Kapitola I.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.

V prvním semestru jsme se zabývali jednak derivováním, tj. k dané funkci jsme hledali její derivaci, jednak úlohou obrácenou: k dané funkci f nalézt v intervalu (a, b) tzv. primitivní funkci F, tj. funkci, pro kterou je $F'(x) = f(x)$ všude v (a, b). Taková funkce F existuje jistě, jestliže f je spojitá v (a, b) (to jsme dokázali v 2.semestru). Zároveň víme: existuje-li k f v (a, b) jedna primitivní funkce F, existuje jich nekonečně mnoho, a všechny jsou dány výrazem $F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta. Značili jsme ty primitivní funkce také $\int f(x)\,dx$. Řekněme to trochu jinak: Je dána funkce f v intervalu (a, b), nechť f je třeba spojitá v (a, b). Napišme rovnici

(1) $$y' = f(x) \; .$$

Úkol je tento: nalézt všechny funkce $y(x)$, které vyhovují v intervalu (a, b) rovnici (1) v tomto smyslu: dosadím-li do (1) za y' derivaci $y'(x)$ té funkce, je rovnice (1) splněna pro všechna $x \in (a, b)$, tj. je $y'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Každou takovou funkci $y(x)$ nazveme <u>řešením</u> rovnice (1) v intervalu (a, b). Podle toho, co jsme řekli zpočátku, jsou řešeními rovnice (1) v intervalu (a, b) právě všechny funkce primitivní k f v (a, b), a tedy je řešení rovnice (1) nekonečně mnoho.

Rovnice (1) je vztah mezi proměnnou x a derivací "neznámé" (nebo "hledané") funkce y. Často se vyskytují obecnější rovnice, kde je dán vztah mezi proměnnou x, "neznámou funkcí" y a její derivací y', tedy vztah tvaru

(2) $$F(x, y, y') = 0 \; ,$$

kde F je nějaká daná funkce tří proměnných, a jde o to, nalézt funkce $y(x)$, které v nějakém intervalu (a, b) "vyhovují" této rovnici v tom smyslu, že rovnice je splněna pro všechna $x \in (a, b)$, když do ní za y dosadím $y(x)$ a za y' dosadím $y'(x)$; tj. má být:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{pro všechna} \quad x \in (a, b) \; .$$

Taková funkce $y(x)$ se nazývá řešením této rovnice (2) v intervalu (a, b). Rovnici (2) se říká <u>diferenciální rovnice 1.řádu</u>, protože v ní vystupuje derivace 1.řádu, ale žádné derivace vyššího řádu.[1] Zvláštním případem rovnic

[1] Jestliže speciálně F v (2) nezávisí na y', jde ovšem o jednodušší vztah, totiž jen o vztah mezi x a y tvaru $G(x, y) = 0$. Takové rovnici se zpravidla neříká diferenciální rovnice.

1.řádu jsou rovnice rozřešené podle y', tj. rovnice tvaru

(3) $$y' = f(x, y) ,$$

kde f je nějaká daná funkce dvou proměnných ((3) lze totiž psát ve tvaru $y' - f(x, y) = 0$, což je speciální případ rovnice (2)).

Obecněji se často vyskytuje vztah tvaru

(4) $$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 ,$$

kde $\mathcal{F}$ je nějaká daná funkce $n + 2$ proměnných. Rovnici (4) se říká diferenciální rovnice n-tého řádu.[1] Funkci $y(x)$ nazýváme řešením rovnice (4) v intervalu (a, b) , jestliže rovnice (4) je splněna pro všechna $x \in (a, b)$, když do ní za písmena $y, y', \dots, y^{(n)}$ dosadíme hodnoty funkce $y(x)$ a jejích derivací, tj. když je $\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Zvláštním případem rovnice (4) je opět rovnice rozřešená podle nejvyšší derivace $y^{(n)}$, tj. rovnice tvaru

(5) $$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) .$$

Budeme se téměř výhradně zabývat diferenciálními rovnicemi rozřešenými podle nejvyšší derivace.

Podobně jako v algebře vedle rovnice o jedné neznámé studujeme často soustavu několika rovnic o několika neznámých, setkáváme se také se soustavami diferenciálních rovnic s několika "neznámými" funkcemi.

Například.: $$y' = f(x, y, z) , \quad z' = g(x, y, z)$$

je soustava dvou diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce $y(x)$, $z(x)$.

Ve všech rovnicích, o nichž jsme dosud mluvili, se hledají řešení, jež jsou funkcemi jedné proměnné. Těmto diferenciálním rovnicím se často říká obyčejné diferenciální rovnice. Vedle nich se vyskytují také rovnice (nebo jejich soustavy), kde řešení jsou funkcemi aspoň dvou proměnných, např. rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 3xyz^2 \sin(xz) \quad ;$$

hledá se funkce $z(x, y)$, která v nějakém oboru hodnot x , y splňuje tuto rovnici (podrobněji o tom nebudeme mluvit). Protože se zde vyskytují parciální derivace, říká se těmto rovnicím parciální diferenciální rovnice. V této přednášce se omezím na obyčejné diferenciální rovnice, a to jenom na několik nejjednodušších případů. Podotýkám, že slovem derivace rozumím v této kapitole vždy vlastní derivaci.

---

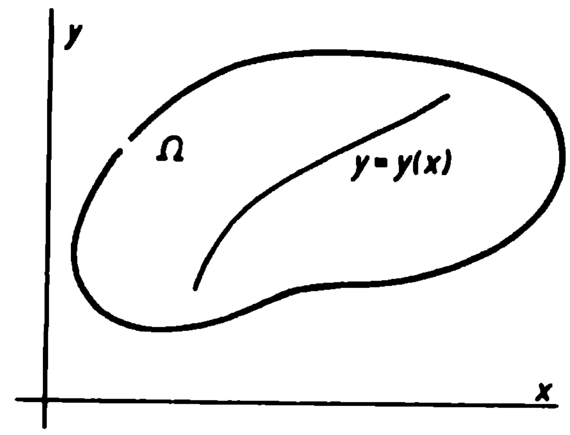
1) Jestliže funkce $\mathcal{F}$ v (4) nezávisí na $y^{(n)}$, neužívá se zpravidla názvu "diferenciální rovnice n-tého řádu".

§ 1. Příklady diferenciálních rovnic 1.řádu.

Taková rovnice, je-li rozřešena podle derivace, má tvar:

(6) $y' = f(x, y)$ (budeme též psát $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$) ;

přitom funkce f je dána, hledáme funkce $y(x)$, které jsou v některém intervalu řešením té rovnice. Funkce $f(x, y)$ buď definována v nějaké množině Ω bodů v rovině. Hledáme ovšem taková řešení $y(x)$ této rovnice, pro něž bod $[x, y(x)]$ stále leží v Ω (jinak bychom nemohli sestrojit číslo $f(x, y(x))$); to znamená, že hledáme řešení $y(x)$, jejichž graf leží v Ω - kratčeji říkáme, že řešení $y(x)$ leží v Ω (obr. 1.).



Obr. 1.

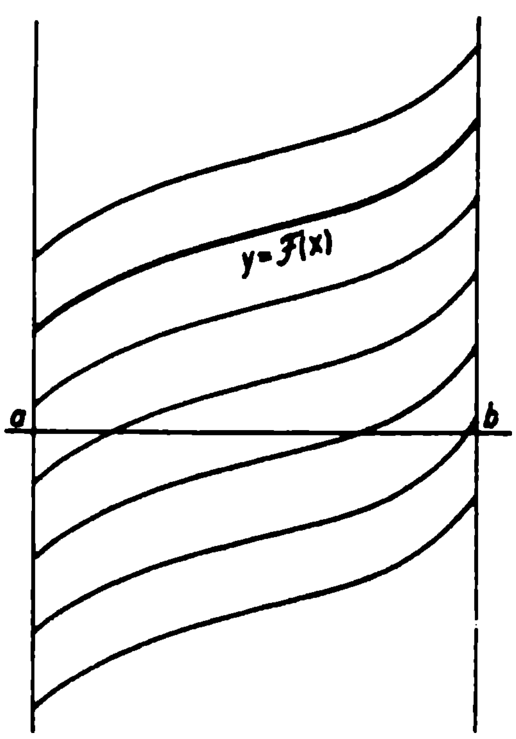
Vezměme několik jednoduchých speciálních případů.

I.

Funkce f nezávisí na y, takže jde o rovnici tvaru

(7) $y' = f(x)$;

předpokládejme, že funkce f je spojitá v (a, b). Budeme hledat řešení v intervalu (a, b), tj. řešení, ležící v pásu $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ (tento "pás" přejde v polorovinu nebo celou rovinu, je-li $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$ nebo obojí). Řešení rovnice (7) známe z integrálního počtu: rovnice (7) říká, že $y(x)$ má být primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). Budiž $F(x)$ jedna taková primitivní funkce (víme, že taková primitivní funkce existuje, ježto f je spojitá v (a, b)). Všechny primitivní funkce k f v (a, b) jsou potom funkce $y(x) = F(x) + C$, kde C je konstanta - to jsou tedy všechna řešení naší rovnice v (a, b) : všechna vznikají z jednoho z nich tím, že měním C - tj. grafy těchto řešení vznikají jeden z druhého posunutím rovnoběžným s osou y. Je vidět, že každým bodem našeho pásu prochází právě jedno řešení (v intervalu (a, b)), viz obr. 2.



Obr. 2.

II.

Nechť funkce $f(x, y)$ nezávisí na x, takže rovnice má tvar

(8) $\qquad y' = g(y) \qquad$ neboli $\qquad \dfrac{dy}{dx} = g(y)$.

O funkci g předpokládejme, že je v jistém intervalu (c, d) spojitá a různá od nuly, tedy buďto stále kladná nebo stále záporná. Budeme hledat řešení, ležící v pásu $-\infty < x < +\infty$, $c < y < d$ (zase to může být polorovina nebo celá rovina).

Máme hledat funkci $\eta(x)$ takovou, že v jistém intervalu (α, β) je

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = g(\eta(x)) , \quad c < \eta(x) < d .$$

Je-li funkce $\eta(x)$ řešením rovnice (8) v nějakém intervalu (α, β), je

$$\eta'(x) = g(\eta(x)) .$$

Ježto $g(\eta(x))$ je stále kladná nebo stále záporná, je η' stále kladná nebo stále záporná, tedy η ryze monotonní v (α, β). Tedy existuje k funkci η inversní funkce ξ (jestliže η zobrazuje (α, β) na (γ, δ), zobrazuje ξ naopak (γ, δ) na (α, β)); rovnice $y = \eta(x)$ znamená pak totéž jako $x = \xi(y)$.

Najděme derivaci funkce ξ: $\dfrac{d\xi(y)}{dy} = \dfrac{1}{\frac{d\eta(x)}{dx}} = \dfrac{1}{g(\eta(x))}$, kde ovšem x je voleno tak, že $\eta(x) = y$; tedy $\dfrac{d\xi(y)}{dy} = \dfrac{1}{g(y)}$, neboli funkce ξ je řešením rovnice

(9) $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)} .$$

Je-li tedy nějaká funkce řešením rovnice (8), je její inversní funkce řešením rovnice (9).

Naopak, nechť nějaká funkce ξ je řešením rovnice (9), tj. $\dfrac{d\xi(y)}{dy} = \dfrac{1}{g(y)}$. Potom ξ má derivaci stále kladnou nebo stále zápornou, tedy je ryze monotonní a existuje k ní inversní funkce η. Rovnice $x = \xi(y)$ znamená potom totéž jako $y = \eta(x)$; dále je

$\dfrac{d\eta(x)}{dx} = \dfrac{1}{\frac{d\xi(y)}{dy}} = g(y) = g(\eta(x))$, tj. funkce η je řešením rovnice (8).

Tedy: je-li nějaká funkce řešením rovnice (9), je funkce k ní inversní řešením rovnice (8).

Shrneme-li oba předcházející výsledky, vidíme toto: Všechna řešení rovnice (8) $\dfrac{dy}{dx} = g(y)$ dostaneme tak, že najdeme všechna řešení rovnice (9) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{g(y)}$ a k nim sestrojíme funkce inversní.

Řešení rovnice (9) jsou všechny primitivní funkce $\int \frac{dy}{g(y)}$. Vezmu tedy jednu primitivní funkci $G(y)$, načež všechna řešení jsou

$$x = G(y) + \mathcal{K} \tag{10}$$

s libovolnou konstantou $\mathcal{K}$. Tím je x dáno jako funkce y, a mám nyní sestrojit funkci inversní, tj. máme "řešit" (10) podle y. Označíme-li funkci inversní ke G znakem Γ, značí rovnice (10) totéž jako $x - \mathcal{K} = G(y)$, tj. totéž jako

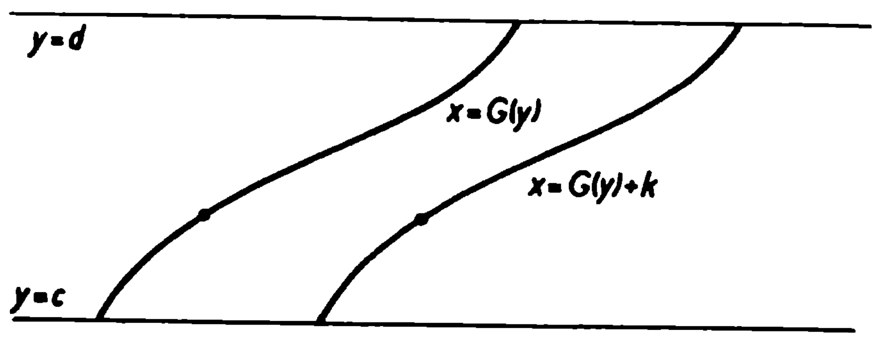
$$y = \Gamma(x - \mathcal{K}) . \tag{11}$$

Tato rovnice dává tedy právě všechna řešení rovnice (8). Jak je dostanu? Vezmu některou primitivní funkci $G(y)$ k $\frac{1}{g(y)}$ (mohu ji vzít v celém intervalu (c, d)), načež všechna řešení dostanu tak, že rovnici $x = G(y) + \mathcal{K}$ "řeším" podle y ($\mathcal{K}$ libovolná konstanta). Nejlépe se to pamatuje takto: mám rovnici $\frac{dy}{dx} = g(y)$; dám docela formálně písmeno x na jednu stranu a y na druhou: $dx = \frac{dy}{g(y)}$. Napíši " $\int$ " a nezapomenu na "integrační konstantu":

$$x = \int \frac{dy}{g(y)} + \mathcal{K} ,$$

kde " $\int$ " znamená jistou určitě zvolenou primitivní funkci. A tuto rovnici "řeším" podle y.

Jak vypadají ta řešení geometricky, je vidět z obr. 3. Všechna řešení vznikají z jednoho libovolným posunutím rovnoběžným s osou x a vyplňují opět celý pás tak, že každým bodem pásu prochází právě jedno řešení.



Obr. 3.

<u>Příklad 1:</u> $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, $\qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$,

$$x = \operatorname{arctg} y + \mathcal{K}, \qquad y = \operatorname{tg}(x - \mathcal{K})$$

(v intervalu $(\mathcal{K} - \frac{\pi}{2}, \mathcal{K} + \frac{\pi}{2})$).

