METODA

Zdeněk Halas

Archimédův dopis Eratosthenovi o mechanických větách neboli *Metoda*[1] pojednává o využití těžiště a zákona rovnováhy na páce k výpočtům objemů těles ohraničených různými plochami. Dává nám přitom nahlédnout, jakým způsobem Archimédés objevoval nové výsledky, k nimž pak hledal přesné důkazy pomocí tzv. exhaustivní metody[2]. Tento spis se zachoval v jediném exempláři – v *Archimédově palimpsestu.*[3]

1 Archimédův palimpsest

Palimpsest je rukopis psaný na pergamenu, který byl použit opakovaně. Kodex, jehož text už nebyl považován za potřebný, se rozvázal na jednotlivé listy, z nichž byl text seškrábán či smyt a napsal se na ně text nový. Toto očištění zpravidla nebylo dokonalé, takže původní text slabě prosvítal, nerušil však čtení textu nového. Vzhledem k vysoké ceně pergamenu byla tato praxe poměrně běžná. Kodex s Archimédovými[4] spisy, jenž byl vytvořen někdy kolem poloviny 10. století, podstoupil tuto proceduru[5] v roce 1229 nebo nedlouho předtím[6], kdy na vzniklé listy opsal kněz Ióannés Myronás liturgickou knihu (*Euchologion*).

Počátkem 19. století pak byl kodex z Jeruzaléma převezen do knihovny Řeckého patriarchátu. V jednom z dílů jejího katalogu, který vyšel roku 1899, byl zaznamenán i palimpsestový kodex, z něhož bylo v tomto katalogu opsáno několik málo řádků prosvítajícího textu. Na tento záznam upozornil německý klasický filolog Hermann Schöne dánského klasického filologa a historika antické matematiky Johana Ludviga Heiberga (1854–1928), který byl editorem

[1] Tento spis má dva nadpisy spojené do jednoho, odděleny jsou středníkem. První nadpis je vlastně stručným popiskem celého spisu, druhý může být původním nadpisem.

[2] Archimédés byl mistrem v aplikaci exhaustivní metody. Ukázku jejího užití lze nalézt v kapitole *Měření kruhu.*

[3] Archimédovu palimpsestu a speciálně spisu *Metoda* bude věnována speciální monografie, která bude obsahovat úplný text *Metody,* překlad do češtiny, podrobný matematický komentář a historii vzniku, objevu a zpracování palimpsestového kodexu. Přehledné shrnutí jeho pohnuté historie lze také nalézt v první části této knihy v kapitole M. Bečvářové.

[4] Archimédův kodex, jak jej máme dochován dnes, obsahuje 175 pergamenových listů a sedm listů papírových, které dohromady pocházejí ze sedmi původních kodexů. Ty obsahovaly nejen spisy Archimédovy, ale také promluvy rétora a politika protimakedonského zaměření Hypereida (4. stol. př. Kr.), komentář k Aristotelovým *Kategoriím, Ménaion* (druh liturgických knih), sbírku hagiografických textů a dva texty (označované jako Y a Z), které dosud nebyly identifikovány. Z Archimédových spisů palimpsest obsahuje *O rovnováze rovinných útvarů, O spirálách, Měření kruhu, O kouli a válci, O plovoucích tělesech, Metoda* a *Stomachion.*

[5] Původní listy s Archimédovým textem byly navíc přeloženy, takže vznikl nový kodex polovičního formátu.

[6] Soudí se tak podle rozluštěné poznámky na prvním foliu: „kněz Ióannés Myronás dokončil svou práci 13. dubna 1229“ (den před Velikonoční nedělí).

souborného kritického vydání Archimédových spisů. J. L. Heiberg v těchto řádcích ihned poznal Archimédův matematický text. V létě roku 1906 se vypravil přímo do Konstantinopole, kde kodex prostudoval. Nechal také pořídit kvalitní fotografie, s jejichž pomocí dokončil většinu práce na přepisu. Při této práci objevil dva zcela nové, dosud ztracené spisy: *Metodu* a *Stomachion.* Hned následujícího roku publikoval přepis textu *Metody* v časopise Hermes (viz [Hei1]). Právě tento text se stal základem překladů do němčiny a angličtiny [Hea]. Mimořádně zajímavá je skutečnost, že ihned v roce 1909 vydal ve výroční zprávě c. k. státního gymnasia v Prostějově český překlad [Vr] tohoto řeckého textu gymnaziální profesor František Vrána.

