10. Maďarský matematik Endre Szemerédi získal Abelovu cenu za rok 2012

Michal Křížek, Pavel Pudlák, Lawrence Somer

10.1. Úvod

V roce 2012 putovala Abelova cena za matematiku do Maďarska k prof. Endre Szemerédimu, který ji dostal za své fundamentální objevy v diskrétní matematice a teoretické informatice a jejich dlouhotrvajícím vlivům na aditivní teorii čísel a ergodickou

Endre Szemerédi

teorii. Je to již desátá jubilejní Abelova cena od svého vzniku v roce 2003. Dalším matematikem maďarského původu, který tuto nejprestižnější cenu za matematiku získal v roce 2005, je Peter Lax. Matematika v Maďarsku má totiž dlouholetou tradici. Vzpomeňme několika dalších význačných maďarských matematiků světového významu, např. János Bolyai, Lipót Fejér, Marcel Grossmann, Alfréd Haar, András Hajnal, Cornelius Lanzcos, László Lovász, John von Neumann, Rózsa Péter, George Pólya, Alfréd Rényi, Marcel Riesz, Pál Turán a jeho manželka Vera T. Sós, Endre Süli, Karl Zsigmondy, a též Pál Erdős, který má v databázi Mathematical Reviews registrováno přes 1 500 vědeckých prací. Jen málo zemí velikosti Maďarska se může podobným seznamem pochlubit. Maďaři navíc mají 13 nositelů Nobelových cen.

Prof. Endre Szemerédi převzal Abelovu cenu z rukou norského krále Haralda V. dne 22. května v hlavní aule univerzity v Oslu. Při této příležitosti přednesli slavnostní proslov norská ministryně pro školství a vědu Kristin Halvorsen, předseda Norské akademie věd Nils C. Stenseth a předseda výběrové komise (Abelkomiteen) Ragni Piene (viz [20]).

O den později pak byly prosloveny 4 abelovské přednášky. V úvodní přehledové přednášce *Randomness and Pseudorandomness* určené pro širší veřejnost prof. Avi Wigderson z Institute for Advanced Study v Princetonu vyzdvihl Szemerédiův přínos k teorii pseudonáhodných čísel. Pak sám prof. Szemerédi přednesl hlavní laureátskou přednášku na téma:

In Every Chaos There is an Order,

v níž popsal historii a současnost Szemerédiovy věty, které se budeme věnovat v kapitole 10.3. Další dvě abelovské přednášky pronesli László Lovász: *The Many Facets of the Regularity Lemma* a známý britský kombinatorik a nositel Fieldsovy medaile Timothy Gowers:[1] *The Afterlife of Szemerédi's Theorem.*

Prof. Endre Szemerédi se narodil 21. srpna 1940 v Budapešti, kde později vystudoval Univerzitu Loranda Eötvöse. Titul kandidáta věd získal na Moskevské státní univerzitě. Jeho školitelem byl slavný matematik Israel Gelfand. Za své klíčové výsledky z teorie čísel, kombinatoriky a teoretické informatiky Szemerédi získal celou řadu prestižních ocenění: Grünwaldovu cenu (1967, 1968), Rényiho cenu (1973), Pólyovu cenu za aplikovanou matematiku (SIAM 1975), Cenu Maďarské akademie věd (1979), Cenu Rolfa Schocka za matematiku (2008), Steelovu cenu Americké matematické společnosti (2008).

Připomeňme ještě, že prof. Szemerédi navštívil Prahu v roce 2010, když mu Univerzita Karlova udělila čestný doktorát (viz obr. 10.1). V současnosti pracuje v Matematickém ústavu Alfréda Rényiho Maďarské akademie věd v Budapešti. Je též zaměstnán v Department of Computer Science, Rutgers, The State University of New Jersey v USA. Navíc je členem věhlasného Institute for Advanced Study v Princetonu, který se rovněž nalézá ve státě New Jersey. Endre Szemerédi je ženatý a má pět dětí.