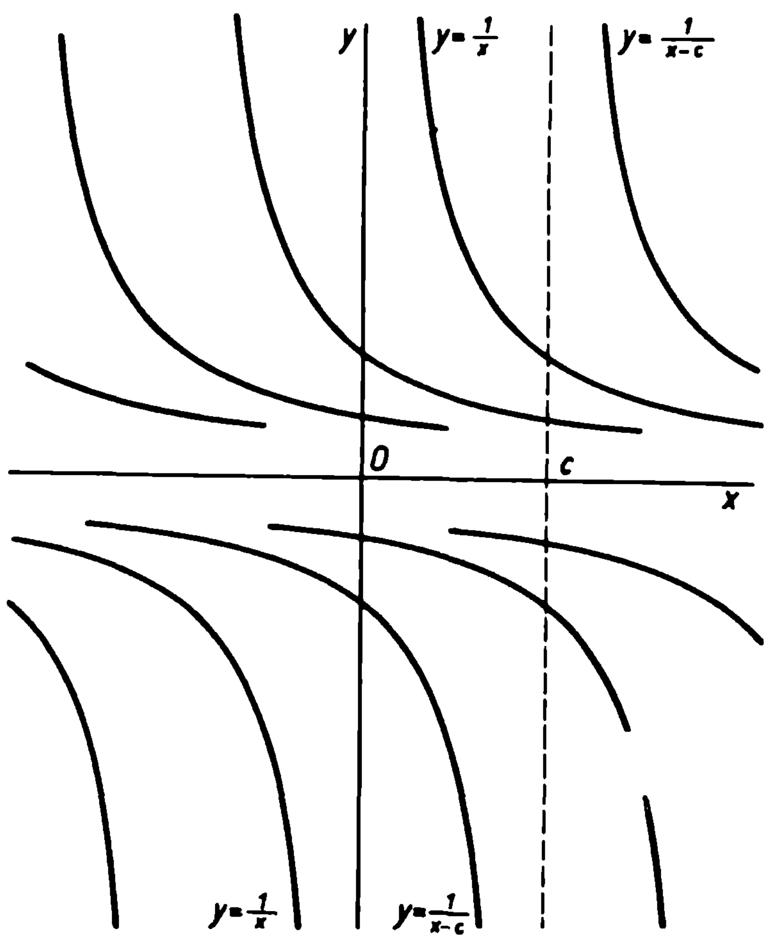
<u>Poznámka 1.</u> Chceme-li být zcela přesní, musíme slova "všechna řešení" trochu vysvětlit. Jestliže jsou dány dva intervaly $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, a jestliže funkce $y(x)$ s definičním oborem (a, b) je řešením diferenciální rovnice v intervalu (a, b) , potom je funkce $Y(x)$, která má definiční obor (α, β) a splývá v něm s funkcí $y(x)$ (tj. $Y(x) = y(x)$ pro $\alpha < x < \beta$) zřejmě řešením téže diferenciální rovnice v intervalu (α, β). Budeme říkat, že řešení Y je <u>částí</u> řešení y. Budeme říkat, že nějaká soustava řešení dává všechna řešení, jestliže každé řešení je částí některého

1014-4527

řešení té soustavy. Podobně je třeba například rozumět slovům, že každým bodem jistého oboru prochází právě jedno řešení rovnice. Touto úmluvou se zbavíme nutnosti mluvit o řešeních, jež jsou částí jiných řešení.

Dosud jsme předpokládali, že $g(y) \neq 0$ v (c, d). Je-li $g(\alpha) = 0$ pro nějakou hodnotu α, je ovšem konstantní funkce $\eta(x) = \alpha$ řešením rovnice (8), neboť $\frac{d\eta(x)}{dx} = g(\alpha) = g(\eta(x))$. To nám dovoluje často řešit rovnici (8), i když $g(y)$ nabývá hodnoty 0.

<u>Příklad 2:</u> $\frac{dy}{dx} = -y^2$; vezmeme jednak polorovinu $y > 0$, jednak polorovinu $y < 0$. Náš předpis dává: $\int dx = -\int \frac{dy}{y^2}$, $x = \frac{1}{y} + \mathcal{K}$, $\frac{1}{y} = x - \mathcal{K}$, $y = \frac{1}{x - \mathcal{K}}$; dostáváme jednak řešení $y = \frac{1}{x - \mathcal{K}}$ v $(-\infty, \mathcal{K})$, ležící v dolní polorovině, jednak řešení $y = \frac{1}{x - \mathcal{K}}$ v $(\mathcal{K}, +\infty)$, ležící v horní polorovině. To jsou jediná řešení ležící v horní nebo dolní polorovině. A k tomu přistupuje řešení $y = 0$ (viz obr. 4.). Vidíme: každým bodem roviny prochází právě jedno řešení. V obou příkladech máme jednu na první pohled nečekanou věc: ač funkce $g(y)$ je spojitá v $(-\infty, +\infty)$, není žádné řešení (až na řešení $y = 0$ v 2.příkladě) definováno v celém intervalu $-\infty < x < \infty$.



Obr. 4.

<u>Příklad 3.</u> $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y^2}$.

Podle našeho předpisu najdete řešení $y = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ v intervalu $(\mathcal{K}, +\infty)$, jež leží v horní polorovině, řešení $y = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ v intervalu $(-\infty, \mathcal{K})$, jež leží v dolní polorovině, a konečně řešení $y = 0$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Na rozdíl od předešlého příkladu nejsou tím však všechna řešení vyčerpána (viz obr. 5.). Funkce $\frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ má totiž v bodě $x = \mathcal{K}$ derivaci rovnou 0 a vyhovuje tedy naší rovnici v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$ (i v bodě $x = \mathcal{K}$). Dále je jasno, že funkce y, definovaná rovnicemi $y(x) = 0$ pro $x \leq \mathcal{K}$, $y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ pro $x \geq \mathcal{K}$, je také řešením v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$, neboť má v bodě $x = \mathcal{K}$ derivaci zleva i zprava rovnou 0. Rozvážíte-li si další možné případy, najdete tato řešení v intervalu $(-\infty, +\infty)$:

1) $y(x) = 0$;

2) $y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$;

3) $y(x) = 0$ pro $x \leq \mathcal{K}$,

$y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ pro $x > \mathcal{K}$;

4) $y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K})^3$ pro $x \leq \mathcal{K}$,

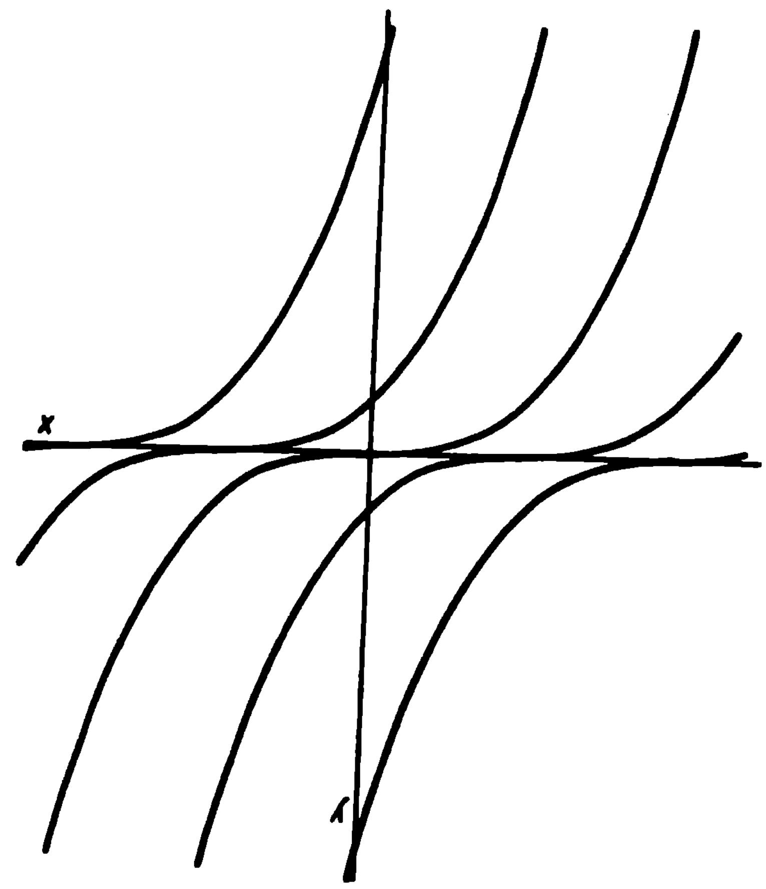
$y(x) = 0$ pro $x > \mathcal{K}$;

5) $y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K}_1)^3$ pro $x < \mathcal{K}_1$,

$y(x) = 0$ pro $\mathcal{K}_1 \leq x \leq \mathcal{K}_2$ ($\mathcal{K}_1 < \mathcal{K}_2$),

$y(x) = \frac{1}{27}(x - \mathcal{K}_2)^3$ pro $x > \mathcal{K}_2$.

Tím jsou dána všechna řešení naší rovnice (ve smyslu poznámky 1).



Obr. 5.

III.

Další jednoduchý případ je ten, že v rovnici $y' = f(x, y)$ je pravá strana součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí jen na x, druhá jen na y, takže jde o rovnici

$$(12) \qquad y' = f(x)\, g(y) \quad ,$$

kde f budiž spojitá v (a, b), g spojitá v (c, d), $g(y) \neq 0$ v (c, d). Budeme vyšetřovat ovšem jen řešení, ležící v obdélníku $a < x < b$, $c < y < d$ (je-li některé z čísel a, b, c, d nevlastní, není to obdélník). Vezměme nějaké řešení $\eta(x)$ v intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$; hodnoty funkce η nechť leží v intervalu (c, d).

Je tedy

$$(13) \qquad \frac{d\eta}{dx} = f(x)\; g(\eta(x)) \quad v \quad (\alpha, \beta) \quad .$$

neboli

$$(14) \qquad \frac{1}{g(\eta(x))} \cdot \frac{d\eta(x)}{dx} = f(x) \; .$$

Označme $\mathcal{F}(x)$ určitou primitivní funkci k $f(x)$ v (a, b), $G(y)$ určitou primitivní funkci k $\frac{1}{g(y)}$ v (c, d) ;

rovnice (14) říká, že je

$$\frac{d}{dx} G(\eta(x)) = \frac{d}{dx}\mathcal{F}(x) \quad \text{neboli}$$

$$(15) \qquad G(\eta(x)) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{K} \; ,$$

kde $\mathcal{K}$ je nějaká konstanta, $\eta(x) \in (c, d)$ pro $x \in (\alpha, \beta)$. Nechť naopak nějaká funkce $\eta(x)$ splňuje v $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ rovnici (15), přičemž

$\eta(x) \in (c, d)$ v (α, β). Potom derivováním plyne z (15)

$$\frac{1}{g(\eta(x))} \cdot \frac{d\eta(x)}{dx} = f(x) ,$$

což je rovnice (14) neboli (13).

Tady jsem se dopustil jisté nekorektnosti: nemáme dosud zaručeno, že každá funkce $\eta(x)$, splňující v (α, β) rovnici (15), přičemž hodnoty funkce $\eta(x)$ leží v (c, d), má v (α, β) derivaci. To je tedy ještě třeba dokázat:

Funkce $G(y)$ má v (c, d) derivaci $\frac{1}{g(y)}$, stále kladnou nebo stále zápornou, tedy je tam ryze monotonní; zobrazuje (c, d) na jistý interval (C, D) a má v něm inversní funkci Γ, tj.

$G(y) = x$ znamená totéž jako $y = \Gamma(x)$

a funkce Γ má v (C, D) derivaci $\Gamma'(x) = \frac{1}{G'(y)} = g(y)$ (kde $y = \Gamma(x)$).

Tedy z (15) plyne $\eta(x) = \Gamma(\mathcal{F}(x) + \mathcal{K})$; vnější funkce Γ má derivaci v každém bodě $x \in (C, D)$, hodnota $\mathcal{F}(x) + \mathcal{K}$ leží podle (15) v (C, D) pro $x \in (\alpha, \beta)$ a v intervalu (α, β) má $\mathcal{F}$ derivaci. Tedy vskutku složená funkce $\eta(x) = \Gamma(\mathcal{F}(x) + \mathcal{K})$ má derivaci v (α, β), a mezera v důkazu je vyplněna.

Máme tedy tento výsledek: Zvolme nějakou primitivní funkci $\mathcal{F}(x) = \int f(x)dx$ v (a, b) a nějakou primitivní funkci $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$ v (c, d). Funkce $\eta(x)$ (mající hodnoty vesměs v (c, d)) je v jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ řešením rovnice $y' = f(x)\, g(y)$ tehdy a jen tehdy, jestliže v (α, β) je $G(\eta(x)) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{K}$, kde $\mathcal{K}$ je jistá konstanta.

Výsledek se pamatuje velmi snadno formálně: Mám řešit rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) ;$$

dám x na jednu stranu, y na druhou: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$, připíši "$\int$", a protože jde o neurčitý integrál, připíši konstantu:

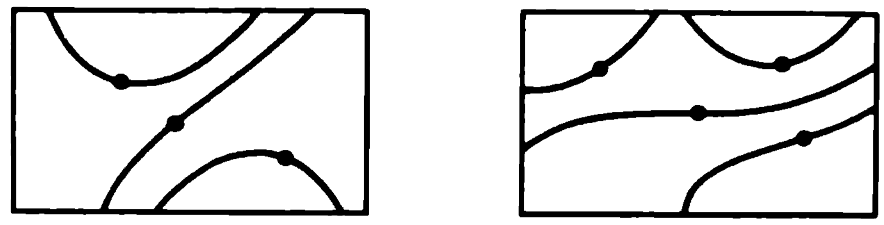
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + \mathcal{K} .$$

Při zvoleném $\mathcal{K}$ je vpravo funkce x, totiž $\mathcal{F}(x) + \mathcal{K}$, vlevo funkce y, totiž $G(y)$. Z této rovnice, tj. ze vztahu

$$G(y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{K}$$

se snažím vypočítat y jako funkci x. Tím dostanu všechna řešení rovnice. Snadno by se ukázalo, že také v tomto případě prochází každým bodem obdélníka právě jedno řešení, jdoucí "od hranice až k hranici" (nebudu to ani dokazovat, ani podrobně formulovat; názorný smysl je snad patrný z obr. 6).

Podotýkám: Je-li $g(\lambda) = 0$ pro nějaké λ, má ovšem rovnice $y' = f(x) . g(y)$ řešení $y = \lambda$. Tak můžeme snadno řešit i četné případy, kdy funkce $g(y)$ nabývá hodnoty 0 (v tomto případě však již není zaručeno, že by každým bodem procházelo <u>jen</u> jedno řešení).



Obr. 6.

<u>Příklad 4:</u> $y' = 3x^2y^3$ (v celé rovině).

Vyšetřuji napřed zvlášť $y > 0$ a zvlášť $y < 0$:

$$\int \frac{dy}{y^3} = 3\int x^2 dx + \mathcal{K} \,, \qquad -\frac{1}{2y^2} = x^3 + \mathcal{K} \,,$$

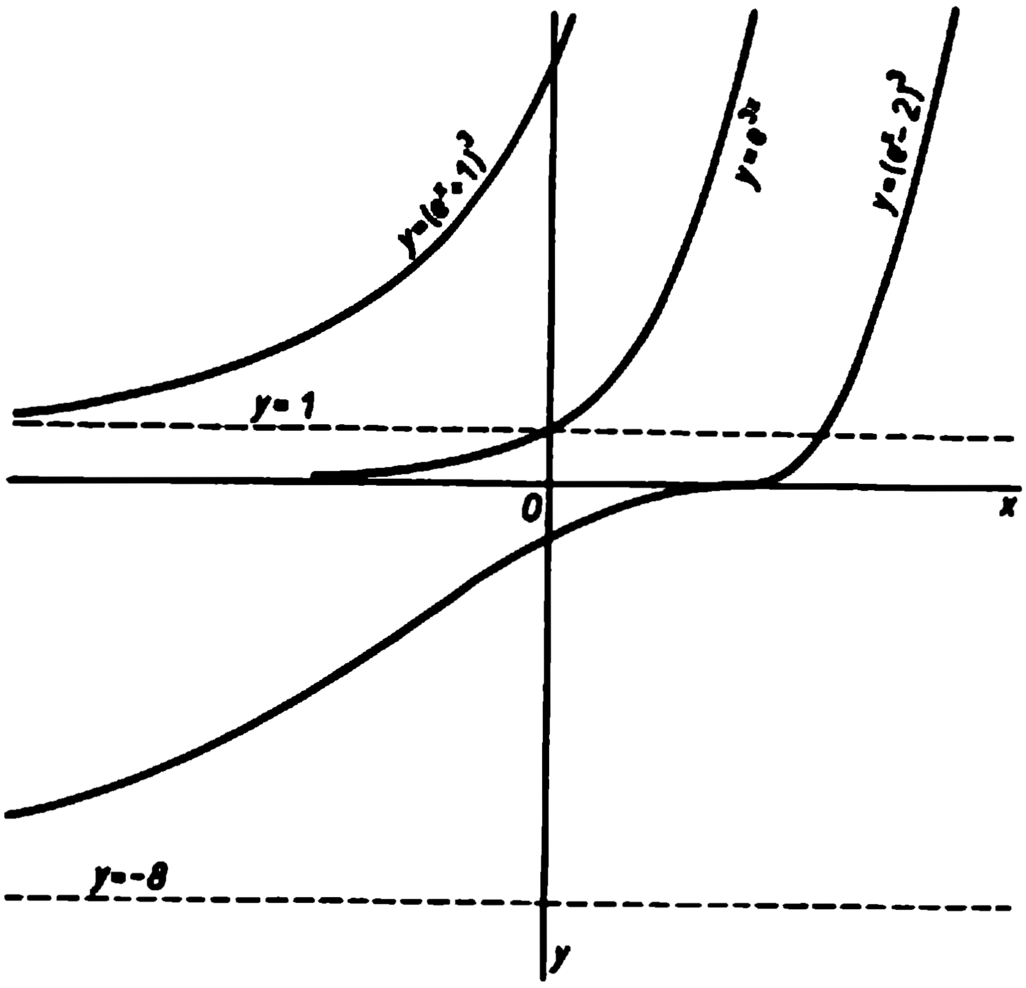
$$2y^2 = -\frac{1}{x^3 + \mathcal{K}} \,.$$

Řešení v polorovině $y > 0$ jsou $y = \sqrt{\frac{-1}{2(x^3 + \mathcal{K})}}$ (v <u>intervalu</u> $x < \sqrt[3]{-\mathcal{K}}$); řešení v polorovině $y < 0$ jsou $y = -\sqrt{\frac{-1}{2(x^3 + \mathcal{K})}}$ (v intervalu $x < \sqrt[3]{-\mathcal{K}}$). Další řešení je $y = 0$ a snadno si rozvážíte, že tím jsou vyčerpána všechna řešení. (Každým bodem roviny prochází právě jedno řešení.)

