni opět odvolával v článku *Disjoint sequences in Boolean algebras* [J2] a roku 2002 v pojednání *Sequential convergences on generalized Boolean algebras* [J3].

LITERATURA

- [L10] Löwig H., *Intrinsic topology and completion of Boolean rings*, Annals of Mathematics **42** (1941), 1138–1196.
- [L11] Löwig H., *On the importance of the relation $[(A, B), (A, C)] = (A, [(B, C), (C, A), (A, B)])$ between three elements of a structure*, Annals of Mathematics **44** (1943), 573–579.
- [L12] Löwig H., *On transitive Boolean relations*, Czechoslovak Mathematical Journal **1** (1951), 199–201.
- [L13] Löwig H., *Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **190** (1952), 49–50.
- [L14] Löwig H., *On the properties of freely generated algebras*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **190** (1952), 65–74.
- [L15] Löwig H., *Gesetzrelationen über frei erzeugten Algebren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **193** (1954), 129–142.
- [L16] Löwig H., *On the existence of freely generated algebras*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53** (1957), 790–795.
- [L17] Löwig H., *On some representations of lattices of law relations*, Osaka Mathematical Journal **10** (1958), 159–180, Errata *ibid.* 12(1960), 216.
- [L18] Löwig H., *On the composition of some representations of lattices of law relations*, Osaka Mathematical Journal **13** (1961), 217–228.
- [L19] Löwig H., *Note on the self-duality of the unrestricted distributive law in complete lattices*, Israel Journal of Mathematics **2** (1964), 170–172.
- [L20] Löwig H., *On the definition of an absolutely free algebra*, Czechoslovak Mathematical Journal **18** (1968), 396–399.
- [L21] Löwig H., *On algebras generatable by a given set of algebras*, Mathematica Japonicae **19** (1974), 83–91.
- [L22] Löwig H., *Note on the theory of independence in continuous geometries*, Czechoslovak Mathematical Journal **25** (1975), 76–78.
- [L23] Löwig H., *Vollständige Mengen von Algebren*, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen Mathematik **24** (1978), 45–53.
- [L24] Löwig H., *On the completion of relatively complemented distributive lattices*, Portugaliae Mathematica **37** (1978), 161–176.

- [ABH] Abbott J. C., Birkhoff G., Holland Jr. S. S., Crapo H., Rota G.-C., Grätzer G., *Trends in Lattice Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, 1970, ix+215 stran.
- [Ar] Artamonov V. A., *Universal'nye algebrы*, Itogi nauki i tehniki. Algebra. Topologija. Geometrija **14** (1976), 191–248.
- [BD] Balbes R., Dwinger P., *Distributive Lattices*, Missouri Press, 1974, xiii+294 stran.
- [Be1] Bernstein B. A., *A generalization of the syllogism*, Bulletin of the American Mathematical Society **30** (1924), 125–127.
- [Be2] Bernstein B. A., *Postulates for Boolean algebra involving the operation of complete disjunction*, Annals of Mathematics **37** (1936), 317–325.
- [Bi] Bilová Š., *Lattice Theory in Czech and Slovak Mathematics until 1963*, Ph.D. Thesis, Faculty of Sciences, Masaryk University, Brno, 2004, 135 stran; viz též Š. Bilová: *Lattice Theory in Czech and Slovak Mathematics until 1963*, in E. Fuchs (ed.): *Mathematics throughout the Ages II*, Edition History of Mathematics, Vol. 25, Research Center for History of Sciences and Humanities, Prague, 2004, 185–346.
- [B1] Birkhoff G., *On the combination of subalgebras*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **29** (1933), 441–464.
- [B2] Birkhoff G., *Applications of lattice algebra*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **30** (1934), 115–122.
- [B3] Birkhoff G., *On the lattice theory of ideals*, Bulletin of the American Mathematical Society **40** (1934), 613–619.
- [B4] Birkhoff G., *Note on the paper “On the combination of subalgebras”*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **30** (1934), 200.
- [B5] Birkhoff G., *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31** (1935), 433–454.
- [B6] Birkhoff G., *Abstract linear dependence and lattices*, American Journal of Mathematics **57** (1935), 800–804.
- [B7] Birkhoff G., *On the combination of topologies*, Fundamenta Mathematicae **26** (1936), 156–166.