10.2. Aditivní teorie čísel

V tomto článku se soustředíme na nejznámější Szemerédiovy výsledky z aditivní teorie čísel, z teorie grafů a teoretické informatiky. Aditivní teorie čísel se věnuje studiu

[1]V nakladatelství Dokořán vyšel v roce 2006 překlad knihy T. Gowerse: *Matematika. Průvodce pro každého.* Govers ji napsal prý hlavně pro svoji ženu, aby věděla, čím se on – matematik – v práci zabývá.

Obr. 10.1. Prof. Endre Szemerédi (vlevo) přebírá čestný doktorát v aule Univerzity Karlovy od prof. Jaroslava Nešetřila (vpravo).

podmnožin celých čísel a jejich vlastností při sčítání (viz [11] a [12]). Jako příklad uveďme známou **Goldbachovu hypotézu**:

Každé sudé číslo větší než 2 *lze napsat jako součet dvou prvočísel.*

Tato domněnka dodnes není dokázána. Vznikla během vzájemné korespondence mezi Eulerem a Goldbachem v roce 1742 (např. vidíme, že $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 5 + 5 = 3 + 7$). Podle některých pramenů ji poprvé vyslovil Euler inspirován Goldbachem. V roce 1937 ruský matematik Ivan Matvejevič Vinogradov (1891–1983) dokázal, že existuje přirozené číslo n_0 tak, že každé liché $n > n_0$ lze vyjádřit jako součet tří prvočísel (viz [19]). Navíc nedávno Terence Tao dokázal, že každé liché číslo větší než jedna je součtem nejvýše pěti prvočísel [18].

V roce 1973 čínský matematik Jingrun Chen dokázal, že každé dostatečně velké sudé číslo je součtem prvočísla a součinu nejvýše dvou prvočísel (viz [8]). Tato věta se zatím považuje za nejlepší výsledek týkající se Goldbachovy hypotézy. Jiná Chenova věta tvrdí, že pro každé sudé číslo s existuje nekonečně mnoho prvočísel p tak, že $p+s$ je buď prvočíslo, nebo součin dvou prvočísel.

Dalším příkladem z aditivní teorie čísel je Waringův problém, který formuloval Edward Waring (1734–1798) kolem roku 1770. Pro dané přirozené číslo k označme

$$A_k = \{0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \dots\}$$

množinu k-tých mocnin. Ve *Waringově problému* jde o určení nejmenšího h tak, aby se každé přirozené číslo n dalo napsat ve tvaru

$$n = \sum_{m=1}^{h} a_m, \quad a_m \in A_k.$$

Pravděpodobně již Diofantos znal následující tvrzení:

Věta. *Každé přirozené číslo je součtem čtyř čtverců.*

Tuto tzv. *čtyřčtvercovou větu*[2] dokázal až Joseph Louis Lagrange v roce 1770. Pro $k = 2$ můžeme tedy volit $h = 4$ a snadno ověříme, že h nelze zmenšit (stačí uvažovat např. $n = 7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$).

Pro dané přirozené číslo k označme $g(k)$ nejmenší počet k-tých mocnin čísel $0, 1, 2, \ldots$, jejichž součtem lze vyjádřit jakékoliv přirozené číslo. Zřejmě $g(1) = 1$ a podle čtyřčtvercové věty je $g(2) = 4$. Číslo $23 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 2^3 + 2^3$ lze vyjádřit jako součet devíti třetích mocnin nezáporných celých čísel a snadno nahlédneme, že tento počet nelze snížit. Podobně zjistíme, že číslo 79 lze vyjádřit pomocí součtu 19 čtvrtých mocnin, ale nelze vyjádřit jejich menším počtem. Tedy $g(3) \geq 9$ a $g(4) \geq 19$. Roku 1909 Arthur Wieferich [19] odvodil, že $g(3) = 9$, a v roce 1986 Ramachandran Balasubramanian a kol. [3] dokázal, že $g(4) = 19$. Dnes víme, že $g(5) = 37$ (viz [7]) a $g(6) = 73$ (viz [13]). Pro obecné k řešení Waringova problému dosud není známo, i když se zdá, že $g(k) = 2^k - 2 + \lfloor (3/2)^k \rfloor$.