<u>Příklad 5:</u> $\frac{dy}{dx} = 3e^x\sqrt[3]{y^2}$.

Vyšetřuji opět nejdříve zvlášť poloroviny $y > 0$ a $y < 0$. V horní polorovině mám řešení $y = (e^x + C)^3$, pokud $y > 0$, tj. $e^x > -C$; v dolní polorovině mám opět řešení $y = (e^x + C)^3$, pokud $y < 0$, tj. $e^x < -C$; mimoto mám řešení $y = 0$. Je-li $C \geqq 0$, je $e^x + C > 0$ pro všechna x a $(e^x + C)^3$ je řešením v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Je-li $C < 0$ (pišme $-C = \mathcal{K} > 0$), je $(e^x + C)^3 = (e^x - \mathcal{K})^3$ kladné pro $x > \lg \mathcal{K}$, záporné pro $x < \lg \mathcal{K}$. Mimoto má $(e^x - \mathcal{K})^3$ pro $x = \lg \mathcal{K}$ derivaci rovnou nule. Z toho je vidět jako v příkladě 3, že z funkcí $(e^x - \mathcal{K}_1)^3$, 0, $(e^x - \mathcal{K}_2)^3$ $(0 < \mathcal{K}_1 < \mathcal{K}_2)$ lze sestavovat řešení naší rovnice v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Vyšetřuji-li nyní řešení v celé rovině (tj. bez omezení $y > 0$ nebo $y < 0$) v intervalu $(-\infty, +\infty)$, zjistím toto: Každým bodem $[x, y]$, kde $y \geqq e^{3x}$, prochází jen jedno řešení; každým bodem $[x, y]$, kde $y < e^{3x}$, prochází nekonečně mnoho řešení. Viz obr. 7.

1014-4527



Obr. 7.

Křivka $y = (e^x + C)^3$ má v bodě $-\infty$ limitu C^3; pro $C \geq 0$ nemá inflexních bodů, pro $C < 0$ má inflexní body dva: $x = \lg |C|$, $x = \lg |C| - \lg 3$.

Poznámka: V rovnicích tvaru $y' = f(x) \,.\, g(y)$ jsou proměnné od sebe jaksi <u>odděleny</u> neboli separovány. Leckterou rovnici $y' = f(x, y)$, ve které proměnné separovány nejsou, lze vhodnými úpravami převést na rovnici, ve které proměnné separovány jsou, a tu potom řešit podle uvedeného návodu. Této metodě se říká metoda <u>separace proměnných.</u>

IV.

Probereme aspoň jeden typ rovnic, ve kterém se dá provést metoda separace proměnných.

Buď α reálné číslo. Funkce $f(x, y)$ se nazývá homogenní stupně α, jestliže platí toto: Je-li $[x, y]$ bod, v němž je $f(x, y)$ definována a je-li $t > 0$, je funkce f definována i v bodě $[tx, ty]$ a platí:

$$(16) \qquad f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y) \,.$$

Definiční obor takové funkce se tedy skládá z polopřímek vycházejících z počátku (přičemž počátek může a nemusí patřit do definičního oboru). Například funkce $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 5y^3$ je homogenní 3.stupně. Obecně homogenní polynom (neboli forma) n-tého stupně je homogenní funkcí n-tého stupně. $\sqrt{x^3 + y^3}$ je homogenní funkce stupně $\frac{3}{2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ je homogenní funkce 1.stupně. Je-li $\varphi(u)$ nějaká funkce, je $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$ homogenní funkce stupně 0. Diferenciální rovnice tvaru

$$(17) \qquad f(x, y) + g(x, y) \,.\, y' = 0 \,,$$

kde f, g jsou homogenní téhož stupně α, se nazývá <u>homogenní diferenciální rovnice.</u> Tu lze převést (s jistými výhradami, které uvedu) na rovnici se separovanými proměnnými zavedením nové "neznámé" funkce $u = \frac{y}{x}$. Proveďme to:

1041-4527

Budiž $y(x)$ nějaká funkce; zaveďme pro $x \neq 0$ novou funkci $z(x)$ rovnicí $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ neboli $y(x) = x\,z(x)$ (je vyloučena hodnota $x = 0$). Má-li $y(x)$ v nějakém bodě $x \neq 0$ derivaci, má ji také $z(x)$ a rovněž naopak: má-li pro některé $x \neq 0$ funkce $z(x)$ derivaci, má ji také $y(x)$ a je $y'(x) = x\,z'(x) + z(x)$, takže rovnice (17) znamená pro $x \neq 0$ totéž jako

(18) $$f(x, xz) + g(x, xz)\,.\,(xz' + z) = 0\ .$$

Vyšetřujme tuto rovnici napřed pro $x > 0$. Podle (16) je možno psát také $x^{\alpha} f(1, z) + x^{\alpha} g(1, z)(xz' + z) = 0$; dělíme-li x^{α}, lze ji tedy psát

(19) $$z' g(1, z) = -\,(f(1, z) + z g(1, z))\,\frac{1}{x}\ .$$

Dělíme-li funkcí $g(1, z)$, dostaneme rovnici, ve které proměnné jsou separovány (po řešení této rovnice musíme ovšem vyšetřit, zda jsme tím dělením neztratili některé řešení).

Řešením rovnice (19) dostaneme všechna řešení rovnice (18) v intervalu $(0, +\infty)$ nebo v jeho částečných intervalech[1]. Pro $x < 0$ "vytknu" $|x|^{\alpha}$ a dostanu z (18)

$$|x|^{\alpha} f(-1, -z) + |x|^{\alpha} g(-1, -z)\,(xz' + z) = 0\ ;$$

dále postupuji jako u (19). Řešením rovnice

$$z' g(-1, -z) = -\,(f(-1, -z) + z g(-1, -z))\,\frac{1}{x}$$

dostanu všechna řešení rovnice (18) v intervalu $(-\infty, 0)$ nebo v jeho částečných intervalech.

Násobím-li řešení $z(x)$ rovnice (18) proměnnou x:

$$y(x) = x\,z(x)\ ,$$

dostanu řešení rovnice (17). Abych dostal všechna řešení, musím se ještě podívat, zda z řešení v intervalu $(\alpha, 0)$ a z řešení v intervalu $(0, \beta)$ (kde $\alpha < 0 < \beta$) nelze složit řešení v intervalu (α, β).

Příklad 6.

(20) $$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0\ .$$

Zavedení funkce z rovnicí $y(x) = x\,z(x)$ vede pro $x > 0$ i pro $x < 0$ k rovnici

(21) $$2zz'x = 1 - z^2\ .$$

---

[1] U mnohých homogenních funkcí s celým α platí vztah (16) pro všechna $t \neq 0$; potom mohu užít (19) i pro $x < 0$. V ostatních případech je nutno pro $x < 0$ užít postupu uvedeného dále.

Žádné řešení $z(x)$ nemůže být pro žádné x rovno nule. Máme řešení $z(x) = 1$, $z(x) = -1$ a další, která dostaneme řešením rovnice

$$z' = \frac{1-z^2}{2z} \cdot \frac{1}{x} . \tag{22}$$

Metoda z případu III vede k rovnici

$$-\lg|1-z^2| = \lg|x| + \lg K, \quad K > 0$$

(konstantu píši jako $\lg K$, což lze) a tedy $|1-z^2| = \dfrac{1}{K|x|}$. Ješto vyšetřujeme řešení, pro které je $1 - z^2(x) \neq 0$, $x \neq 0$, jsou znaménka čísel $1 - z^2(x)$, x podél celého řešení stálá a také $z(x)$ má stálé znaménko (neboť $z(x) \neq 0$) ; tedy naše řešení mají tvar

$z(x) = \sqrt{1 - \frac{C}{x}}$, $z(x) = -\sqrt{1 - \frac{C}{x}}$, kde C je libovolné číslo $\neq 0$; přidám-li ještě hodnotu $C = 0$, jsou tím zahrnuta i řešení $z(x) = 1$, $z(x) = -1$. Násobím-li x, dostanu řešení rovnice (20)

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - Cx} \qquad (\ C \text{ libovolné}).$$

Je-li $C > 0$, dává tento vzorec se znaménkem plus řešení v $(-\infty, 0)$ a řešení v $(C, +\infty)$; je-li $C < 0$, dává vzorec řešení v $(-\infty, C)$ a řešení v $(0, +\infty)$; totéž platí i pro vzorce se znaménkem minus.

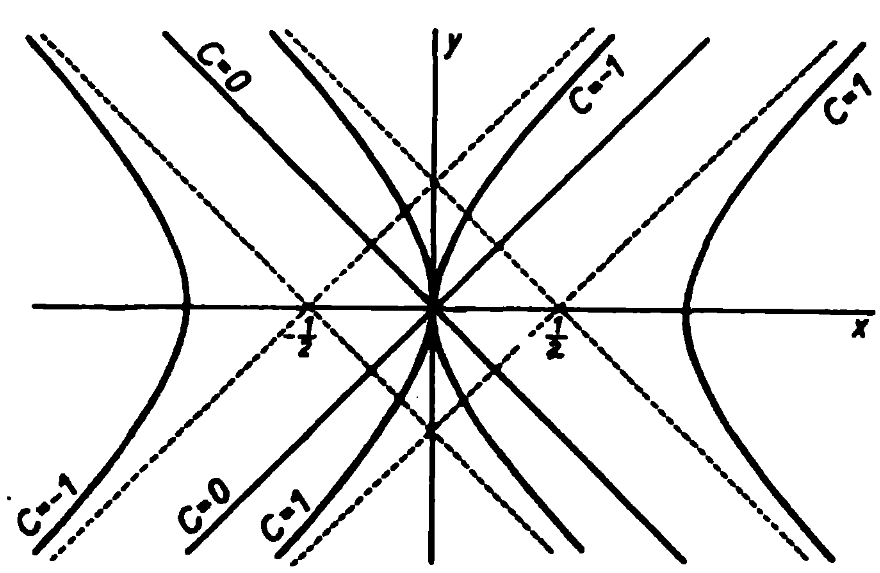
Pro $C = 0$ se řešení dají složit tak, že ještě dostaneme řešení

$$y(x) = x \ , \quad y(x) = -x \quad \text{v } (-\infty, \infty) .$$

Vedle těchto přímek jsou ostatní řešení oblouky rovnoosých hyperbol

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 , \quad C \neq 0 .$$

Každá z těchto hyperbol se skládá ze čtyř oblouků, jež dávají čtyři řešení (body $[0,0]$, $[C, 0]$ již k řešení nepatří!): dvě leží nad osou x, dvě pod osou x. Tato řešení už nelze dále "skládat". Viz obr. 8, na němž jsou zakreslena řešení pro $C = 0$, 1, -1. Tečkované přímky jsou asymptoty hyperbol, odpovídajících hodnotám $C = 1$, -1. Vidíte, že už v tomto jednoduchém případě je úplná diskuse řešení dosti složitá.



Obr. 8.

1014-4527

V.

Jako pátý případ vezmeme tzv. lineární rovnici 1. řádu. Je to rovnice $y' = f(x, y)$, kde napravo je polynom 1.stupně v y, jehož koeficienty jsou funkcemi proměnné x:

$$y' = -p(x).y + q(x) \quad ;$$

častěji se první člen vpravo převádí na levou stranu (proto jsem jej už označil $-p(x)$):

(23) $$y' + p(x)\,y = q(x) \; .$$

Funkce p, q buďte spojité v intervalu (a, b). Budeme hledat ovšem jen řešení, ležící v pásu $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$. Napřed řešme speciální případ, kdy $q(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Takové rovnici se říká rovnice bez pravé strany nebo také rovnice homogenní (ale pozor! název "rovnice homogenní" se dává ještě také diferenciálním rovnicím docela jiného druhu, které jsme probrali v předešlém případě).

To je tedy rovnice tvaru

(24) $$y' + p(x)\,.\,y = 0 \qquad (p \text{ je spojitá v } (a, b)).$$

Vidíme, že spadá pod případ separovaných proměnných. Postupujeme podle schematu bodu III.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,.\,y \;, \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + \mathcal{K}$$

$\lg y = -P(x) + \mathcal{K}$, kde jsme za P zvolili nějakou primitivní funkci k p v (a, b); odtud $y = e^{\mathcal{K}}.e^{-P(x)} = C.e^{-P(x)}$, kde C je konstanta. Tedy zvolme nějakou primitivní funkci P k funkci p v (a, b).

(A) Potom všechna řešení rovnice (24) jsou dána vzorcem

$y = C.e^{-P(x)}$ kde C je libovolná konstanta. Ale náš výpočet byl příliš lehkomyslný: nedbali jsme toho, že může být $y = 0$, psali jsme $\lg y$ pro případné záporné y atd., takže jsme vlastně byli jen přivedeni k domněnce, že platí (A); důkaz musíme ještě provést. Každé funkci $y(x)$ přiřaďme funkci $z(x)$ rovnicí

(25) $$y(x) = z(x)\,.\,e^{-P(x)}$$

(neboli

(26) $$z(x) = y(x)\,.\,e^{P(x)} \quad).$$

Přitom se omezujeme jen na funkce y, z, jejichž definiční obor je obsažen v (a, b). Je vidět, že funkce y, z jsou si navzájem jednoznačně přiřazeny. Dále je vidět: Má-li jedna z funkcí y, z derivaci, má ji i druhá, a je mezi nimi vztah

$$y' = u'(x) \cdot e^{-P(x)} + u(x) \cdot (-1) \cdot e^{-P(x)} \cdot p(x) ,$$

neboli

(27) $$y'(x) + p(x)\, y(x) = u'(x)\, e^{-P(x)} .$$

Tedy: rovnice $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$ bude splněna v nějakém intervalu obsaženém v (a, b) tehdy a jen tehdy, bude-li v něm $u'(x) \cdot e^{-P(x)} = 0$, tj. (ježto $e^{-P(x)} \neq 0$) $u'(x) = 0$, tj. $u(x) = C$ (konstanta) v onom intervalu. To však znamená právě tolik jako $y(x) = Ce^{-P(x)}$; tím je tvrzení (A) dokázáno.