Roku 1908 se J. L. Heiberg vypravil do Konstantinopole znovu, aby ověřil přímo v rukopisu některá nejasná místa a pokračoval ve zkoumání kodexu. V letech 1910 až 1915 pak vydal druhé, doplněné a přepracované vydání Archimédova díla [Hei]. Oba nově objevené spisy, *Metoda* a *Stomachion,* zařadil do druhého dílu, který vyšel roku 1913.

Ve 20. letech byl kodex převezen do Athén a v tomto období se patrně ztratil. Objevil se až po druhé světové válce v soukromé sbírce jedné pařížské rodiny. Po několika neúspěšných pokusech o prodej kodexu předním světovým knihovnám se palimpsest objevil v aukční síni Christies v New Yorku, kde byl vydražen 29. října 1998 za dva miliony dolarů.

Majitel si přál zůstat v anonymitě, poskytl však svůj kodex na deset let k vědeckému studiu. Stav kodexu se za posledních sto let pronikavě zhoršil: byl zasažen plísní, tenké stránky byly místy téměř nečitelné, zčernalé, obsahovaly mnoho drobných děr. Navíc na čtyřech stranách[7] přibyly celostránkové ilustrace evangelistů. Záchrany kodexu se ujalo muzeum umění Walters v Baltimore na východním pobřeží Spojených států.

2 Čtení kodexu

Čtení takto poškozeného kodexu bylo velmi náročné. Předně bylo potřeba jej zbavit vazby, kterou byl opatřen až v posledních letech. Odstranění vazby probíhalo od 3. dubna 2000 do 4. listopadu 2004. Jednotlivé listy pak byly pečlivě očištěny a každý zvlášť byl zasazen do speciálního plastového obalu. Navíc bylo potřeba zařadit jednotlivé fragmenty na příslušná místa.

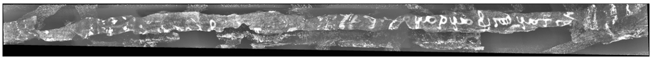
V roce 2004 mohla konečně začít digitalizace celého kodexu.[8] Jelikož je kodex pouhým okem velmi špatně čitelný, bylo potřeba zvolit vhodnou metodu, která by zvýraznila Archimédův text. Jedním z prvních pokusů bylo pořizování fotografií speciálním monochromatickým fotoaparátem RIT. Monochromatické světlo přitom zajišťovaly LED diody. Každé folio bylo fotografováno čtyřicetkrát. Tyto fotografie se poté různě kombinovaly, přičemž vhodnými kombina-

[7] Všechna čtyři zasažená folia obsahují Archimédův text.

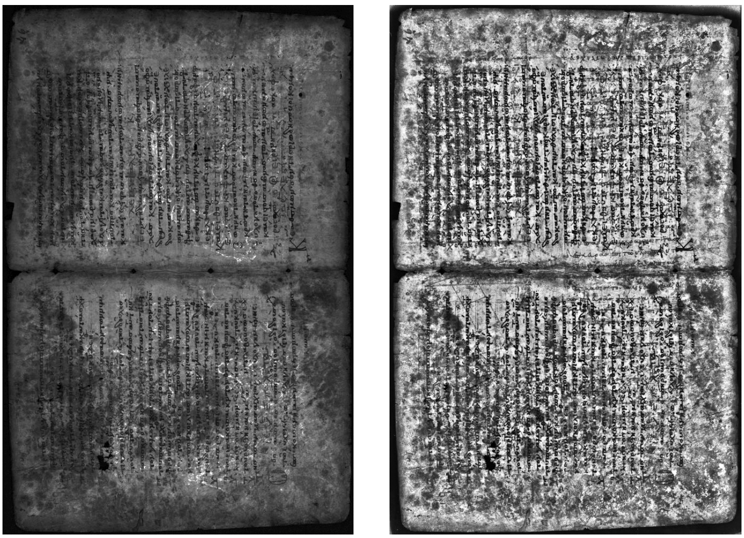
[8] Pro zajímavost uveďme, že celý kodex je naskenován v Google books, kde je také nejstarší knihou. Stránky jsou však prakticky nečitelné. Výstup digitalizace kodexu je dostupný na stránkách http://archimedespalimpsest.net, kde je každý list k dispozici v mnoha podobách ve vysokém rozlišení.

cemi bylo možno zdůraznit špatně čitelný text tak, že na mnoha místech velmi výrazně vystupoval. Přesto však nebylo možné přečíst všechny pasáže.