Nyní se soustředíme na van der Waerdenova čísla, kterými se rovněž zabývá aditivní teorie čísel. Ukážeme si, jak se tato čísla zavádějí pomocí různě obarvených přirozených čísel. Pro jednoduchost uvedeme jen jeden ilustrační příklad.

Každé přirozené číslo obarvíme buď červenou, anebo modrou barvou. Pak snadno nahlédneme, že posloupnost $1, 2, \ldots, 9$ obsahuje aritmetickou podposloupnost stejné barvy a délky 3.

Pokusme se dokázat opak, tj. předpokládejme, že posloupnost $1, 2, \ldots, 9$ neobsahuje aritmetickou podposloupnost stejné barvy a délky 3. Tedy 1, 5 a 9 nemají stejnou barvu. V dalším budeme červená čísla podtrhávat a modrá čísla budeme psát s pruhem nahoře. Rozlišujme dva případy:

1. Nechť $\underline{1}$ a $\underline{5}$ jsou obarveny červeně a $\overline{9}$ modře. Protože $\underline{1}$ a $\underline{5}$ jsou obarveny červeně, musí být číslo $\overline{3}$ modré. Číslo $\overline{9}$ je však modré, a proto $\underline{6}$ musí být červené. Jelikož čísla $\underline{5}$ a $\underline{6}$ jsou červená, jsou $\overline{4}$ a $\overline{7}$ modrá. Číslo $\underline{8}$ musí být však červené, protože $\overline{7}$ a $\overline{9}$ jsou modrá. Protože $\overline{3}$ a $\overline{4}$ jsou modrá, musí být $\underline{2}$ červené. Pak ale aritmetická posloupnost $\underline{2}$, $\underline{5}$ a $\underline{8}$ obsahuje všechna červená čísla, což je spor.

2. Případ, že čísla $\underline{1}$ a $\underline{9}$ jsou červená a $\overline{5}$ je modré, vede ke sporu podobným způsobem.

Dále vidíme, že posloupnost $\underline{1}\overline{2}\underline{3}\overline{45}\underline{6}\overline{7}\underline{8}$ neobsahuje stejně obarvenou aritmetickou podposloupnost délky 3. Tedy počet členů 9 je nejmenší možný pro výše uvedený příklad. Přitom se nemusí jednat jen o posloupnost $1, 2, \ldots, 9$, ale o jakoukoliv posloupnost po sobě jdoucích celých čísel o devíti členech. Pomocí výše uvedeného postupu lze zavést van der Waerdenovo číslo $W(2, 3) = 9$ odpovídající dvěma barvám a aritmetickým posloupnostem délky 3. Podobně se zavádějí i další van der Waerdenova čísla.

[2]Např. $1634 = 1^2 + 9^2 + 16^2 + 36^2$.

10.3. Szemerédiova věta

Szemerédiova věta, která zobecňuje vlastnosti van der Waerdenových čísel, je jedním z nejkrásnějších výsledků aditivní teorie čísel. Než ji vyslovíme, uvedeme několik okolností, jež vedly k jejímu vzniku.

V roce 1936 Erdős a Turán vyslovili následující hypotézu [5] (která ze Szemerédiovy věty plyne):

Pro každé $d \in (0,1]$ a přirozené číslo k existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ každá podmnožina $\mathbb{B} \subset \{1,\dots,n\}$, jejíž mohutnost je alespoň dn, obsahuje aritmetickou posloupnost délky k.