Tím jsme rozřešili rovnici (24) ("homogenní", $q \equiv 0$). Řešme teď rovnici (23)

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) .$$

Výraz $Ce^{-P(x)}$ byl řešením rovnice (24), když C byla konstanta; budiž nyní C nějaká funkce $u(x)$; budeme se snažit zvolit $u(x)$ tak, aby funkce (25) $y(x) = u(x)e^{-P(x)}$ vyhovovala rovnici (23). Už jsme zjistili: u má derivaci tehdy a jen tehdy, když y má derivaci, načež platí vzorec (27)

$$y'(x) + p(x)\, y(x) = u'(x)\, e^{-P(x)} .$$

Tedy bude (25) řešením rovnice (23) tehdy a jen tehdy, když bude

$$u'(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x) , \quad u'(x) = e^{P(x)} q(x) , \quad u(x) = \int e^{P(x)} q(x)\, dx + C,$$

(28) $$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx + C e^{-P(x)} ,$$

kde $\int e^{P(x)} q(x)\, dx$ je určitě zvolená primitivní funkce k $e^{P(x)} q(x)$, C je libovolná konstanta. Vzorec (28) dává všechna řešení rovnice (23), a to v celém intervalu (a, b). Zase každým bodem $[x_0, y_0]$ pásu $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < +\infty$ prochází právě jedno řešení rovnice (23). Důkaz: Označme $e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx = Q(x)$ (je to určitá funkce). Aby řešení (28) procházelo bodem $[x_0, y_0]$, je nutno a stačí, aby bylo $y_0 = Q(x_0) + Ce^{-P(x_0)}$, a této podmínce vyhovuje právě jedna hodnota

$$C = (y_0 - Q(x_0))\, e^{P(x_0)} .$$

Ještě dvě poznámky:

1) $y = Ce^{-P(x)}$ je řešením rovnice (24), když C je konstanta. Naše metoda řešení rovnice (23) spočívá na této myšlence: má-li funkce $Ce^{-P(x)}$ vyhovovat rovnici (23), v níž q není identicky nula, nesmí být C konstanta; zkusme tedy volit C jako nějakou funkci $C(x)$ (psali jsme $u(x)$, ale to je jedno) a snažme se tuto funkci určit tak, aby $C(x)e^{-P(x)}$ vyhovovalo rovnici (23). Proto se této metodě říká metoda variace konstant.

2) Rovnici $y' + p(x)\, y = q(x)$ jsme řešili tak, že jsme místo neznámé funkce $y(x)$ zavedli novou neznámou funkci $u(x)$ rovnicí $y(x) = u(x)\, e^{-P(x)}$,

načež jsme pro funkci u dostali jednodušší rovnici $u'(x) = e^{P(x)} q(x)$ (kde pravou stranu již známe). Tohoto způsobu zavedení nové neznámé funkce se dosti často užívá. Podobně se někdy osvědčí zavedení "nové nezávisle proměnné". Např. do rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{mohu zavést} \quad x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 t},$$ takže naše rovnice má nyní tvar

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} f(\operatorname{tg} t, y)$$ – což může být rovnice jednodušší než rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Metodu variace konstant jsem vyložil na tomto jednoduchém příkladě proto, že se nám ve složitějším tvaru objeví v § 3 u lineárních rovnic n-tého řádu. Ale početně jednodušší je tzv. metoda integračního faktoru, které můžeme užít na rovnici homogenní i nehomogenní, a kterou teď vyložím. Násobme rovnici (23) nějakou funkcí $G(x)$, jež není v (a, b) nikde rovna nule:

$$(29) \qquad G(x)\,(y' + p(x)\,y) = G(x)\,q(x).$$

Zvolme nějakou primitivní funkci $P(x)$ k funkci $p(x)$ v (a, b) a volme $G(x) = e^{P(x)}$. Potom levá strana rovnice (29) je zřejmě rovna

$$e^{P(x)}\,(y' + P'(x)\,y) = \frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}\,y\right).$$ [1)]

Rovnice (29), jež je rovnocenná s (23), má tedy tvar

$$(30) \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}\,y\right) = e^{P(x)}\,q(x),$$

takže všechna řešení rovnice (29) jsou dána vzorcem

$$e^{P(x)}\,y = \int e^{P(x)}\,q(x)\,dx + C,$$

kde integrál vpravo znamená určitou primitivní funkci, C je libovolná konstanta. To je však právě vzorec (28). Funkci $e^{P(x)}$, která nám umožnila psát (23) v jednoduchém tvaru (30), se říká integrační faktor.

Příklad: Řešte $y' + 2xy = x$.

I. Napřed rozřešíme rovnici: $y' + 2xy = 0$;

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx, \qquad \operatorname{lg}|y| = -x^2 + K,$$

---

1) Přesně řečeno: Má-li $y(x)$ derivaci, má i $e^{P(x)} y(x)$ derivaci, a rovněž naopak, a platí rovnost právě napsaná.

$$y = Ce^{-x^2} \qquad (\ C \text{ je konstanta}).$$

(Přesto, že výpočet byl nekorektní, víme už, že dává správný výsledek.)

Teď budiž C funkce x :

$$y' = C'e^{-x^2} + Ce^{-x^2}(-2x) \ ; \text{ má být } y' + 2xy = x, \text{ tj.}$$
$$C'e^{-x^2} + Ce^{-x^2}(-2x) + 2x.Ce^{-x^2} = x \ ,$$

čili

$$C'e^{-x^2} = x \ , \quad C' = e^{x^2}.x, \qquad C = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{K},$$
$$y = \frac{1}{2} + \mathcal{K}e^{-x^2} \qquad (\text{v intervalu } (-\infty, +\infty)).$$

II. Užijme nyní metody integračního faktoru: Položím $\varphi(x) = \int 2x\,dx = x^2$ (mohl bych také třeba volit $x^2 - \pi^2$, ale tím bych jenom komplikoval výpočet).

Máme rovnici

$$e^{x^2}(y' + 2xy) = xe^{x^2} \ ;$$
$$\frac{d}{dx}\,ye^{x^2} = xe^{x^2} \ ,$$
$$ye^{x^2} = \int xe^{x^2}dx + \mathcal{K} = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{K} \ ;$$

řešení jsou

$$y = \frac{1}{2} + \mathcal{K}e^{-x^2} \quad \text{v int. } (-\infty, +\infty).$$

Závěrečné poznámky. Všechny případy, které jsme až dosud v tomto paragrafu probírali, se dají řešit, jestliže dovedeme nalézt primitivní funkce k nějakým daným funkcím[1] a po případě ještě sestrojit k nějaké funkci inversní funkci. Říká se, že se tyto rovnice dají řešit kvadraturou (starý název: slovem "kvadratura" se označoval výkon hledání integrálu neurčitého nebo určitého). Obecný případ rovnice 1.řádu rozřešené podle y' je

$$(31) \qquad y' = f(x, y) \ .$$

Ten nelze řešit obecně tímto způsobem. Dá se však dokázat tato důležitá "existenční věta":

I. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v obdélníku $a < x < b$, $c < y < d$. Potom každým bodem tohoto obdélníka prochází aspoň jedno řešení rovnice (31) probíhající od hranice obdélníka zase až k jeho hranici (přičemž každé jiné řešení je částí nějakého takového řešení). Přesný význam slov "řešení probíhá od hranice obdélníka až k jeho hranici" zde nedefinuji; co je tím míněno, je snad zhruba patrno z obr. 6, kde jsou načrtnuta vlevo tři, vpravo čtyři řešení.

---

[1] Hledání primitivní funkce může být ovšem někdy úkol velmi obtížný, ale vlastně už nepatří do nauky o diferenciálních rovnicích.

II. Jestliže funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ jsou spojité v obdélníku $a < x < b$, $c < y < d$, potom každým bodem tohoto obdélníku prochází právě jedno řešení rovnice (31), probíhající od hranice obdélníku až zase k jeho hranici.

Příklady 3 a 5, tj. rovnice

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad , \quad y' = 3e^x \sqrt[3]{y^2}$$

ukazují, že týmž bodem může procházet více než jedno řešení (dokonce i nekonečně mnoho). Zde ovšem není splněna podmínka spojitosti $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodech osy x (tj. pro $y = 0$), neboť pro $y \neq 0$ máme u první rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}} \quad , \qquad \text{u druhé} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2e^x}{\sqrt[3]{y}} \; .$$

Větu o existenci a jednoznačnosti lze vyslovit také takto: Jsou-li $f(x, y)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ spojité v obdélníku $a < x < b$, $c < y < d$ a zvolíme-li libovolné hodnoty $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$, potom má rovnice (31) právě jedno řešení $y(x)$, pro něž je $y(x_0) = y_0$ a jež probíhá "od hranice k hranici". (Podmínka $y(x_0) = y_0$ znamená totiž, že řešení $y(x)$ prochází bodem $[x_0, y_0]$).

Podmínce $y(x_0) = y_0$ se říká také "počáteční podmínka" pro řešení $y(x)$. Touto podmínkou je tedy řešení rovnice (31) jednoznačně určeno, jsou-li f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité.

Obdobná věta o existenci a jednoznačnosti platí i pro jiné obory než obdélníky.

Podotýkám, že se místo "řešení diferenciální rovnice" říká často "integrál diferenciální rovnice"; ale nebudu tohoto názvu používat.

§ 2. Komplexní funkce reálné proměnné.

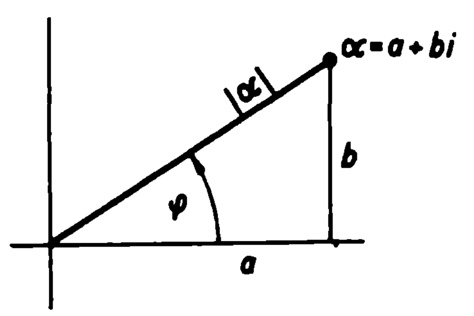
Tento paragraf je přípravný ke dvěma následujícím paragrafům, ale je užitečný i jinak. Naším hlavním předmětem je studium reálných funkcí reálné proměnné (nebo několika reálných proměnných), ale, jako často v matematice, bude pro nás výhodné užívat při tomto studiu jako pomůcky občas také funkcí s imaginárními hodnotami.

Znáte komplexní čísla; to jsou čísla $\alpha = a + bi$, kde a, b jsou reálná; značím $a = \mathrm{Re}\,\alpha$, $b = \mathrm{Im}\,\alpha$ (reálná a imaginární část čísla α). Číslo komplexní je tedy dáno svou reálnou a imaginární částí; je-li $b = 0$, je α reálné; je-li $b \neq 0$, nazýváme α číslem imaginárním. Číslo $\bar{\alpha} = a - bi$ nazýváme číslem komplexně sdruženým s α; číslo komplexně sdružené s $\bar{\alpha}$ je opět α (značky $\bar{\alpha}$ pro číslo komplexně sdružené se často užívá). Číslo reálné je komplexně sdružené samo se sebou. Víte, jak se s komplexními čísly počítá: jako s reálnými, a užije se toho, že $i^2 = -1$. Například je-li $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, je $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$, $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Je-li $\alpha \neq 0$, tj. je-li alespoň jedno z čísel a, b různé od nuly, existuje převrácená hodnota; vypočte se nejpohodlněji tak, že zlomek $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a+bi}$ rozšíříme číslem $\bar{\alpha}$; ježto $\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, dostaneme

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Čísla komplexní mohu vzájemně jednoznačně přiřadit bodům v rovině, opatřené pravoúhlým systémem souřadnic: číslu $\alpha = a + bi$ přiřadím bod o souřadnicích a, b. Je-li $\alpha = a + bi$ ($a = \mathrm{Re}\,\alpha$, $b = \mathrm{Im}\,\alpha$), budu bod $[a, b]$ příležitostně označovat též písmenem α. Vzdálenost bodu α od počátku nazýváme absolutní (prostou) hodnotou čísla α, znak $|\alpha|$; je $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (viz obr. 9).



Obr. 9.

Uvědomte si zřejmé, ale důležité nerovnosti

(1) $\max(|a|, |b|) \leq |\alpha| \leq |a| + |b|$.

Často je důležitý zřejmý vztah $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$.

Je-li $\alpha \neq 0$, nazýváme úhel φ, načrtnutý na obrázku 9, argumentem čísla α (někdy se říká též amplituda). Je to číslo φ, pro které je

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kdežto absolutní hodnota čísla α je číslem α jednoznačně určena, je argument φ (pro $\alpha \neq 0$) určen až na násobek čísla 2π. Je tedy (pro $\alpha \neq 0$) $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r = |\alpha|$, φ je argument α.

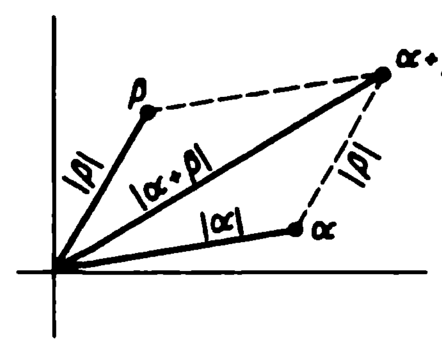
Při geometrickém znázornění komplexních čísel se součet čísel $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ dostane z rovnoběžníku, běžného z fyziky (obr. 10).

Odtud podle trojúhelníkové nerovnosti plyne

(2) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Ježto $|-\beta| = |\beta|$, plyne odtud (píši-li v (2) $-\beta$ místo β):

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$



Obr. 10.

Snadno se odtud odvodí (znáte to z reálných čísel):

$$|\alpha \pm \beta| \geq |\alpha| - |\beta| \quad , \qquad |\alpha \pm \beta| \geq |\beta| - |\alpha| \ .$$

Snadno se dokáže (přímým výpočtem), že je

(3) $\quad |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, a pro $\beta \neq 0$ též $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Mocnina α^n pro celá n ($n \gtreqless 0$) se definuje jako u reálných čísel, a platí pro ni stejná pravidla.

Jestliže každému číslu x z jisté množiny M reálných čísel je přiřazeno jisté komplexní číslo $f(x)$, říkáme, že f je funkce v oboru M (je to komplexní funkce reálné proměnné). Dát takovou funkci f znamená dát pro každé $x \in M$ její reálnou a imaginární část, takže lze psát

(4) $\quad f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$,

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou reálná a imaginární část čísla $f(x)$. Komplexní funkce f je tedy určena, jsou-li určeny reálné funkce φ, ψ , takže studium komplexní funkce f se dá převést na studium dvou reálných funkcí φ , ψ ; ale často je výhodnější studovat součet $\varphi(x) + i\psi(x)$ než studovat funkce φ, ψ odděleně (uvidíte to později na příkladech). Jestliže $\psi(x) = 0$ pro všechna $x \in M$, je ovšem f reálná funkce.

Je přirozené definovat pro komplexní funkce pojem spojitosti, limity a derivace podobně jako u reálných funkcí. Tedy:

Definice: 1) Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě c , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna (reálná) x , splňující nerovnost $|x - c| < \delta$, je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Podobně spojitost zprava a zleva.

2) Říkáme, že číslo (komplexní) A je limitou funkce f v bodě c, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna (reálná) x , splňující podmínku $0 < |x - c| < \delta$, je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Podobně se definuje limita zprava a zleva a užívá se znaků

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \ , \quad \text{atd.}$$

O nevlastní limitě mluvíme jen u reálných funkcí.

3) Říkáme, že funkce f má v bodě c derivaci $f'(c)$, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \ .$$

O nevlastní derivaci ovšem mluvíme jen u reálných funkcí. Podobně derivace zprava a zleva.

Dokažme toto:

Věta A.

1) Funkce $f = \varphi + i\psi$ je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, jsou-li funkce φ, ψ spojité v bodě c.
2) Rovnost $\lim_{x \to c} f(x) = A + Bi$ (A, B reálná) platí tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{x \to c} \varphi(x) = A$, $\lim_{x \to c} \psi(x) = B$.
3) Funkce f má v bodě x derivaci tehdy a jen tehdy, mají-li v něm φ, ψ derivaci (vlastní), načež je $f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$.

Důkaz: Dokážeme napřed 2): Nechť předně existuje $\lim_{x \to c} f(x) = A + Bi$. To znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $|\varphi(x) + i\psi(x) - A - Bi| < \varepsilon$, načež podle (1) je $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, $|\psi(x) - B| < \varepsilon$; tedy

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = A \quad , \qquad \lim_{x \to c} \psi(x) = B \; .$$

Nechť za druhé existují limity

$\lim_{x \to c} \varphi(x) = A$, $\lim_{x \to c} \psi(x) = B$. Budiž $\varepsilon > 0$.
Existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $|\varphi(x) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|\psi(x) - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a tedy podle (1) je

$$|f(x) - (A + Bi)| = |\varphi(x) - A + (\psi(x) - B)i| \leqq |\varphi(x) - A| + |\psi(x) - B| < \varepsilon \; ,$$

tedy

$$\lim_{x \to c} f(x) = A + iB \; .$$

Bod 1) se dokáže obdobně.