Jiná metoda, která měla umožnit přečíst Archimédův text tam, kde byl pouhým okem naprosto nerozlišitelný, nebyla založena na optice, ale na rentgenovém záření. Chemickou analýzou se totiž zjistilo, že inkoust, kterým je kodex napsán, obsahuje prvek železo (Fe_2O_3). Pomocí přístroje EDAX Eagle a příslušného software na zpracování získaných dat byla získána mapa rozložení železa. Tímto způsobem sice bylo možno přečíst naprostou většinu dosud nečitelného textu, nicméně zpracování poloviny jediného řádku trvalo asi 15 hodin.



Postup založený na rentgenovém záření byl tedy mimořádně úspěšný, nicméně neúnosně časově náročný. Proto se v roce 2006 přikročilo k práci na větším zařízení – Stanfordském elektron-pozitronovém urychlovači (SPEAR), což vedlo ke značnému urychlení, takže bylo možno přečíst ty části textu, které byly významné a jinými postupy zcela nečitelné. Jednalo se o část závěrečné věty ze spisu *O plovoucích tělesech,* první stránku kodexu (na níž se našlo datum dohotovení opisu) a některé geometrické náčrtky.



Začátek *Metody* v pravých a nepravých barvách.

3 Metoda v antice

O existenci Archimédovy *Metody* se vědělo ze svědectví antických a byzantských autorů. Poměrně dobře známá byla byzantská encyklopedie *Súda,* kde se u hesla Theodosios (2. pol. 2. stol. př. Kr.) píše:

Theodosios, filosof. Napsal Sfériky ve třech svitcích, ... , komentář k Archimédově Metodě (Efodion), ...

Několik svědectví se nám také dochovalo ve spisu *Metrika* slavného mechanika a aplikovaného matematika Héróna Alexandrijského (1. stol.), například:

Archimédés v Metodě dokázal, že každý útvar ohraničený úsečkou a řezem pravoúhlého kužele, tj. parabolou, je 1 a $\frac{1}{3}$ *trojúhelníka, který s ní má společnou základnu a stejnou výšku.* (I,32,58-61)

Máme určit velikost části válce oddělené řezem vedeným středem jedné podstavy. A buď průměr této podstavy AB 7 jednotek, výška tohoto útvaru 20 jednotek. Archimédés dokázal v Metodě, že takovýto [útvar vzniklý] odříznutím je šestinou rovnoběžnostěnu, který má čtyřúhelníkovou podstavu opsanou podstavě válce a výšku stejnou, jako řez …

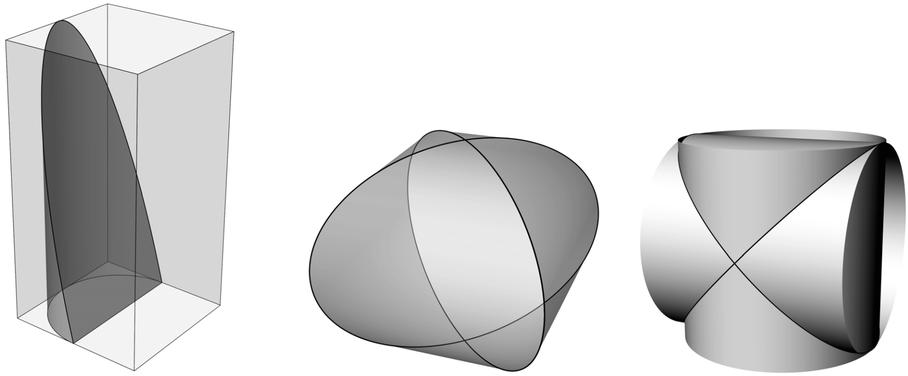
Tentýž Archimédés v téže knize dokazuje, že pokud procházejí krychlí dva válce, jejichž podstavy se dotýkají hran krychle, tak bude průnik těchto válců dvěma třetinami krychle. (II,14,1–15,5)

Nebylo však známo, co přesně tento spis obsahuje, ani jakým postupem byly dosažené výsledky odvozovány.

4 Obsah spisu Metoda

Archimédés píše, že už dříve poslal Eratosthenovi některé z vět k důkazu. Ohlašuje také dvě věty zcela nové, které jsou překvapivé tím, že dávají do souvislosti objemy mnohostěnů a těles ohraničených plochami, jež nejsou rovinami. Poměry těchto objemů jsou přitom vyjádřeny pomocí malých celých čísel. Do té doby totiž Archimédés porovnával koule, elipsoidy či paraboloidy s válcem nebo kuželem.