Pro libovolnou podmnožinu $\mathbb{B}$ množiny přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ definujme *horní asymptotickou hustotu* $\mathbb{B}$ následovně

$$\overline{d}(\mathbb{B}) = \limsup_{n\to\infty} = \frac{|\mathbb{B} \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n},$$

kde $|\cdot|$ označuje počet prvků.

Uveďme nejprve několik triviálních příkladů. Jestliže $\mathbb{B}$ je množina sudých čísel, pak její horní asymptotická hustota je $1/2$. Je-li $\mathbb{B} = \{1,2,\dots,10\}$, pak horní asymptotická hustota $\mathbb{B}$ je nula. Rovněž pro

$$\mathbb{B} = \{1, 10, 100, 1000, \dots\}$$

je horní asymptotická hustota nulová.

V roce 1953 Klaus Friedrich Roth dokázal, že každá podmnožina $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$, jejíž horní asymptotická hustota je kladná, obsahuje aritmetickou posloupnost délky 3. V roce 1969 Szemerédi zvýšil tento počet na 4 a v roce 1975 pak dokázal následující větu (viz [16]).

Szemerédiova věta. *Každá podmnožina $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$ s kladnou horní asymptotickou hustotou obsahuje aritmetickou posloupnost libovolné délky.*

Již v roce 1973 Pál Erdős formuloval silnější tvrzení, které ovšem dodnes není dokázáno:

Erdősova-Turánova domněnka. *Nechť součet převrácených hodnot prvků z množiny $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$ je větší než jakékoliv přirozené číslo. Pak $\mathbb{B}$ obsahuje aritmetickou posloupnost libovolné délky.*

V roce 2004 Ben Green a Terence Tao dokázali, že množina prvočísel obsahuje aritmetické posloupnosti libovolné délky. Jedná se tedy o důležitou speciální část Erdősovy-Turánovy domněnky pro případ, že $\mathbb{B} = \mathbb{P}$ je množina prvočísel (viz [6], [10]). Kdyby tato domněnka byla pravdivá, pak by výsledek Greena a Taa byl jejím důsledkem, protože

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

V tomto případě nelze použít Szemerédiovu větu, neboť horní asymptotická hustota množiny $\mathbb{P}$ všech prvočísel je nula.

10.4. Erdősova-Szemerédiova věta

V roce 1983 Endre Szemerédi publikoval s Pálem Erdősem mírně modifikovanou větu uvedenou níže (viz [4]).

Nejprve však zavedeme následující označení. Pro konečnou podmnožinu A množiny reálných čísel položme

$$A + A = \{a + b \mid a, b \in A\}, \quad A \cdot A = \{ab \mid a, b \in A\}.$$

Erdősova-Szemerédiova věta. *Existují kladné reálné konstanty C a ε tak, že pro každou konečnou a neprázdnou podmnožinu A množiny reálných čísel platí*

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq C|A|^{1+\varepsilon}.$$

Všimněme si, že velikost $A + A$ je srovnatelná s A, je-li A tvořena konečnou aritmetickou posloupností. Na druhé straně, je-li A tvořena konečnou geometrickou posloupností, pak zase $A \cdot A$ má velikost srovnatelnou s A. Je-li A dostatečně velká, pak se nemůže současně podobat aritmetické a zároveň geometrické posloupnosti. Erdős a Szemerédi navíc vyslovili domněnku, že číslo ε může být libovolně blízko 1. József Solymosi [15] později dokázal, že ε může být libovolně blízko 1/3.