- [B8] Birkhoff G., *Rings of sets*, Duke Mathematical Journal **3** (1937), 443–454.
- [B9] Birkhoff G., *Lattices and their applications*, Bulletin of the American Mathematical Society **44** (1938), 793–800.
- [B10] Birkhoff G., *Lattice Theory*, Colloquium Publications 25, American Mathematical Society, New York, 1940, v+155 stran, 2. (opravené) vydání: 1948, xiii+283 stran, opravený dotisk: 1961, 3. vydání: Providence, Rhode Island, 1967, 1973, vi+418 stran, dotisky: 1979, 1984; ruský překlad 2. vydání (1948): *Teoriya struktur*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1952, 407 stran, ruský překlad 3. vydání (1967): *Teoriya rešetok*, Nauka, Moskva, 1984, 564 stran.
- [B11] Birkhoff G., *What is a lattice?*, The American Mathematical Monthly **50** (1943), 484–487.
- [B12] Birkhoff G., *Von Neumann and lattice theory*, Bulletin of the American Mathematical Society **64** (1958), N. 3, Part 2, 50–56.
- [B13] Birkhoff G., *Some problems of lattice theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, USA, Aug. 30 – Sept. 6, 1950), Vol. 2, 1952, 4–7.

- [BS] Burmeister P., Schmidt J., *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen II.*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **12** (1966), 311–315.
- [CFS] Csákány B., Fried E., Schmidt E. T. (eds.), *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 29. Universal Algebra*, Esztergom (Hungary), 1977, North-Holland, Amsterdam, 1982, 804 stran.
- [Da] van Dantzig D., *Zur topologischen Algebra. I. Komplettierungstheorie*, Mathematische Annalen **107** (1933), 587–626.
- [De1] Dedekind R., *Über Zerlegung von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*, Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig, 1897, 1–40, Werke II, 103–147.
- [De2] Dedekind R., *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe*, Mathematische Annalen **53** (1900), 371–403, Werke II, 236–271.
- [Di0] Diener K.-H., *Zur Theorie der absolut freien und verwandter Algebren*, Disertation, Köln, 1963.
- [Di1] Diener K.-H., *Order in absolutely free and related algebras*, Colloquium Mathematicum **14** (1966), 63–72.
- [Di2] Diener K.-H., *On constructing infinitary languages $L_{\alpha\beta}$ without the axiom of choice*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **29** (1983), 357–376.
- [Di3] Diener K.-H., *On the transitive hull of a κ -narrow relation*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik (Mathematic Logic Quarterly) **38** (1992), 387–398.
- [Di4] Diener K.-H., *On the natural order relation in Peano algebras with finitary or infinitary operations*, Bulletin of the Section Logic, University of Łódź, Department of Logic **22** (1993), 127–134.
- [Di5] Diener K.-H., *On the predecessor relation in abstract algebra*, Mathematical Logic Quarterly (Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik) **39** (1993), 492–514.
- [Dö] Dörge K., *Bemerkung über Elimination in beliebigen Mengen mit Operationen*, Mathematische Nachrichten **4** (1950/51), 282–297.
- [ES1] Ellis D. O., Sprinkle H. D., *Topology in B -metrized spaces. Preliminary report*, Bulletin of the American Mathematical Society **48** (1952), 573–574.
- [ES2] Ellis D. O., Sprinkle H. D., *Topology of B -metric spaces*, Compositio Mathematica **12** (1956), 250–262.
- [F] Felscher W., *Zur Algebra unendlich langer Zeichenreihen*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **11** (1965), 5–16.
- [GP] Georgescu G., Popescu A., *Similarity convergence in residuated structures*, Logic Journal of the IGPL, 2005, 389–413.
- [GSF] Gluchov M. M., Stelleckij I. V., Fofanova T. S., *Teorija struktur*, Itogi nauki. Algebra. Topologija. Geometrija (1968), 101–154.
- [G1] Grätzer G., *Universal Algebra*, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, Ontario, London, Melbourne, 1968, xiii+368 stran, 2. vydání: Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1979, xviii+581 stran, reprint: 2008, 586 stran.
- [G2] Grätzer G., *Lattice Theory. First Concepts and Distributive Lattices*, A series of books in mathematics, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1971, xv+212 stran, reprint: Dover Publications, 2008.