Bod 3) se dokáže takto:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} + i\,\frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} \; .$$

Podle bodu 2) má levá strana limitu (tj. existuje $f'(x_0)$) tehdy a jen tehdy, má-li reálná i imaginární část limitu (vlastní), tj. existují-li $\varphi'(x_0)$, $\psi'(x_0)$, načež $f'(x_0) = \varphi'(x_0) + i\psi'(x_0)$.

Platí opět věty o spojitosti, limitě a derivaci součtu, součinu, podílu. Dále věta o jednoznačnosti limity (funkce může mít v daném bodě nejvýše jednu limitu) a věty o souvislosti mezi spojitostí a limitou, mezi oboustrannou a jednostrannou limitou (nebo spojitostí).

Jak se dokáží tyto věty? Máme zdě dvě možné cesty. Předně podle věty A je možné převést věty o limitě, spojitosti a derivaci pro funkci $f = \varphi + i\psi$ na obdobné věty o reálných funkcích φ, ψ, a ty už známe. Jako příklad dokažme: Je-li

$\lim f_1(x) = \alpha_1$, $\lim f_2(x) = \alpha_2$ (všechno v bodě c), je
$\lim f_1(x)\, f_2(x) = \alpha_1 \alpha_2$.

Důkaz: Rozložme na reálné a imaginární části:

$$f_1 = u_1 + i v_1 \,, \quad f_2 = u_2 + i v_2 \,, \quad \alpha_1 = a_1 + i b_1 \,, \quad \alpha_2 = a_2 + i b_2 \,.$$

Tedy

$$(*) \quad \begin{cases} f_1 f_2 = u_1 u_2 - v_1 v_2 + i(u_1 v_2 + u_2 v_1) \,, \\ \alpha_1 \alpha_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \,. \end{cases}$$

Z rovnic $\lim f_1(x) = \alpha_1$, $\lim f_2(x) = \alpha_2$ plyne podle věty A:

$$\lim u_1 = a_1 \,, \quad \lim v_1 = b_1 \,, \quad \lim u_2 = a_2 \,, \quad \lim v_2 = b_2 \,.$$

Z vět o limitě součtu, rozdílu a součinu pro reálné funkce plyne tedy

$$\lim (u_1 u_2 - v_1 v_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 \,,$$
$$\lim (u_1 v_2 + u_2 v_1) = a_1 b_2 + a_2 b_1 \,;$$

podle věty A a podle (*) je nyní vskutku $\lim f_1 \cdot f_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

<u>Za druhé:</u> Definice spojitosti, limity, derivace, jak jsme je podali, jsou podobné jako ty, které známe z dřívějška pro reálné funkce, pouze vedle reálných čísel se připouštějí i imaginární. Ale v definicích se vyskytují pouze absolutní hodnoty těchto čísel, což jsou reálná čísla, a pro absolutní hodnoty komplexních čísel platí tytéž nerovnosti a rovnosti jako pro absolutní hodnoty reálných čísel. Prohlédneme-li si důkazy vět o spojitosti, limitě, derivaci reálných funkcí, které jsme podali v 1.semestru, vidíme, že tyto důkazy platí i tehdy, když se v nich vyskytují obecně komplexní funkce. Proveďme jeden příklad, abyste to viděli: Nechť $\lim f_1(x) = \alpha_1$, $\lim f_2(x) = \alpha_2$ (všechno v bodě c); potom

$$\lim \left(f_1(x) - f_2(x)\right) = \alpha_1 - \alpha_2 \,.$$

<u>Důkaz:</u> Máme dokázat toto:

ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x, splňující nerovnosti $0 < |x - c| < \delta$, je $|f_1(x) - f_2(x) - (\alpha_1 - \alpha_2)| < \varepsilon$.

Budiž tedy dáno $\varepsilon > 0$. Ježto $\lim f_1(x) = \alpha_1$, $\lim f_2(x) = \alpha_2$, existují $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta_1$ je $|f_1(x) - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $0 < |x - c| < \delta_2$ je $|f_2(x) - \alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Potom pro $0 < |x - c| < \delta$ je

$$|f_1(x) - f_2(x) - (\alpha_1 - \alpha_2)| = |f_1(x) - \alpha_1 - (f_2(x) - \alpha_2)| \leqq$$
$$\leqq |f_1(x) - \alpha_1| + |f_2(x) - \alpha_2| < \varepsilon.$$

Vidíte, že důkaz je doslova týž jako pro reálné funkce. Ještě podotýkám, že věta o spojitosti, limitě a derivaci složené funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ platí i tehdy, když φ je <u>reálná</u> funkce a f je <u>komplexní</u> funkce <u>reálné proměnné</u>

(φ musí být reálná, ježto f je funkce reálné proměnné, a do $f(x)$ se má za x dosadit $\varphi(t)$). Jednoduchý důkaz si proveďte jako cvičení.

Definici primitivní funkce rozšiřujeme také na komplexní funkce f reálné proměnné: funkci $\mathcal{F}(x)$ nazývám funkcí primitivní k funkci $f(x)$ v (a,b), jestliže pro všechna $x \in (a,b)$ je $\mathcal{F}'(x) = f(x)$; užíváme opět znaku $\int f(x)\,dx$. Je-li $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, $\mathcal{F}(x) = \Phi(x) + i\Psi(x)$, je $\mathcal{F}$ primitivní k f (tj. $\mathcal{F}(x) = \int f(x)\,dx$) tehdy a jen tehdy, když
$(\Phi(x) + i\Psi(x))' = \varphi(x) + i\psi(x)$,

tj. $\Phi' + i\Psi' = \varphi + i\psi$ neboli
$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx$, $\Psi(x) = \int \psi(x)\,dx$; tedy
$\int f(x)\,dx = \int (\varphi(x) + i\psi(x))\,dx$ existuje tehdy a jen tehdy, když existují $\int \varphi(x)\,dx$, $\int \psi(x)\,dx$ (všechno v témž intervalu (a,b)) , načež

$$\int (\varphi(x) + i\psi(x))\,dx = \int \varphi(x)\,dx + i\int \psi(x)\,dx \ .$$

Platí zřejmě (poněvadž primitivní funkce k φ, ψ jsou určeny až na konstantu), že primitivní funkce k libovolné komplexní funkci je určena až na libovolnou komplexní konstantu.

Poznámka: komplexní funkce $f = \varphi + i\psi$ může být speciálně reálná, tj. $\psi(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, a potom zde máme malou nedůslednost: např. všechny primitivní funkce k $f(x) = x$ mají ve "starém" smyslu tvar $\frac{x^2}{2} + C$, kde C je libovolná reálná konstanta, kdežto v "novém" smyslu je C libovolná komplexní konstanta. Ale dvojznačnost se týká jen "integrační konstanty", která nás obyčejně nezajímá, ledaže je nějakými podmínkami určena, a potom je stejně jasné, je-li reálná nebo ne. Tedy snad nestojí za to komplikovat názvosloví rozlišováním reálných a imaginárních "integračních konstant".

Ještě podotkněme, že také určitý integrál funkce $f = \varphi + i\psi$ definujeme rovnicí $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + i\int_a^b \psi(x)\,dx$, existují-li integrály vpravo; integrál vlevo se nazývá Riemannův (popříp. Newtonův), jsou-li oba integrály vpravo Riemannovy (popříp. Newtonovy).

Ukázali jsme, že mnohé "lokální" věty o spojitosti, limitě a derivaci platí i pro komplexní funkce reálné proměnné. Jsou však jiné věty, které pro komplexní funkce neplatí, např. věta o přírůstku funkce:

Vezměme funkci $f(x) = \cos x + i \sin x$, jež má derivaci $f'(x) = -\sin x + i\cos x$. Kdyby věta o přírůstku funkce platila i pro komplexní funkce, existovalo by $\xi \in (0, 2\pi)$ tak, že

$$(**) \qquad f(2\pi) - f(0) = 2\pi \,.\, f'(\xi) \ .$$

Ale funkce f má periodu 2π, takže levá strana v (**) je nula; dále

$|f'(\xi)| = \sqrt{\sin^2\xi + \cos^2\xi} = 1$, takže pravá strana není nula, a tedy rovnice (* *) nemůže platit pro žádné reálné ξ.

Vedle komplexních funkcí reálné proměnné se v matematice vyšetřují také komplexní funkce komplexní proměnné: Je-li M nějaká množina komplexních čísel, a je-li každému číslu $z \in M$ přiřazeno jisté (komplexní) číslo $f(z)$, říkáme, že f je funkce v oboru M (a to komplexní funkce jedné komplexní proměnné). Těmito funkcemi se budete systematicky zabývat v teorii analytických funkcí v třetím ročníku. My budeme zde potřebovat jen dva příklady:

Příklad 1: Polynom $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_0, \ldots, a_n$ komplexní čísla) má smysl pro všechna komplexní z; můžeme jej tedy pojímat jako funkci komplexní proměnné definovanou pro všechna komplexní z.

Příklad 2: Funkce $\exp(x) = e^x$ byla dosud definována pro reálná x. Platí tyto vztahy: $e^{x_1} . e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, $e^0 = 1$, $e^x . e^{-x} = e^0 = 1$, takže $e^x \neq 0$ pro všechna reálná x.

Rozšíříme nyní definici funkce e^z na všechna komplexní z. Definice, kterou nyní zavedu, se vám bude asi zdát umělá. Přirozenější definici podám později. Zavádím e^z pro komplexní z již nyní, protože nám bude tato funkce užitečná pro výpočty v § 4.

Napřed pro ryze imaginární $z = iy$ (y reálné) definujeme $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Pozor! iy je v jednom případě reálné, totiž když $y = 0$; musíme se přesvědčit, že v tomto případě dostaneme shodu se starou definicí, tj., že číslo $\cos 0 + i \sin 0$ dá vskutku e^0 neboli 1, ale to je zřejmé.

Ověřme nyní, že platí (pro reálné y_1, y_2)

$$e^{iy_1} . e^{iy_2} = e^{iy_1 + iy_2} .$$

Je

$$\begin{aligned} e^{iy_1} . e^{iy_2} &= (\cos y_1 + i \sin y_1).(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + \\ &+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2) = \\ &= \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) = e^{i(y_1 + y_2)} . \end{aligned}$$

Je-li nyní $z = x + iy$ (x reálné, y reálné), definujeme

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) .$$

Je-li $y = 0$ (tj. $z = x$), je $\cos y + i \sin y = 1$, takže $e^z = e^x$. Je-li $x = 0$ (tj. $z = iy$), je $e^x = 1$, a tedy $e^z = \cos y + i \sin y = e^{iy}$, a tedy naše nová definice (pro libovolné komplexní $\varkappa$) je pro reálné i pro ryze imaginární $\varkappa$ ve shodě s dřívějšími definicemi.

Budiž $\varkappa_1 = x_1 + iy_1$, $\varkappa_2 = x_2 + iy_2$. Potom $e^{\varkappa_1} \cdot e^{\varkappa_2} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{iy_2}$, ale $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ pro reálná x_1, x_2, a rovněž $e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{i(y_1 + y_2)}$.

Tedy
$$e^{\varkappa_1} \cdot e^{\varkappa_2} = e^{x_1 + x_2} \cdot e^{i(y_1 + y_2)} = e^{\varkappa_1 + \varkappa_2} .$$

Tedy i pro libovolná komplexní $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ je $e^{\varkappa_1} \cdot e^{\varkappa_2} = e^{\varkappa_1 + \varkappa_2}$, speciálně $e^{\varkappa} \cdot e^{-\varkappa} = e^0 = 1$, $e^{\varkappa} \neq 0$, $e^{-\varkappa} = \frac{1}{e^{\varkappa}}$.

Vezměme nyní libovolné komplexní číslo $\alpha = a + bi$ a vyšetřujme komplexní funkci reálné proměnné $f(x) = e^{\alpha x}$ (pro reálné x); vypočtěme její derivaci.

Je $\alpha x = ax + ibx$, tedy

$$f(x) = e^{ax + ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) .$$

Podle pravidla o derivaci součtu a součinu (jež platí i pro komplexní funkce reálné proměnné) je

$$f'(x) = a e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + e^{ax} (-b \sin bx + i b \cos bx) =$$
$$= e^{ax} \left[a \cos bx - b \sin bx + i(a \sin bx + b \cos bx) \right] =$$
$$= e^{ax} (a + ib) (\cos bx + i \sin bx) = \alpha \cdot e^{\alpha x} .$$

Tedy (pamatujte!): Je-li α libovolné komplexní číslo, má funkce $f(x) = e^{\alpha x}$ (komplexní funkce reálné proměnné) pro všechna reálná x derivaci $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$.

§ 3 Lineární diferenciální rovnice.

Jde o rovnice tohoto tvaru:

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x) ,$$

kde budeme stále předpokládat, že funkce p_k, q jsou spojité v jistém intervalu (a, b). Přitom připouštíme komplexní funkce p_k, q a také hledaná funkce může být komplexní. Je-li $q(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, dostáváme tzv. homogenní rovnici

$$(2) \qquad y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 .$$

Měli jsme již rovnici prvního řádu (viz § 1, bod V) a zjistili jsme, že každým bodem $[x_0, y_0]$, kde $a < x_0 < b$, prochází právě jedno řešení. To znamená: rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má nekonečně mnoho řešení; abych z nich jedno řešení $y(x)$ vybral, k tomu stačí, abych pro určitou hodnotu $x_0 \in (a, b)$ předepsal, že funkce y má v bodě x_0 nabýt jisté hodnoty y_0 (tj. $y(x_0) = y_0$). Dělali jsme to pro reálné funkce p, q, y, ale platí to i pro komplexní funkce.

U lineárních rovnic řádu vyššího než 1 už nestačí předepsat hodnotu $y(x_0)$; ukažme to na příkladě rovnice

(3) $$y'' - y = 0 .$$

Hned vidíme, že řešením rovnice je funkce e^x a také funkce e^{-x}; a okamžitě se přesvědčíte, že také funkce

(4) $$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

je řešením v $(-\infty, +\infty)$; přitom C_1, C_2 jsou jakákoliv komplexní čísla. Přesvědčme se, že (4) už dává <u>všechna</u> řešení.

Zavedeme zase (jako v § 1, bod V) novou neznámou funkci z rovnicí

$$y(x) = z(x)\, e^x \qquad \text{neboli} \qquad z(x) = y(x)\, e^{-x} ;$$

má-li z v nějakém bodě druhou derivaci, má ji i funkce y, a také naopak: má-li ji y, má ji také z. Je pak $y' = z'e^x + ze^x$, $y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x$, tedy $y'' - y = e^x(z'' + 2z')$. Funkce y je tedy řešením rovnice (3) tehdy a jen tehdy, je-li $z'' + 2z' = 0$. Označme z' písmenem u; tedy $z' = u$, $z'' = u'$. Rovnice $z'' + 2z' = 0$ je splněna tehdy a jen tehdy, když $u' + 2u = 0$. Ale tuto rovnici dovedeme řešit (viz § 1, bod V): Píšeme $\int \frac{du}{u} = -\int 2\,dx$, $\lg u = -2x + K$, $u = e^K \cdot e^{-2x}$, $u = Ce^{-2x}$, kde C je libovolná konstanta (výpočet byl nekorektní, ale víme, že výsledek je správný). Tedy $z' = Ce^{-2x}$, $z = -\frac{1}{2}Ce^{-2x} + D$, kde C, D jsou libovolné konstanty, a tedy $y = ze^x = -\frac{1}{2}Ce^{-x} + De^x$, což je totéž jako rovnice (4). Tedy vzorec (4) dává vskutku všechna řešení.