10.5. Szemerédiovo lemma o regularitě

Nejprve definujme několik pojmů. Nechť G je (konečný) graf. *Hustotou páru dvou disjunktních podmnožin jeho vrcholů X a Y* nazveme číslo

$$\rho(X, Y) = \frac{|E(X, Y)|}{|X||Y|},$$

kde $|\cdot|$ opět označuje počet prvků (kardinalitu) a $E(X, Y)$ je množina hran, které mají jeden vrchol v X a druhý v Y.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pár dvou disjunktních podmnožin vrcholů X a Y grafu G nazveme *ε-pseudonáhodný* (ε-regulární), jestliže pro všechny podmnožiny $A \subset X$ a $B \subset Y$ splňující nerovnosti $|A| \geq \varepsilon|X|$ a $|B| \geq \varepsilon|Y|$ platí

$$|\rho(X, Y) - \rho(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Jinými slovy, hustota $\rho(X, Y)$ se příliš neliší od původní hustoty $\rho(A, B)$.

Rozklad množiny vrcholů grafu G na k podmnožin $V_1, \ldots, V_k$ se nazývá *ε-rozklad*, jestliže

$$||V_i| - |V_j|| \leq 1 \text{ pro všechna } i \text{ a } j \tag{10.1}$$

a všechny páry V_i, V_j, $i < j$, jsou ε-pseudonáhodné kromě nejvýše εk^2 párů.

Následující lemma je dokázáno v [17].

Lemma o regularitě. *Pro každé $\varepsilon > 0$ a přirozené číslo m existuje přirozené číslo M takové, že když G je graf s alespoň m vrcholy, pak existuje přirozené číslo k v intervalu $m \leq k \leq M$ a ε-rozklad vrcholů grafu G na k podmnožin.*

Szemerédiovo lemma o regularitě zhruba tvrdí, že každý dostatečně velký graf lze rozdělit na podmnožiny, které mají přibližně stejnou velikost, tj.

$$|V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_k| \leq |V_1| + 1$$

(srov. (10.1)), takže hrany mezi různými podmnožinami jsou rozloženy téměř náhodně. Pro každé k takový rozklad vždy existuje. Při praktických aplikacích se často uvažuje rozklad speciálních grafů na podmnožiny stejné velikosti (tj. v (10.1) platí ostrá nerovnost).

Brzy po publikaci Szemerédiova lemmatu o regularitě se ukázalo, že jej lze použít na jednoduchý důkaz Rothovy věty (viz kap. 10.3). Tím se objevila přirozená otázka, zda by se Szemerédiovo lemma nedalo zobecnit tak, aby z něj plynula Szemerédiova věta v celé obecnosti. Na to bylo potřeba zobecnit Szemerédiovo lemma na hypergrafy.[3] To je poměrně netriviální záležitost, která se teprve nedávno podařila Vojtěchu Rödlovi a jeho studentům a nezávisle také T. Gowersovi.

10.6. Szemerédiovy práce v teoretické informatice

Endre Szemerédi se proslavil také výsledky v teoretické informatice. Většina těchto prací vznikla ve spolupráci s Miklósem Ajtaiem a Jánosem Komlósem. Jeden z nejznámějších výsledků, který vznikl při této spolupráci, je tzv. *AKS třídicí síť* pojmenovaná podle počátečních písmen autorů článku [1].

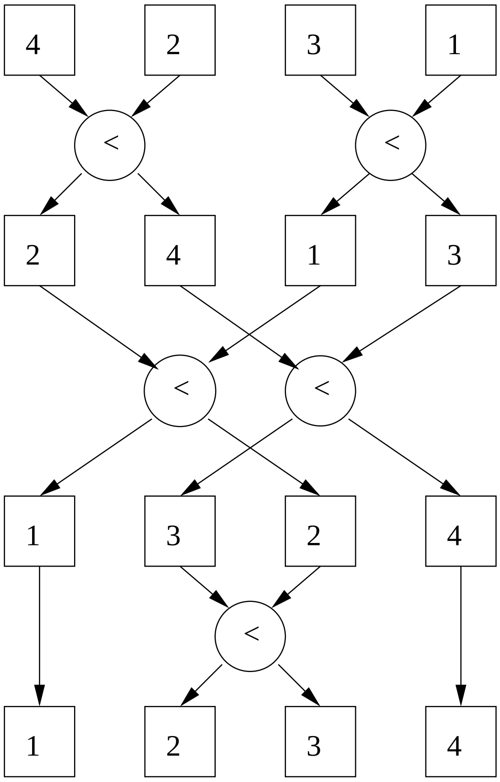
V informatice se často používají algoritmy na třídění. Jde o úlohu, kde je zadaná posloupnost prvků $(a_1, \ldots, a_n)$ nějaké uspořádané množiny a cílem je tuto posloupnost přerovnat tak, aby v ní byly prvky ve vzestupném pořadí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zadaná posloupnost je permutací konečné posloupnosti $1, 2, \ldots, n$.