- [G3] Grätzer G., *General Lattice Theory*, Pure and Applied Mathematics 75, Academic Press, Inc., New York, London, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 52, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, Akademie Verlag, Berlin, 1978, xiii+381 stran, 2. vydání: *General Lattice Theory. New Appendices by the author with Davey B. A., Freese R., Ganter B., Greferath M., Jipsen P., Priestley H. A., Rose H., Schmidt E. T., Schmidt S. E., Wehrung F., Wille R.*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998, xix+ 663 stran, reprint: 2003, 2007; ruský překlad 1. vydání: *Obščaja teorija rešetok*, Mir, Moskva, 1982, 452 stran.
- [G4] Grätzer G., *General Lattice Theory: 1979 problem update*, Algebra Universalis **11** (1980), 396–402.
- [G5] Grätzer G., *Universal algebra and lattice theory: a story and three research problems*, Universal algebra and its links with logic, algebra, combinatorics and computer science, Proceedings of the 25. Arbeitstagung über allgemeine Algebra, Darmstadt, 1983, Research and Exposition in Mathematics **4** (1984), 1–13.
- [G6] Grätzer G., *The Congruences of a Finite Lattice. A Proof-by-Picture Approach*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 2005, xxii+281 stran, 2006, xxv+281 stran.
- [G7] Grätzer G., *Two Problems That Shaped a Century of Lattice Theory*, Notices of the American Mathematical Society **54** (2007), 696–707.
- [G8] Grätzer G., *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, xxix+613 stran.
- [H] Halmos P. R., *Lectures on Boolean Algebras*, Van Nostrand Mathematical Studies, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, 1963, iii+147 stran, reprint 1967.
- [Ha] Harzheim E., *Über die Grundlagen der universellen Algebra*, Mathematische Nachrichten **31** (1966), 39–52.
- [Hau] Hausdorff F., *Mengenlehre*, 2. vydání, 1927, 285 stran, 3. vydání: 1935, reprint: New York, 1944, anglický překlad: 1957; 1. vydání vyšlo pod názvem *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., 1914, viii+476 stran, reprint: New York, 1949.
- [HK] Hermes H., Köthe G., *Theorie der Verbände*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band I, Teil 1, Heft 5, 1939, 28 stran.
- [HH] Hoffmann R.-E., Hofmann K. H. (ed.), *Continuous Lattices and their Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 101, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1985, x+369 stran.
- [HR] Howard P., Rubin J. E., *Consequences of the Axiom of Choice*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, 432 stran.
- [H1] Huntington E. V., *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Transactions of the American Mathematical Society **5** (1904), 289–309, Errata ibid. **5** (1904), 552.
- [H2] Huntington E. V., *Effective equality and effective implication in formal logic*, Proceedings of the National Academy of Sciences **21** (1935), 266–271.
- [ÎÔ] Iséki K., Ôhashi S., *Axiom systems of distributive lattice*, Proceedings of the Japan Academy **46** (1970), 409–410.
- [J1] Jakubík J., *Sequential convergences in Boolean algebras*, Czechoslovak Mathematical Journal **38** (1988), 520–530.
- [J2] Jakubík J., *Disjoint sequences in Boolean algebras*, Mathematica Bohemica **123** (1998), 411–418.

- [J3] Jakubík J., *Sequential convergences on generalized Boolean algebras*, Mathematica Bohemica **127** (2002), 1–14.
- [JK] Jakubík J., Kolibiar M., *O nekotorych svojstvach par struktur*, Czechoslovak Mathematical Journal **4(79)** (1954), 1–27, abstrakt *On some properties of a pair of lattices* na stranách 26–27.
- [J] Janoš L., *Svojstva uplotnenija Cassenchausa*, Czechoslovak Mathematical Journal **3** (1953), 159–180, abstrakt *Properties of the Zassenhaus refinement* na straně 180, viz též *Vlastnosti Zassenhausovy konstrukce v grupách a svazech*, Časopis pro pěstování matematiky **88**(1963), 246–249.
- [KVP] Kantorovič L. V., Vulich B. Z., Pinsker A. G., *Poluuporjadočennye grupy i linejnye poluuporjadočennye prostranstva*, Uspechi matematičeskich nauk **6** (1951), 3(43), 31–98.