Zvolme nyní libovolné číslo $x_0 \in (a, b)$ a dvě komplexní čísla y_0, y_0'. Hledejme řešení $y(x)$, pro něž platí $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. To znamená, že má být $C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0} = y_0$, $C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0} = y_0'$; to jsou dvě rovnice, kterým vyhovuje <u>jediná</u> dvojice čísel C_1, C_2:

$$C_1 = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^{-x_0} , \qquad C_2 = \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{x_0} .$$

Tedy: existuje právě jedno řešení rovnice (3), které nabývá v bodě x_0 předepsané hodnoty y_0 a jehož derivace nabývá v bodě x_0 předepsané hodnoty y_0'. Obdobný výsledek platí pro každou lineární rovnici se spojitými "koeficienty":

1014-4527

Věta 1. (Existenční věta.) Nechť funkce $p_1, \ldots, p_n$, q jsou spojité v (a, b). Budiž $x_0 \in (a, b)$ a buďte $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ jakákoliv komplexní čísla. Potom existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice (1) v intervalu (a, b), jež splňuje podmínky

(5) $$y(x_0) = y_0\,,\quad y'(x_0) = y_0'\,,\quad \ldots\,,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,.$$

Je-li $z(x)$ řešením rovnice (1) v $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, jež rovněž splňuje podmínky $z(x_0) = y_0$, $z'(x_0) = y_0'$, ..., $z^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (předpokládám $\alpha < x_0 < \beta$), je $z(x) = y(x)$ pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$.

Poslední část věty ukazuje: pokud se omezuji na řešení v částečných intervalech intervalu (a, b), stačí vyšetřit řešení v celém intervalu (a, b). Podmínkám (5) se často říká "počáteční podmínky".

Důkaz této věty odložím do soustavné přednášky o diferenciálních rovnicích, ale věty budeme užívat.

Omezím se napřed na homogenní rovnici (2). Z věty 1 si můžeme utvořit dobrý přehled o všech řešeních rovnice (2), ale napřed si zavedeme jeden pojem.

Definice: Buďte $f_1, f_2 \ldots f_k$ ($k \geq 1$) funkce (komplexní) definované v intervalu (a, b). Jestliže existují čísla (komplexní) $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tak, že je

(6) $$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_k f_k(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in (a, b)\,,$$

přičemž aspoň jedno z čísel $c_1, c_2, \ldots, c_k$ je různé od nuly, říkáme, že funkce $f_1, f_2, \ldots, f_k$ jsou lineárně závislé v (a, b). Jestliže taková čísla $c_1, \ldots, c_k$ neexistují, tj. jestliže (6) je splněno jen pro $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, říkáme, že $f_1, \ldots, f_k$ jsou lineárně nezávislé v (a, b).

Říkáme také, že systém funkcí $f_1, \ldots, f_k$ je lineárně závislý nebo nezávislý v (a, b). Jak je to pro $k = 1$? Rovnost (6) je teď $c_1 f_1(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$; je-li $c_1 \neq 0$, plyne odtud $f_1(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Tedy systém složený z jediné funkce je lineárně závislý v (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li funkce identicky rovna nule v (a, b).

Užitečnou pomůckou pro vyšetřování lineární nezávislosti funkcí $f_1, \ldots, f_k$ je determinant

(7) $$W_{f_1,\ldots,f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_k(x) \\ f_1'(x), & f_2'(x), & \ldots, & f_k'(x) \\ f_1''(x), & f_2''(x), & \ldots, & f_k''(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(k-1)}(x), & f_2^{(k-1)}(x), & \ldots, & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

tzv. Wronského determinant funkcí $f_1, \ldots, f_k$.

Věta 2: Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ mají v (a, b) derivace řádu $k-1$ a nechť jsou v (a, b) lineárně závislé. Potom $W_{f_1,\dots,f_k}(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz: Existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_k$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly a taková, že

$$(*) \qquad c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) = 0 \qquad \text{pro všechna} \quad x \in (a, b).$$

Ježto funkce vlevo v $(*)$ je v (a, b) identicky rovna nule, jsou i všechny její derivace rovny nule identicky v (a, b), tj. pro všechna $x \in (a, b)$ platí rovnice

$$(8) \qquad \begin{cases} c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + \dots + c_k f_k'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(k-1)}(x) + \dots + c_k f_k^{(k-1)}(x) = 0 \end{cases} .$$

Vezměme libovolnou hodnotu $x \in (a, b)$; rovnice (8) ukazují, že čísla $c_1, \dots, c_k$ jsou řešením soustavy homogenních rovnic (lineárních) s determinantem (7). Ježto alespoň jedno z čísel $c_1, \dots, c_k$ je různé od nuly, je determinant (7) roven nule v bodě x.

Bude pro nás užitečné zavést pro zkrácení psaní jeden symbol: je-li $y(x)$ libovolná funkce, mající v (a, b) n-tou derivaci, označme ($p_i = p_i(x)$ jsou dané funkce v (a, b))

$$(9) \qquad L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y .$$

Tím je tedy každé funkci y, jež má n-tou derivaci v (a, b), přiřazena určitá funkce $L(y)$, definovaná v (a, b). Výrazům tvaru (9) se říká <u>lineární diferenciální operátor</u> n-tého řádu. Protože $(cy)^{(k)} = cy^{(k)}$, je $L(cy) = cL(y)$ pro každou konstantu c; protože $(y_1 + y_2)^{(k)} = y_1^{(k)} + y_2^{(k)}$, je $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$; odtud indukcí $L(y_1 + y_2 + \dots + y_p) = L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_p)$, $L(c_1 y_1 + \dots + c_p y_p) = c_1 L(y_1) + \dots + c_p L(y_p)$.

Tedy máme dokázánu větu:

Věta 3. $L(c_1 y_1 + \dots + c_p y_p) = c_1 L(y_1) + \dots + c_p L(y_p)$, kde c_k jsou konstanty a y_k mají n-tou derivaci v (a, b), p je libovolné přirozené číslo.

Rovnici (2) lze psát $L(y) = 0$. Z věty 3 tedy ihned plyne

Věta 4: Jsou-li $y_1, \dots, y_p$ nějaká řešení homogenní rovnice (2) v (a, b) a jsou-li $c_1, \dots, c_p$ jakákoliv komplexní čísla, je i funkce $c_1 y_1 + \dots + c_p y_p$ řešením rovnice (2) v (a, b).

Věta 5. Funkce p_k buďte spojité v (a,b). Potom rovnice (2) (homogenní) má n řešení lineárně nezávislých v (a,b).

Důkaz: Zvolme nějaký bod $x_0 \in (a,b)$. Podle existenční věty 1 existují řešení $y_1(x), \dots, y_n(x)$ v (a,b), která splňují tyto počáteční podmínky:

$$y_1(x_0) = 1, \; y_1'(x_0) = 0, \; \dots, \; y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \, ;$$
$$y_2(x_0) = 0, \; y_2'(x_0) = 1, \; y_2''(x_0) = 0, \; \dots, \; y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \, ;$$
$$y_3(x_0) = 0, \; y_3'(x_0) = 0, \; y_3''(x_0) = 1, \; y_3'''(x_0) = 0, \dots, \; y_3^{(n-1)}(x_0) = 0 \, ;$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = 0, \; y_n'(x_0) = 0, \; \dots, \; y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, \; y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \, .$$

Tedy $W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x_0) \neq 0$; tvrzení plyne z věty 2.

Definice: Systém n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice (2) v (a,b) nazýváme fundamentálním systémem řešení rovnice (2) v (a,b). Věta 5 říká právě, že takový fundamentální systém existuje.

Všimněme si ještě jedné drobnosti: je patrno, že funkce identicky rovná nule je řešením homogenní rovnice (2). Je to tzv. triviální řešení. Nechť nyní y je nějaké řešení rovnice (2) v (a,b), které v jistém bodě $x_0 \in (a,b)$ vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{10}$$

Potom y je triviální řešení.

Důkaz: Podle existenční věty 1 existuje právě jedno řešení, vyhovující podmínkám (10). Ale těmto podmínkám vyhovuje jednak naše řešení y, jednak řešení triviální. Tedy obě řešení splývají. Pomocí této poznámky snadno dokážeme větu:

Věta 6: Budiž $y_1, \dots, y_n$ systém řešení rovnice (2) v (a,b). Potom platí:

A) Wrońského determinant

$$W_{y_1, \dots, y_n}(x)$$

je buďto pro všechna $x \in (a,b)$ různý od nuly, nebo je pro všechna $x \in (a,b)$ roven nule.

B) V prvním případě je systém $y_1, \dots, y_n$ fundamentálním systémem, v druhém případě není fundamentálním systémem.

Důkaz: Budiž v jistém bodě $x_0 \in (a, b)$

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), \dots, y_n(x_0) \\ y_1'(x_0), \dots, y_n'(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x_0), \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

Potom systém rovnic

$$(11) \qquad \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

má řešení $c_1, c_2, \dots, c_n$, kde aspoň jedno z čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ je různé od nuly. Potom funkce $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ je řešením rovnice (2) a vyhovuje podle (11) podmínkám

$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Tedy je $y(x) = 0$, tj. $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, tedy $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé v (a, b) , tedy podle věty 2 je $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Tedy: Je-li $W_{y_1,\dots,y_n}(x)$ roven nule v jednom bodě intervalu (a, b) , je roven nule pro <u>všechna</u> $x \in (a, b)$. Tím je dokázáno tvrzení A) .

Za druhé jsme dokázali: Je-li $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$, jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně závislé a podle věty 2 plyne naopak z lineární závislosti rovnost $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$. Tím je dokázáno i tvrzení B) .

<u>Věta 7.</u> Budiž $y_1, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení rovnice (2) v (a, b) . Potom <u>každé</u> řešení y v (a, b) lze psát jedním a jen jedním způsobem ve tvaru

(12) $\quad y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ (tj. existuje jeden a jen jeden systém čísel $c_1, \dots, c_n$ tak, že platí (12)).

<u>Důkaz:</u> 1) že takový systém konstant $c_1, \dots, c_n$ může být nejvýše jeden, je vidět takto: Je-li

$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ a současně $y(x) = d_1 y_1(x) + \dots + d_n y_n(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, je pro $x \in (a, b)$

$(c_1 - d_1) y_1(x) + \dots + (c_n - d_n) y_n(x) = 0$; tedy, ježto $y_1, \dots, y_n$ jsou v (a, b) lineárně nezávislé, máme nutně $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$.

2) Že pro každé řešení y taková $c_1, \ldots, c_n$ existují, dokážeme takto:

Zvolíme $x_0 \in (a, b)$ a napíšeme n rovnic pro n neznámých $c_1 \ldots c_n$:

$$
(13) \quad \begin{cases}
c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y(x_0) \\
c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\
\vdots \\
c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) .
\end{cases}
$$

Determinant soustavy je $W_{y_1,\ldots,y_n}(x_0) \neq 0$, a tedy soustava má řešení $c_1, \ldots, c_n$. Z rovnic (13) je vidět, že řešení $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ difereno. rovnice (2) vyhovuje v bodě x_0 týmž počátečním podmínkám jako řešení $y(x)$; podle existenční věty 1 jsou tedy obě řešení totožná, tj. platí rovnice (12).

Znám-li tedy fundamentální systém řešení $y_1, \ldots, y_n$, znám všechna řešení: jsou dána vzorcem (12). Výraz $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, pokud v něm nejsou určena čísla $c_1, \ldots, c_n$, se jeví funkcí $n+1$ proměnných x, $c_1, \ldots, c_n$; v tomto smyslu se mu často říká "obecné řešení". Dosadíme-li za $c_1, \ldots, c_n$ určitá čísla, dostáváme jisté řešení; říká se též "partikulární řešení", ale v tomto případě to není nic jiného než "řešení". Všechna řešení se dostanou z "obecného řešení" všemi možnými volbami čísel $c_1, \ldots, c_n$.

Jestliže $y_1, \ldots, y_n$ je n řešení rovnice (2) (nemusí to být fundamentální systém), a zvolíme-li nějaká komplexní čísla c_{jk} $(j, k = 1, \ldots, n)$, jsou funkce

$$
(14) \quad \begin{aligned}
u_1 &= c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n , \\
u_2 &= c_{21} y_1 + \ldots + c_{2n} y_n , \\
&\vdots \\
u_n &= c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n
\end{aligned}
$$

také řešení rovnice (2). Odpovíme na otázku, kdy funkce (14) tvoří fundamentální systém.

<u>Věta 8.</u> Nechť $y_1, \ldots, y_n$ jsou řešení rovnice (2) v (a, b). Potom funkce (14) tvoří fundamentální systém řešení v (a, b) tehdy a jen tehdy, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

1) $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení v (a, b),

2) determinant čísel c_{jk} je různý od nuly.

Důkaz: Podle věty 6 je systém n řešení fundamentální právě tehdy, je-li Wrońského determinant různý od nuly.

Z rovnice

$$x_j = c_{j1} y_1 + \dots + c_{jn} y_n$$

plyne derivováním

$$x_j^{(l)} = c_{j1} y_1^{(l)} + \dots + c_{jn} y_n^{(l)} \qquad (0 \leq l \leq n-1)$$

a odtud podle pravidla o násobení determinantů

$$W_{x_1, \dots, x_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} W_{y_1, \dots, y_n}(x) \quad .$$

Levá strana je různá od nuly tehdy a jen tehdy, jsou-li oba činitelé vpravo různí od nuly.

Známe nyní velmi dobře strukturu všech řešení homogenní rovnice

$$(2) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad .$$

Existuje fundamentální systém řešení $y_1, \dots, y_n$ (dokonce jich existuje nekonečně mnoho podle věty 8), a známe-li tento fundamentální systém, je každé řešení dáno výrazem

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

s vhodnými konstantami $c_1, \dots, c_n$.

Vidíte, že se zde vlastně setkáváte s pojmy z algebry, které znáte z 1.ročníku. Soustava všech řešení rovnice (2) je modul nad oborem komplexních čísel - v 1.ročníku jste ovšem probírali moduly nad oborem reálných čísel. Fundamentální systém řešení rovnice (2) je prostě base tohoto modulu.

Ale jak nalézt fundamentální systém? U rovnice 1.řádu $y' + py = 0$ se dá nalézt "kvadraturou" (viz § 1, bod V): stačí nalézt nějakou primitivní funkci $P(x) = \int p(x)\,dx$, načež fundamentální "systém" (složený zde ovšem z jediné funkce) je $e^{-P(x)}$ a každé řešení má tvar $Ce^{-P(x)}$, kde C je libovolná konstanta.

U lineárních diferenciálních rovnic řádu $n > 1$ nelze obecně nalézt fundamentální systém takovým jednoduchým způsobem. Obecně se tímto obtížným problémem nebudeme zabývat; v jednom důležitém speciálním případě jej však rozřešíme v příštím paragrafu.

Obraťme se nyní k obecné rovnici

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q$$

s pravou stranou q (q, p_k spojité v (a, b)). Užijeme zase označení

$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$, takže rovnice (1), (2) lze psát takto:

(1) $L(y) = q$,

(2) $L(y) = 0$.

Připomeňme větu 3: pro libovolné konstanty $c_1, \dots, c_k$ a libovolné funkce $y_1, \dots, y_k$, mající v (a, b) n-tou derivaci, je

(15) $L(c_1 y_1 + \dots + c_k y_k) = c_1 L(y_1) + \dots + c_k L(y_k)$.

Představme si, že najdeme nějaké řešení Y rovnice (1) (s pravou stranou q). Každé funkci y (mající n-tou derivaci) přiřaďme funkci x rovnicí $x = y + Y$; potom je

$L(x) = L(y) + L(Y)$, tj. $L(x) = L(y) + q$.

Tedy $L(x) = q$ právě tehdy, když $L(y) = 0$. Jinak řečeno:

Věta 9: Budiž Y nějaké řešení rovnice (1). Potom všechna řešení rovnice (1) jsou dána výrazem $y + Y$, kde y je libovolné řešení rovnice (2).

Předpokládejme nyní, že se nám již podařilo rozřešit (2), tj. nalézt fundamentální systém $y_1, \dots, y_n$. K nalezení všech řešení rovnice (1) stačí podle věty 9 nalézt jedno z nich. Ukážeme teď, jak se dá nalézt. Jsou-li $C_1, \dots, C_n$ konstanty, je

(16) $Y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$

řešením rovnice (2).