Třídicí algoritmus (síť) je posloupnost k kroků, kde každý krok je pevně daná množina vzájemně disjunktních dvojic indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tento algoritmus se na vstupní permutaci $a_1 a_2 \ldots a_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ aplikuje takto:

V každém kroku se zvolí množina disjunktních dvojic indexů. Pro každou z těchto dvojic se příslušná čísla porovnají a zamění se, pokud nejsou ve vzestupném pořadí. Důležité je, že dvojice pro každý krok jsou zvoleny předem, nezávisle na tom, jakou posloupnost třídíme. Proto lze tento algoritmus znázornit jako síť. Počet kroků potom odpovídá hloubce sítě. Na obr. 10.2 je jednoduchý ilustrační příklad třídicí sítě $n = 4$ (není to AKS síť, protože tu lze vytvářet jen pro větší n).

Je snadné dokázat, že každá třídicí síť musí mít hloubku alespoň $\log_2 n$. Třídicí síť si totiž můžeme představit jako způsob, jak realizovat permutaci. Pro každou permutaci můžeme přiřadit rozhodovacím blokům sítě nuly a jedničky podle toho, zda v daném rozhodovacím bloku dojde k záměně prvků či nikoliv. Počet možných ohodnocení je tedy horním odhadem na počet permutací. Má-li síť m rozhodovacích bloků, musí platit $2^m \geq n!$ (srov. obr. 10.2, kde $m = 5$ a $n = 4$). Odtud $m \geq c \cdot n \log n$ pro nějakou konstantu c. Protože v každém kroku můžeme porovnat nejvýše $n/2$ dvojic, musí mít síť hloubku alespoň $c \log n/2$.

[3] V grafu jsou spojeny některé dvojice vrcholů hranou, zatímco hypergraf dává do souvislosti trojice, čtveřice, pětice, ... vrcholů.



Obr. 10.2. Příklad třídicí sítě a jejího použití na přerovnání posloupnosti 4, 2, 3, 1 podle velikosti. Kroužky jsou označeny bloky, v nichž se rozhoduje, zda je třeba dané dva vstupní údaje prohodit podle velikosti. Stejná síť srovná podle velikosti libovolnou posloupnost délky 4 se vzájemně různými prvky.

Tento lehký důkaz může svádět k domněnce, že je také snadné sestrojit síť hloubky konst. $\log n$. Ve skutečnosti to není vůbec jednoduché. Výsledek Ajtaie, Komlóse a Szemerédiho [1], že taková síť se dá sestrojit, je velice složitý. Nejtěžší částí je důkaz tvrzení, že zkonstruovaná síť setřídí každou posloupnost.

10.7. Závěr

Szemerédiova věta z kapitoly 10.3. vlastně ukazuje na jistý skrytý řád v každé dostatečně velké množině přirozených čísel. Celá řada dalších matematických tvrzení také nese Szemerédiovo jméno, např. Hajnalova-Szemerédiova věta o vyvážených obarveních grafů[4] či Szemerédiova-Trotterova věta o počtu incidencí přímek a bodů. Databáze Mathematical Reviews eviduje přes 170 jeho prací. Na některých z nich spolupracoval i s českými matematiky (Václavem Chvátalem, Vojtěchem Rödlem či Pavlem

[4]Každý graf s maximálním stupněm vrcholů d se dá vrcholově řádně obarvit $d + 1$ barvami tak, že počty vrcholů téže barvy se liší maximálně o 1.