- [Ka] Kantorovitch L. V., *Lineare halbgeordnete Räume*, Matematičeskij sbornik **2(44)** (1937), 121–168.
- [Kem] Kempe A. B., *On a relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points*, Proceedings of the London Mathematical Society **21** (1890), 147–182.
- [Ken] Kenyon H., *Two theorems about relations*, Transactions of the American Mathematical Society **107** (1963), 1–9.
- [Ke1] Kerkhoff R., *Eine Konstruktion absolut freier Algebren*, Mathematische Annalen **158** (1965), 109–112.
- [Ke2] Kerkhoff R., *Über verallgemeinerte Peano-Algebren*, Mathematische Annalen **179** (1969), 251–256.
- [K] Klein F., *Boole-Schrödersche Verbände*, Deutsche Mathematik **1** (1936), 528–537.
- [KB] Kohoutová Z., Bečvář J., *Vladimír Kořínek, 1899–1981*, edice Dějiny matematiky, sv. 27, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2005, 329 stran, 40 obrazových příloh.
- [Ko] Kolibiar M., *Distributive sublattices of a lattice*, Proceedings of the American Mathematical Society **34** (1972), 359–364.
- [Ko1] Kořínek V., *Der Schreiersche Satz und das Zassenhausche Verfahren in Verbänden*, Věstník Královské české společnosti nauk, třída mat.-přírod., 1941, č. 14, 1–29.
- [Ko2] Kořínek V., *Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true*, Bulletin International, Académie Tchèque des Sciences **50** (1949), č. 23, 307–324, v české verzi: *Svazy v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova*, Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění **59**(1949), č. 23, 1–32.
- [Kö] Köthe G., *Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47** (1937), 125–144.
- [La] Landau E., *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930, xiv+134 stran, 2. vydání: New York, 1946, 139 stran, 3. vydání: Chelsea Publishing Company, New York, 1960, 173 stran, další vydání: 1965, 1997; anglicky: New York, 1951, 1957.
- [L] Löwenheim L., *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkul*, Mathematische Annalen **68** (1910), 169–207.
- [MN] MacNeille H. M., *Partially ordered sets*, Transactions of the American Mathematical Society **42** (1937), 416–460.

- [M] Maeda F., *Kontinuierliche Geometrien*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958, x+244 stran.
- [Ma] Manes E. G., *Free algebraic theories*, in Csákány B., Fried E., Schmidt E. T. (eds.): *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 29. Universal Algebra Esztergom (Hungary), 1977*, North-Holland, Amsterdam, 1982, 804 stran, 507–513.
- [Mar1] Marczewski E., *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **6** (1958), 731–736.
- [Mar2] Marczewski E., *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fundamenta Mathematicae **50** (1961), 45–61.
- [MA] Mathews J. C., Anderson R. F., *A comparison of two modes of order convergence*, Proceedings of the American Mathematical Society **18** (1967), 100–104.
- [Me] Mehrtens H., *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte, Series A, Vol. VI, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1979, ix+363 stran.
- [Ne] Nerode A., *Composita, equations, and freely generated algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **91** (1959), 139–151.
- [No1] von Neumann J., *Lectures on Continuous Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1937.
- [No2] von Neumann J., *Continuous Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1960, xi+299 stran, 2. vydání: 1998, předmluva: Israel Halperin.
- [Neu] Neumann B. H., *Special topics in algebra: Universal Algebra*, New York, 1962.
- [Ôh] Ôhashi S., *On definitions of Boolean rings and distributive lattices*, Proceedings of the Japan Academy **44** (1968), 1015–1017.
- [Om1] Omarov Ž. A., *O mnogoobrazii rešetok, opredelennom toždestvom Iqbalunnisy*, Algebra i logika **27** (1988), 305–315, v anglické verzi: *Varieties of lattices defined by Iqbalunnisa's identity*, Algebra and Logic **27**(1988), 190–198.
- [Om2] Omarov Ž. A., *O perešečenii necharakterizuemých mnogoobrazij rešetok*, Algebra i logika **29** (1990), 339–344, v anglické verzi: *Intersection of noncharacterizable varieties of lattices*, Algebra and Logic **29**(1990), 224–228.