Provedeme teď tzv. variaci konstant: Budeme se snažit nalézt funkce $C_1(x), \dots, C_n(x)$ mající v (a, b) derivaci tak, aby (16) bylo řešením rovnice (1) v (a, b), neboli tak, aby platila rovnice $L(Y) = q$. To je jedna podmínka pro n funkcí $C_1, \dots, C_n$; proto asi smíme předepsat ještě dalších $n-1$ podmínek; uvidíme, že to vskutku jde; těch $n-1$ podmínek zvolíme ovšem účelně, aby se výpočet dal provést.

Z rovnice (16) (C_k jsou teď funkce mající derivaci C_k') plyne

$Y' = C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' + C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n$;

aby se to zjednodušilo, předepíšeme podmínku $C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0$ (všude v (a, b)). Za tohoto předpokladu je v (a, b)

$Y' = C_1 y_1' + \dots + C_n y_n'$

a tedy $Y'' = C_1 y_1'' + \dots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n'$ a zase požadujeme, aby $C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0$ všude v (a, b) , takže

$Y'' = C_1 y_1'' + \dots + C_n y_n''$.

Když jsme se tímto způsobem dostali až k $Y^{(n-2)} = C_1 y_1^{(n-2)} + \ldots$
$\ldots + C_n y_n^{(n-2)}$, derivujeme:

$$Y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} + C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)}$$

a opět položme $C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$ všude v (a, b) , takže

$$Y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} .$$

To už jsme napsali $n-1$ podmínek, proto už přestaneme; derivováním vyjde

$$Y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} .$$

Jestliže $Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}, Y^{(n)}$ násobím po řadě funkcemi $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1, 1$ a sečtu, dostanu

$$L(Y) = C_1 L(y_1) + \ldots + C_n L(y_n) + C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} ,$$

tj. (protože $L(y_1) = \ldots = L(y_n) = 0$)

$$L(Y) = C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} .$$

Tedy k tomu, aby bylo $L(Y) = q$, je nutné a stačí, aby

$$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = q .$$

Funkce $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ bude tedy jistě v (a, b) řešením rovnice $L(y) = q$, bude-li všude v (a, b) splněno těchto n podmínek:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = q . \end{array} \right.$$

Ježto pro všechna $x \in (a, b)$ je determinant soustavy $W_{y_1, \ldots, y_n}(x) \neq 0$, mají tyto rovnice právě jedno řešení, které se vypočte podle Kramerova pravidla jako podíl dvou determinantů. Ježto q je spojité a $y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n-1)}$ jsou také spojité v (a, b) (neboť existuje $y_k^{(n)}$), vyjdou funkce $C_1', \ldots, C_n'$ spojité, a tedy k nim existují primitivní funkce $C_1, \ldots, C_n$ v (a, b) ; najdeme-li je, dostaneme hledané řešení

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

Vidíte, že hlavní potíž je řešení rovnice $L(y) = 0$; najdeme-li fundamentální systém řešení této rovnice, dá se řešení rovnice $L(y) = q$ nalézt "kvadraturami".

1014-4527

Poznámka: Řekli jsme již dříve, že nás zde zajímají hlavně reálné funkce; komplexní funkce jsou pro nás zde spíše technickou pomůckou. Buďte tedy funkce $p_1, p_2, \dots, p_n$ v $L(y)$ i funkce q reálné. Všimněme si napřed rovnice (2) $L(y) = 0$.

Dokažme: Jsou-li také "počáteční podmínky" $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ reálné, potom řešení $y = u + iv$, $u = \mathrm{Re}\, y$, $v = \mathrm{Im}\, y$ vyhovující těmto podmínkám: $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, je reálné.

Důkaz: Je $L(y) = L(u) + i\,L(v) = 0$, tedy obě reálné funkce $L(u)$, $L(v)$ jsou identicky rovny nule. Tedy v je řešením rovnice $L(v) = 0$ s počátečními podmínkami $v(x_0) = v'(x_0) = \dots = v^{(n-1)}(x_0) = 0$. Tedy je v nulové řešení, y je reálné.

Sestrojme nyní řešení $y_1, \dots, y_n$ daná "diagonálními" počátečními podmínkami (jako v důkazu věty 5): $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$; $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, $y_2''(x_0) = 0, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$; ..., $y_n(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$. Tato řešení jsou tedy reálná a $W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) = 1$. Tedy tvoří fundamentální systém. Tedy existuje reálný fundamentální systém $y_1, \dots, y_n$. Vezmu-li reálný fundamentální systém $y_1, \dots, y_n$, má každé řešení tvar $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ s komplexními c_k . Tvrdím: y je reálné tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna c_k reálná.

Důkaz: Je-li $c_k = d_k + i e_k$, je $\mathrm{Im}\, y = e_1 y_1 + \dots + e_n y_n$; ježto $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé v (a, b) , je $\mathrm{Im}\, y = 0$ v (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li $e_1 = e_2 = \dots = e_n = 0$.

Obraťme se nyní k rovnici (1) $L(y) = q$. Vezměme reálný fundamentální systém; stačí nalézt jedno řešení $Y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ rovnice (1). To se dělá tak, že se řeší soustava reálných lineárních rovnic (17); funkce $C_1', \dots, C_n'$ vyjdou tedy reálné (a spojité) a mají tedy reálné primitivní funkce $C_1, \dots, C_n$, takže řešení Y je reálné (vezmu-li reálné C_k) . Všechna řešení rovnice (1) mají tvar $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + Y$; toto řešení je reálné tehdy a jen tehdy, je-li $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ reálné, tedy (podle předešlého výsledku) tehdy a jen tehdy, jsou-li $c_1, \dots, c_n$ reálná čísla.

Příklad 1.

$$y'' - \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^2}$$ (musíme brát jednak interval $(-\infty, 0)$, jednak $(0, +\infty)$).

Řešíme rovnici $y'' - \frac{y'}{x} = 0$. Položme $y' = u$, $y'' = u'$, takže jde o lineární rovnici 1.řádu $u' - \frac{u}{x} = 0$; řešení jsou $u = cx$, tedy $y = c_1 x^2 + c_2$. Funkce 1 , x^2 tvoří fundamentální systém, protože

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2, & 1 \\ 2x, & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \quad .$$

Teď píši $y = C_1 x^2 + C_2$, kde C_1 , C_2 jsou funkce.

Metoda variace konstant dává:

$$y' = 2C_1 x \, , \quad C_1' x^2 + C_2' = 0 \, ,$$

$$y'' = 2C_1 + 2C_1' x \, ,$$

$$L(y) = 2C_1 + 2C_1' x - 2C_1 = 2C_1' x = \frac{1}{x^2} \; ;$$

tedy máme tyto dvě podmínky pro C_1' , C_2' :

$$C_1' x^2 + C_2' = 0 \; , \qquad 2C_1' x = \frac{1}{x^2} \; .$$

Tedy

$$C_1' = \frac{1}{2x^3} \; , \qquad C_2' = -\frac{1}{2x} \; .$$

Tedy třeba $C_1 = -\frac{1}{4x^2}$, $C_2 = -\frac{1}{2} \lg |x|$, takže máme jedno řešení (reálné)

$$Y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lg |x| \; .$$

Všechna řešení jsou potom dána výrazem:

$$c_1 x^2 + c_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lg |x| \; ,$$

kde nyní c_1 , c_2 jsou libovolné komplexní konstanty; to lze psát jednodušeji

$$c_1 x^2 + c_2 - \frac{1}{2} \lg |x| \; .$$

Tyto funkce dávají všechna řešení v $(0, +\infty)$ a všechna řešení v $(-\infty, 0)$; nemáme ovšem žádné řešení v $(-\infty, +\infty)$. Řešení je reálné tehdy a jen tehdy, jsou-li čísla c_1 , c_2 reálná.

Příklad 2.

Řešte rovnici $y'' - \frac{y'}{x} = \frac{1}{1 + x^2}$.

V $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$ dostanete řešení (c_1 , c_2 jsou libovolná čísla)

$$c_1 x^2 + c_2 + \frac{x^2}{2} \lg |x| - \frac{1 + x^2}{4} \lg (1 + x^2) \; .$$

§ 4. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Jde o rovnici

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = q(x)$$

a o příslušnou rovnici homogenní

(2) $$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \;,$$

kde a_0 , a_1, ..., a_n ($a_0 = 1$) jsou komplexní čísla (konstanty), φ je komplexní funkce spojitá v intervalu (a, b) . (Nevadilo by, kdyby nebylo $a_0 = 1$, jenom by musilo být $a_0 \neq 0$, neboť jen potom můžeme číslem a_0 dělit.) Položíme

(3) $$L(y) = a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(n-\nu)} \;.$$

Budeme řešit napřed rovnici

(2) $$L(y) = 0 \;.$$

Naším úkolem je nalézt n lineárně nezávislých řešení v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Zkusme, existují-li řešení tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ komplexní; pro $\lambda = 0$ dostáváme $y(x) = 1$ - to může být také řešení; např. rovnice $y'' = 0$ má jedno řešení $y = 1$, druhé x , a ta jsou lineárně nezávislá).

Dosaďme do $L(y)$:

$y = e^{\lambda x}$, tedy $y^{(p)} = \lambda^p e^{\lambda x}$. Dostaneme

$$L(e^{\lambda x}) = (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)\, e^{\lambda x} \;.$$

Funkce $e^{\lambda x}$ je tedy řešením rovnice $L(y) = 0$ tehdy a jen tehdy, když

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \;.$$

Označme $F(\Lambda)$ polynom

(4) $$F(\Lambda) = a_0 \Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\Lambda + a_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Lambda^{n-\nu} \;.$$

Tento polynom nazveme charakteristickým polynomem operátoru $L(y)$.

Náš první výsledek je tedy tento:

Funkce $e^{\lambda x}$ je řešením rovnice $L(y) = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže λ je kořenem charakteristického polynomu $F(\Lambda)$, neboli kořenem rovnice n-tého stupně

(5) $$F(\Lambda) = 0 \;.$$

Má-li rovnice (5) n různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dostáváme tak n řešení, o nichž za chvíli dokážeme, že tvoří fundamentální systém, a budeme hotovi. Ale rovnice (5) může mít i mnohonásobné kořeny, a pak je počet různých kořenů menší než n , takže musíme hledat ještě další řešení.

Budiž nyní λ nějaké komplexní číslo. Zaveďme do polynomu $F(\Lambda)$ novou proměnnou M rovnicí $\Lambda = M + \lambda$, neboli $M = \Lambda - \lambda$.

Potom je podle (4)

$$(6)\qquad F(M+\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k (M+\lambda)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-k} M^j \lambda^{n-k-j} \binom{n-k}{j};$$

kdybychom to srovnali podle mocnin proměnné M, viděli bychom, že je to polynom n-tého stupně (při M^n je koeficient a_0):

$$(7)\qquad F(M+\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j M^{n-j} \qquad (b_0 = a_0 \neq 0).$$

Do operátoru $L(y)$ zkusme místo y dosadit $ze^{\lambda x}$. Máme (je-li $z(x)$ nějaká funkce, mající derivaci n-tého řádu)

$$(8)\qquad L(ze^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k . (z . e^{\lambda x})^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-k} z^{(j)} . e^{\lambda x} . \lambda^{n-k-j} \binom{n-k}{j} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-k} z^{(j)} \lambda^{n-k-j} \binom{n-k}{j} .$$

Součet v (8) je lineární forma v $z^{(0)}, z', z'', \dots, z^{(n)}$, a je vidět srovnáním vzorců (6), (8), že koeficient u $z^{(j)}$ v (8) je stejný jako koeficient při M^j v (6), tj. (podle (7))

$$(9)\qquad L(ze^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} b_j z^{(n-j)} .$$

Tedy:

1. pomocná věta[1]: Budiž $L(y)$ lineární diferenciální operátor n-tého řádu (3) s konstantními koeficienty ($a_0 \neq 0$), $F(\Lambda)$ příslušný charakteristický polynom. Budiž λ libovolné číslo. Potom $F(M+\lambda)$ (kde M je proměnná) je opět polynom n-tého stupně v M; tedy má tvar (7), načež

$L(ze^{\lambda x})$ má tvar (9).

Nechť nyní λ je k-násobným kořenem polynomu $F(\lambda)$, takže je

$$(10)\qquad F(\Lambda) = (\Lambda - \lambda)^k \, G(\Lambda) ,$$

kde G je polynom stupně $n-k$, který už nemá kořen λ, tj. $G(\lambda) \neq 0$.

Pro pozdější potřebu podotkněme: Jestliže výroku " $F(\Lambda)$ má 0-násobný kořen λ " přisoudíme smysl " $F(\Lambda)$ nemá kořen λ ", je (10) správná i pro $k=0$ (potom ovšem $G(\Lambda) = F(\Lambda)$).

---

[1] Místo "pomocná věta" se užívá také řeckého slova "lemma".

Tedy

$$F(M+\lambda) = M^k G(M+\lambda),$$

kde $G(M+\lambda) = H(M)$ je polynom stupně $n-k$, $H(0) = G(\lambda) \neq 0$.
Tedy $H(M) = c_0 + c_1 M + \ldots + c_{n-k} M^{n-k}$, kde $c_0 \neq 0$, $c_{n-k} \neq 0$ a tedy

$$F(M+\lambda) = c_0 M^k + c_1 M^{k+1} + \ldots + c_{n-k} M^n$$

(to je vzorec (7), jenom jsme ty koeficienty značili jinak).

Podle 1.pomocné věty je tedy

$$L(x e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(c_0 x^{(k)} + c_1 x^{(k+1)} + \ldots + c_{n-k} x^{(n)}).$$

Formulujme to jako zvláštní pomocnou větu:

2. pomocná věta: Je-li $L(y)$ lineární diferenciální operátor (3) (s konstantními koeficienty, $a_0 \neq 0$) a jestliže λ je k-násobný kořen příslušného charakteristického polynomu ($k \geq 0$), je

$$L(x e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(c_0 x^{(k)} + \ldots + c_{n-k} x^{(n)}), \text{ kde } c_0 \neq 0,\ c_{n-k} \neq 0.$$

Odtud je ihned vidět, že pro $k > 0$ je $L(x e^{\lambda x}) = 0$ pro $x = 1$, x, $x^2, \ldots, x^{k-1}$. Tj. funkce $x^0 e^{\lambda x}$, $x^1 e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} e^{\lambda x}$ jsou řešení rovnice (2) $L(y) = 0$. A teď můžeme dokončit důkaz této základní věty:

Věta 10: Nechť lineární diferenciální operátor (3) (s konstantními koeficienty, $a_0 \neq 0$) má charakteristický polynom $F(\Lambda)$. Nechť rovnice $F(\Lambda) = 0$ má tyto různé kořeny: λ_1 (k_1-násobný), λ_2 (k_2-násobný), ..., λ_s (k_s-násobný) ($k_j > 0$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$).

Potom rovnice $L(y) = 0$ má tento fundamentální systém řešení:

$$\begin{array}{llll} x^0 e^{\lambda_1 x}, & x^1 e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}; \\ x^0 e^{\lambda_2 x}, & x^1 e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 x}; \\ \vdots & & & \\ x^0 e^{\lambda_s x}, & x^1 e^{\lambda_s x}, & \ldots, & x^{k_s - 1} e^{\lambda_s x}. \end{array} \tag{11}$$

Důkaz: Řešení to jsou, je jich právě n; jde o to dokázat, že jsou lineárně nezávislá. Napřed malou poznámku: je-li Q polynom (nikoli nulový), $\mu \neq 0$, je

$$(Q(x) e^{\mu x})' = P(x) e^{\mu x}, \tag{12}$$

kde P má týž stupeň jako Q.

Důkaz:

$$(Q(x) \cdot e^{\mu x})' = e^{\mu x}(\mu Q(x) + Q'(x)),$$

1014-4527

a zde Q' má nižší stupeň než Q. Přirozeně to neplatí pro $\mu = 0$: neboť $e^{\mu x} = 1$, a stupeň se derivováním sníží.

Lineární nezávislost funkcí (11) bude zřejmě dokázána, dokáži-li tuto větu:

3.pomocná věta: Budiž $a < b$. Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 1$) navzájem různá komplexní čísla ($\alpha_j \neq \alpha_k$ pro $j \neq k$), $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ polynomy, z nichž žádný není nulový.