Pudlákem, viz [2], [9]). Matematická společnost Jánose Bolyaie vydala v nakladatelství Springer sborník *An Irregular Mind* věnovaný sedmdesátým narozeninám E. Szemerédiho, kde se podrobně rozebírá jeho přínos pro matematiku. Nedávno byl také s ním publikován rozhovor [14].

Szemerédi se ve svém výzkumu soustředil na dva protichůdné pojmy: řád a chaos ve velkých kombinatorických strukturách. Szemerédiova genialita umožnila dokázat existenci jistého řádu ve velkých strukturách při použití výsledků o náhodnosti.

L i t e r a t u r a

[1] Ajtai, M., Komlós, J., Szemerédi, E.: *Sorting in $c \log n$ parallel steps.* Combinatorica *3*(1) (1983), 1–19.

[2] Babai, L., Pudlák, P., Rödl, V., Szemerédi, E.: *Lower bounds to the complexity of symmetric Boolean functions.* Theoret. Comput. Sci. *74* (1990), 313–323.

[3] Balasubramanian, R., Deshouillers, J.-M., Dress, F.: *Problème de Waring pour les bicarrés (Waring's problem for biquadrates, Part I, II).* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. *303* (1986), 85–88, 161–163.

[4] Erdős, P., Szemerédi, E.: *On sums and products of integers.* In: Studies in Pure Mathematics, Birkhäuser, Basel 1983, 213–218.

[5] Erdős, P., Turán, P.: *On some sequences of integers.* J. London Math. Soc. *11* (1936), 261–264.

[6] Green, B., Tao, T.: *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.* Ann. of Math. *167* (2008), 481–547.

[7] Chen, J. R.: *Waring's problem for $g(5) = 37$ (in Chinese).* Sci. Sin. *13* (1964), 1547–1568. Chinese Math. *6* (1965), 105–127. Translation from Acta Math. Sin. *14* (1964), 715–734.

[8] Chen, J. R.: *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes.* Sci. Sinica *16* (1973), 157–176.

[9] Chvátal, V., Szemerédi, E.: *Short cycles in directed graphs.* J. Combin. Theory Ser. B *35* (1983), 323–327.

[10] Klazar, M.: *Prvočísla obsahují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti.* PMFA *49* (2004), 177–188.

[11] Nathanson, M. B.: *Additive number theory: Inverse problems and the geometry of sunsets.* Springer, New York 1996.

[12] Nathanson, M. B.: *Additive number theory: The classical bases.* Springer, New York 1996.

[13] Pillai, S. S.: *On Waring's problem $g(6) = 73$.* Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. *12* (1940), 30–40.

[14] Raussen, M., Skau, C.: *Interview with Endre Szemerédi.* Notices Amer. Math. Soc. *60* (2013), 221–231.

[15] Solymosi, J.: *An upper bound on the multiplicative energy.* Dostupné z: `http://arxiv.org/abs/0806.1040`

[16] Szemerédi, E.: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Acta Arithmetica *27* (1975), 199–245.

[17] Szemerédi, E.: *Regular partitions of graphs.* In: Problèmes combinatoires et théorie des graphs, Colloques Internationaux CNRS *260*, 1976, Univ. Orsay, Paris 1978, 399–401.

[18] Tao, T.: *Every odd number greater than* 1 *is the sum of at most five primes.* arXiv: 1201.6656 (přijato do Math. Comp.).

[19] Vinogradov, I. M.: *Some theorems concerning the theory of primes.* Rec. Math. Moscou New Ser. *2* (1937), 179–195.

[20] Wieferich, A.: *Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt (Proof of theorem that every integer can be written as a sum of at most nine positive cubes).* Math. Ann. *66* (1909), 95–101.

[21] `http://www.abelprisen.no/en/`