- [Or] Ore Ø., *On the foundation of abstract algebra I, II*, Annals of Mathematics **36** (1935), 406–437, **37** (1936), 265–292.
- [PR] Padmanabhan R., Rudeanu S., *Axioms for Lattices and Boolean Algebras*, World Scientific Publ. Co., 2008, 216 stran.
- [Pa] Papangelou F., *Some considerations on convergence in Abelian lattice-groups*, Pacific Journal of Mathematics **15** (1965), 1347–1364.
- [Pe] Petropavlovskaja R. V., *O zakonach v strukturach*, Doklady Akademii nauk SSSR **74** (1950), 661–662.
- [Ra] Raney G. N., *Completely distributive complete lattices*, Proceedings of the American Mathematical Society **3** (1952), 677–680.
- [Re] Rennie B. C., *Lattices*, Proceedings of the London Mathematical Society **52** (1951), 386–400.
- [Ro] Rota G.-C., *The many lives of lattice theory*, Notices of the American Mathematical Society **44** (1997), 1440–1445.
- [S1] Schmidt J., *Peano-Bäume*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **6** (1960), 225–239.

- [S2] Schmidt J., *Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations*, *Mathematica Japonicae* **6** (1960–62), 77–112.
- [S3] Schmidt J., *Die Charakteristik einer allgemeinen Algebra. I.*, *Archiv der Mathematik* **13** (1962), 457–470.
- [S4] Schmidt J., *Some properties of algebraically independent sets in algebras with infinitary operations*, *Fundamenta Mathematicae* **55** (1964), 123–137.
- [S5] Schmidt J., *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen*, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **11** (1965), 227–239.
- [S6] Schmidt J., *Die überinvarianten und verwandte Kongruenzrelationen einer allgemeinen Algebra*, *Mathematische Annalen* **158** (1965), 131–157.
- [S7] Schmidt J., *Clones and semiclones of operations*, in Csákány B., Fried E., Schmidt E. T. (eds.): *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 29. Universal Algebra*, Esztergom (Hungary), 1977, North-Holland, Amsterdam, 1982, 804 stran, 705–723.
- [Si] Sikorski R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960, ix+176 stran, 2. vydání: 1964, ix+237 stran, 3. vydání: 1969; ruský překlad 2. vydání: *Bulevy algebr*, Mir, Moskva, 1969, 375 stran.
- [Sl] Słomiński J., *The theory of abstract algebras with infinitary operations*, *Rozprawy Matematyczne* **18** (1959), 66 stran.
- [Ste] Stephan J., *Varieties generated by lattices of breadth two*, *Order – A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications* **10** (1993), 133–142.
- [St1] Stone M. H., *The theory of representations for Boolean algebras*, *Transactions of the American Mathematical Society* **40** (1936), 37–111.
- [St2] Stone M. H., *Algebraic characterizations of special Boolean rings*, *Fundamenta Mathematicae* **29** (1937), 223–303.
- [Sz] Szász G., *Introduction to Lattice Theory*, Academic Press, New York, Toronto, London, 1963, 229 stran; jedná se o překlad titulu *Einführung in die Verbandstheorie*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962, 253 stran.
- [TY] Tamura T., Yaqub F. M., *Examples related to attainability of identities on lattices and rings*, *Mathematica Japonicae* **10** (1965), 35–39.
- [Vil] Vilhelm V., *Teorema Žordana-Gel'dera v strukturach bez uslovija konečnosti cepej*, *Czechoslovak Mathematical Journal* **4** (1954), 29–49, anglický abstrakt *Theorem of Jordan-Hölder in lattices without finite chain condition* na straně 49.
- [Vit] Vitner Č., *Usloviya semimoduljarnosti v strukturach*, *Czechoslovak Mathematical Journal* **3** (1953), 265–282, anglický abstrakt *The semimodular conditions in the lattices* na stranách 281–282.
- [Wh] Whitney H., *On the abstract properties of linear dependence*, *American Journal of Mathematics* **57** (1935), 509–533.
- [Wi] Wiener N., *Certain formal invariances in Boolean algebras*, *Transactions of the American Mathematical Society* **18** (1917), 65–72.
- [WS] Wilcox L. R., Smiley M. F., *Metric lattices*, *Annals of Mathematics* **40** (1939), 309–327, Errata ibid. 47(1946), 831.