Potom není

(13) $$Q_1(x)\, e^{\alpha_1 x} + \dots + Q_n(x)\, e^{\alpha_n x} = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in (a, b)\,.$$

Důkaz. Každý vztah (13) (platný pro všechna $x \in (a, b)$), kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou čísla navzájem různá a žádný z polynomů $Q_1, \dots, Q_n$ není nulový, nazvu na chvíli " n - člennou relací". Máme dokázat, že žádná n - členná relace neplatí.

Postupuji indukcí podle n :

1) $n = 1$. Jednočlenná relace by měla tvar $e^{\alpha x} Q(x) = 0$ neboli (ježto $e^{\alpha x} \neq 0$) $Q(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Ale to není možné, ježto Q není polynom nulový.

2) Budiž $n > 1$ a budiž dokázáno, že žádná $(n-1)$-členná relace neplatí. Máme odtud odvodit, že neplatí žádná n-členná relace. Nechť tedy platí n-členná relace (13). Násobme $e^{-\alpha_1 x}$; máme

(*) $$Q_1(x) + Q_2(x)\, e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + Q_n(x)\, e^{(\alpha_n - \alpha_1)x} = 0 \quad \text{v } (a, b)\,.$$

Má-li Q_1 stupeň m, derivuji $(m+1)$-krát vztah (*).

Potom $\left(Q_1(x)\right)^{(m+1)} = 0$, kdežto pro $k > 1$ je podle (12)

$$\left(Q_k(x)\, e^{(\alpha_k - \alpha_1)x}\right)^{(m+1)} = P_k(x)\, e^{(\alpha_k - \alpha_1)x}\,,$$

kde P_k je polynom nenulový, neboť má týž stupeň jako Q_k (je totiž $\alpha_k - \alpha_1 \neq 0$). Tím dostáváme však $(n-1)$-člennou relaci

$$P_2(x)\, e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + P_n(x)\, e^{(\alpha_n - \alpha_1)x} = 0 \quad \text{v } (a, b)$$

(neboť čísla $\alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_1$ jsou navzájem různá). Ale to je spor a tím je dokázána 3.pomocná věta a tedy i věta 10.

Příklad 1.

(14) $$L(y) = y^{(6)} + 4y^{(5)} + 8y^{(4)} + 8y''' + 4y''\,.$$

Řešme rovnici

(15) $$L(y) = 0\;;$$

charakteristický polynom je

$$F(\Lambda) = \Lambda^6 + 4\Lambda^5 + 8\Lambda^4 + 8\Lambda^3 + 4\Lambda^2 = \Lambda^2 (\Lambda^4 + 4\Lambda^3 + 8\Lambda^2 + 8\Lambda + 4) =$$
$$= \Lambda^2 (\Lambda^2 + 2\Lambda + 2)^2 .$$

Zde je $\Lambda^2 + 2\Lambda + 2 = (\Lambda + 1)^2 + 1$, takže rovnice $\Lambda^2 + 2\Lambda + 2 = 0$ je splněna pro $(\Lambda + 1)^2 = -1$, $\Lambda = -1 \pm i$.

Tedy máme tři dvojnásobné kořeny 0, $-1+i$, $-1-i$. Podle věty 10 máme tedy tento fundamentální systém:

$$(16) \qquad 1,\ x,\ e^{(-1+i)x},\ x e^{(-1+i)x},\ e^{(-1-i)x},\ x e^{(-1-i)x} .$$

Ale my jsme si řekli, že naším hlavním předmětem studia jsou reálné funkce; naše rovnice (15) je "reálná" (tj. koeficienty $1, 4, 8, 8, 4$ jsou reálná čísla), a my bychom měli místo (16) raději reálný fundamentální systém.

Systém (16) lze napsat takto:

$$(17) \qquad 1,\ x,\ e^{-x}(\cos x + i \sin x),\ x e^{-x}(\cos x + i \sin x),$$
$$e^{-x}(\cos x - i \sin x),\ x e^{-x}(\cos x - i \sin x) .$$

Rozřešme otázku obecně:

Nechť $L(y)$ a tedy též $F(\Lambda)$ má reálné koeficienty, takže rovnice $F(\Lambda) = 0$ má jednak reálné kořeny, jednak dvojice imaginárních kořenů téže násobnosti, takže dvojice k-násobných kořenů $\alpha = a + bi$, $\bar{\alpha} = a - bi$ $(b \neq 0)$ dává vznik $2k$ řešením

$$e^{(a+bi)x},\ x e^{(a+bi)x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{(a+bi)x},$$
$$e^{(a-bi)x},\ x e^{(a-bi)x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{(a-bi)x},$$

jež tvoří část fundamentálního systému, uvedeného ve větě 10. Vezměme jednu z těchto dvojic:

$$(18) \qquad y_1 = x^r e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$
$$y_2 = x^r e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) .$$

Sestrojme reálné funkce

$$(19) \qquad z_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = x^r e^{ax} . \cos bx ,$$
$$z_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = x^r e^{ax} . \sin bx ,$$

neboli
$$z_1 = \operatorname{Re} y_1 , \quad z_2 = \operatorname{Im} y_1 .$$

Zavedu-li nový systém řešení

$$x_1 = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2},$$

$$x_2 = \frac{y_1}{2i} - \frac{y_2}{2i},$$

$$x_3 = y_3,$$

$$x_4 = y_4,$$

$$\vdots$$

$$x_n = y_n,$$

je determinant této substituce

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{1}{2i}, & -\frac{1}{2i}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, & 0, & \dots & & 0, & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0,$$

a tedy $x_1, x_2, y_3, y_4, \dots, y_n$ je podle věty 8 též fundamentální systém, tj. dvojici (18) lze nahradit dvojicí (19). Provedu-li to pro všechny takové dvojice, dostávám tento předpis:

Jestliže $L(y)$ má reálné (konstantní) koeficienty, má je též $F(\lambda)$. Je-li tedy $\alpha = a + bi$ ($b \neq 0$) k-násobným kořenem rovnice $F(\lambda) = 0$, je též $\bar{\alpha} = a - bi$ k-násobným kořenem $F(\lambda) = 0$; v tom případě můžeme $2k$ řešení $x^p e^{(a \pm bi)x}$ ($p = 0, 1, \dots, k-1$) nahradit reálnými řešeními

$$e^{ax} \cos bx,\ x e^{ax} \cos bx,\ \dots,\ x^{k-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax} \sin bx,\ x e^{ax} \sin bx,\ \dots,\ x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

Tím dostaneme fundamentální systém $y_1, \dots, y_n$, složený z <u>reálných</u> funkcí. Podle poznámky z konce § 3 víme, že řešení $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ je reálné tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna čísla $c_1, \dots, c_n$ reálná.

Přepište takto fundamentální systém z příkladu 1!

Budiž opět

(21) $L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$ (a_k konstanty, $a_0 \neq 0$).

Najdeme fundamentální systém řešení rovnice $L(y) = 0$ a je-li $q(x)$ funkce spojitá v (a, b), dovedeme metodou variace konstant (viz § 3) převést řešení rovnice $L(y) = q$ na "kvadratury". V některých případech, a to tehdy, když $q(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$, kde P je polynom, dovedeme však řešení rovnice $L(y) = q$ nalézt jednodušeji. To nyní vyložím.

Je předložena rovnice

$$L(y) = P(x)\, e^{\lambda x} , \tag{22}$$

kde $L(y)$ je operátor (21) s konstantními koeficienty, P je polynom stupně r :

$$P(x) = \frac{b_0 x^r}{r!} + \frac{b_1 x^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + \frac{b_{r-1} x}{1!} + b_r \quad (b_0 \neq 0) \tag{23}$$

(přidávám sde faktoriály, protože tak se pohodlněji derivuje; funkce $f(x) = \frac{x^m}{m!}$ má derivace

$$f'(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} , \quad f''(x) = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} , \ \dots, \ f^{(m-1)}(x) = \frac{x}{1!}, \ f^{(m)}(x) = 1).$$

Nechť číslo λ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice $F(\Lambda) = 0$ $(k \geq 0)$. Potom podle 2.pomocné věty je pro každou funkci $z(x)$ (mající n-tou derivaci)

$$L(z e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} (c_0 z^{(k)} + \dots + c_{n-k} z^{(n)}) , \tag{24}$$

kde $c_0 , \dots, c_{n-k}$ jsou jisté konstanty, $c_0 \neq 0$.

Zavedu-li do rovnice (22) novou neznámou funkci $z(x)$ rovnicí $y(x) = z(x)\, e^{\lambda x}$, potom rovnice (22) znamená totéž jako $L(z e^{\lambda x}) = P(x)\, e^{\lambda x}$, což podle (24), (23) znamená totéž jako

$$c_0 z^{(k)} + c_1 z^{(k+1)} + \dots + c_{n-k} z^{(n)} = b_0 \frac{x^r}{r!} + b_1 \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + b_{r-1} \frac{x}{1!} + b_r \tag{25}$$

(neboť číslem $e^{\lambda x} \neq 0$ se dá dělit). Stačí nám, jak víme, nalézt jedno řešení. Tvrdím, že existuje řešení tvaru $z = x^k . Q(x)$, kde Q je polynom stupně r-tého.

Z toho potom vyplyne, že rovnice (22) má řešení tvaru $x^k Q(x)\, e^{\lambda x}$. To se velmi snadno pamatuje: Má-li pravá strana v (22) tvar $P(x)\, e^{\lambda x}$, kde $P(x)$ je polynom stupně r , a λ je k-násobný kořen rovnice $F(\Lambda) = 0$ $(k \geq 0)$, existuje řešení mající podobný tvar:

$x^k . Q(x) . e^{\lambda x}$, kde Q je rovněž polynom stupně r . Není-li λ kořenem rovnice $F(\Lambda) = 0$, je $k = 0$ a činitele x^0 lze vynechat.

Dříve než toto tvrzení dokážeme, vypočteme pro ilustraci jeden příklad:

(26) $y'' - y = x^2 e^x$.

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 1 = 0$ má jednoduché kořeny ± 1. Tedy existuje řešení tvaru

$$y = x\,(ax^2 + bx + c)\,e^x = (ax^3 + bx^2 + cx)\,e^x .$$

Koeficienty určíme dosazením do (26):

$$y' = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx)e^x = e^x(3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx)$$

$$y'' = (3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx)e^x + (6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c)e^x = e^x(ax^3 + 6ax^2 + bx^2 + 6ax + 4bx + cx + 2b + 2c)\;;$$

rovnice (26) (po vydělení číslem e^x) tedy znamená, že

$$6ax^2 + 6ax + 4bx + 2b + 2c = x^2\;;$$

to má platit pro všechna x, což dává:

$$6a = 1\,,\quad 6a + 4b = 0\,,\quad 2b + 2c = 0\,,$$

$$a = \frac{1}{6},\quad b = -\frac{1}{4},\quad c = \frac{1}{4},$$

takže máme řešení $\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x$.

Všechna řešení rovnice (26) jsou pak

$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x$. (c_1, c_2 libovolné konstanty)

Dokončeme ještě důkaz naší věty. Máme dokázat, že rovnice (25) (kde $c_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$) má řešení tvaru

(27) $$u(x) = d_{k+r}\frac{x^{k+r}}{(k+r)!} + d_{k+r-1}\frac{x^{k+r-1}}{(k+r-1)!} + \dots + d_k\frac{x^k}{k!}\,,$$

kde $d_{k+r} \neq 0$.

Postupujeme stejně jako v příkladu: dosadíme prostě do rovnice (25); má být

$$c_0\left(d_{k+r}\frac{x^r}{r!} + d_{k+r-1}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + d_{k+1}\frac{x}{1!} + d_k\right) +$$

$$+ c_1\left(d_{k+r}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + d_{k+r-1}\frac{x^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + d_{k+1}\right) + \dots + c_{r-1}\left(d_{k+r}\frac{x}{1!} + d_{k+r-1}\right) + c_r d_{k+r} = b_0\frac{x^r}{r!} + b_1\frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + b_{r-1}\frac{x}{1!} + b_r$$

(kdyby nám v (25) některé c_r scházelo, tj. kdyby bylo $r > n - k$, napsali bychom do (25) ještě členy

$$c_{n-k+1}\, x^{(n+1)} + c_{n-k+2}\, x^{(n+2)} + \dots + c_r\, x^{(k+r)}$$

a položili bychom $c_{n-k+1} = c_{n-k+2} = \dots = c_r = 0$). Nyní srovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x na obou stranách; dostaneme rovnice

$$
\begin{aligned}
&c_0\, d_{k+r} = b_0 ,\\
&c_0\, d_{k+r-1} + c_1\, d_{k+r} = b_1 ,\\
&c_0\, d_{k+r-2} + c_1\, d_{k+r-1} + c_2\, d_{k+r} = b_2 ,\\
&\vdots\\
&c_0\, d_{k+1} + c_1\, d_{k+2} + \dots + c_{r-1}\, d_{k+r} = b_{r-1} ,\\
&c_0\, d_k + c_1 d_{k+1} + \dots + c_r d_{k+r} = b_r .
\end{aligned}
$$

Je $b_0 \neq 0$. Ježto $c_0 \neq 0$, určuje první rovnice d_{k+r} (a to $d_{k+r} \neq 0$), potom druhá d_{k+r-1} atd., až předposlední určuje d_{k+1} a potom poslední určuje d_k. Tím je důkaz proveden.

<u>Poznámka 1.</u> Víme, že $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$. Chceme-li tedy nalézt nějaké řešení rovnice $L(y) = q_1 + q_2$, stačí nalézt řešení y_1 rovnice $L(y_1) = q_1$ a řešení y_2 rovnice $L(y_2) = q_2$ a sestrojit součet $y_1 + y_2$. To je někdy výhodné.

<u>Poznámka 2.</u> Je (pro reálná x)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$
(28)
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x ;$$

odtud sečtením a odečtením:

(29) $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} , \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) .$$

Budiž nyní $L(y)$ <u>reálný</u> operátor s konstantními koeficienty, takže také charakteristický polynom $F(\Lambda)$ má reálné koeficienty. Často se vyskytuje úkol řešit rovnici

(30) $$L(y) = P(x)\, e^{ax} \cos bx + Q(x)\, e^{ax} \sin bx$$

(a, b reálná, $b \neq 0$; P, Q polynomy stupně nejvýše r). Rozepíšeme-li $\cos bx$, $\sin bx$ pomocí e^{ibx}, e^{-ibx}, dostaneme podle (29) rovnici (30) ve tvaru

$$L(y) = P_1(x)\, e^{(a+ib)x} + Q_1(x)\, e^{(a-ib)x} .$$

Jestliže $a + ib$ a tedy také $a - ib$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice, existuje řešení tvaru

$$x^k P_2(x)\, e^{(a+ib)x} + x^k Q_2(x)\, e^{(a-ib)x}$$

, které podle (28) lze psát ve tvaru

$$(31) \qquad x^k P_3(x)\, e^{ax} \cos bx + x^k Q_3(x)\, e^{ax} \sin bx \;;$$

[illegible]

úpravy provádět; můžeme přímo do (30) dosadit (31), kde P_3, Q_3 mají dosud neurčené koeficienty, které určíme jako dříve z rovnice (30) (srovnáváme zvláště členy s $\cos bx$ a členy se $\sin bx$). Jen poznamenávám: může se stát, že v (30) schází vpravo např. člen se $\sin bx$, a že přesto se objeví v řešení (31).

<u>**Příklad:**</u>

$$(32) \qquad y'' - 2y' + 2y = \cos x \;.$$

Charakteristická rovnice má kořeny $1 \pm i$, tedy nemá kořeny $\pm i$. Hledáme řešení tvaru $y = a\cos x + b\sin x$; dosazením vyjde

$$2(a\cos x + b\sin x) - 2(-a\sin x + b\cos x) + (-a\cos x - b\sin x) = \cos x$$

$$a - 2b = 1\,, \qquad b + 2a = 0\,,$$

tedy $\qquad b = -2a\,, \qquad 5a = 1\;; \quad a = \frac{1}{5}\,, \qquad b = -\frac{2}{5}\,.$

Ježto fundamentální systém homogenní rovnice $y'' - 2y' + 2y = 0$ je $e^x \cos x$, $e^x \sin x$, jsou všechna řešení rovnice (32) dána výrazem $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.