První věta dává do souvislosti objem úseče válce vepsaného do kvádru se čtvercovou podstavou. Objem této úseče je pak šestinou objemu celého hranolu. Druhá věta se týká tělesa, které vznikne průnikem dvou válců vepsaných do téže krychle; objem tohoto tělesa je roven dvěma třetinám objemu celé krychle. Toto těleso i příslušné válce, jejichž průnikem vzniká, jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Dále Archimédés píše, že Eratosthenovi objasní metodu, pomocí níž objevil některé vztahy. Když jsou totiž tyto vztahy známé, tak se pak snáze dokazují. Odvození pomocí své metody Archimédés nepovažuje za důkaz, neboť na závěr spisu prý uvede ke všem větám důkazy geometrické. Spis se nám však nezachoval celý, ale jen část: od úvodního dopisu obsahujícího znění obou ohlášených vět a některá základní tvrzení bez důkazu, přes ukázky své metody na konkrétních příkladech, až po odvození objemu prvního tělesa (úseče válce) mechanickou metodou i geometricky. Odvození vztahu pro objem druhého tělesa (průnik dvou válců) se nám vůbec nedochovalo, podobně jako geometrické důkazy jednotlivých vět.

Z úvodního dopisu se také dozvídáme, že Archimédés očekával, že současníci či následující generace naleznou pomocí jeho metody další poznatky. Také zde nacházíme významné svědectví o vztahu pro objem jehlanu či kužele, jež jsou třetinou objemu příslušného hranolu, resp. válce. Jako první prý tento fakt uvedl Démokritos, ale bez vysvětlení.[9] První, kdo publikoval důkaz tohoto tvrzení, byl prý Eudoxos.

Z jednoduchých tvrzení z mechaniky uvádí Archimédés bez důkazu zejména následující:

(1) Pokud leží těžiště několika těles v jedné přímce; pak také těžiště celku leží na téže přímce.
(2) Těžiště úsečky – její střed.
(3) Těžiště trojúhelníka – průsečík spojnic vrcholů úhlů a středů protilehlých stran.
(4) Těžiště rovnoběžníka – průsečík úhlopříček.
(5) Těžiště kruhu – jeho střed.
(6) Těžiště válce – střed osy.
(7) Těžiště hranolu – střed osy.[10]
(8) Těžiště kužele – bod, který dělí osu v poměru $3:1$.

Pak už přicházejí věty o obsahu, objemech a těžištích různých geometrických útvarů, a to pravděpodobně v pořadí, v němž je postupně Archimédés pomocí své metody objevoval. Uvádíme jejich schematický přehled.

(1) parabolická úseč $= 1\frac{1}{3}$ vepsaného trojúhelníka
(2) koule je čtyřikrát větší než kužel výšky r, válec $= \frac{3}{2}$ vepsané koule
(3) $\frac{3}{2}$ rotačního elipsoidu $=$ opsaný válec
(4) úseč rotačního paraboloidu je $= \frac{3}{2}$ příslušného kužele
(5) těžiště rotačního paraboloidu je ve $\frac{2}{3}$ osy
(6) těžiště polokoule dělí osu v poměru $5:3$
(7) kulová úseč : vepsaný kužel $= (r + 2r - v) : (2r - v)$
(8) objem úseče elipsoidu

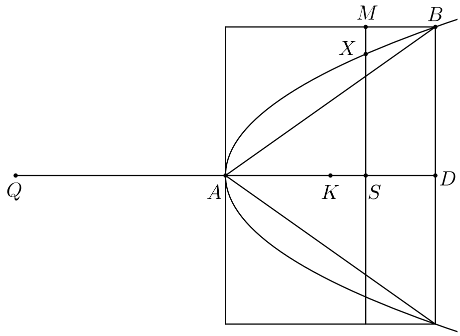
[9] Patrně se jednalo o odvození vycházející z atomismu.

[10] Ve Vránově překladu chybí, podobně také chybí v [Hei1]. Ve Vránově překladu je díky předloze, jež je teprve publikací předběžnou, několik vynechávek, na něž je nedostatečně upozorněno. Obecně ke konci textu narůstá jeho fragmentárnost.

(9) těžiště kulové úseče leží na ose rozdělené v poměru
část osy při vrcholu : část při podstavě $= (v+4(2r-v)) : (v+2(2r-v))$
(10) těžiště elipsoidu
(11) úsek rotačního hyperboloidu : vepsaný kužel $= (v+3a) : (v+2a)$
(12) objem úseče válce z 1. oznámené věty:
úseč válce $= \frac{1}{6}$ opsaného hranolu
(13) objem úseče válce, odvození pomocí řezů
(14) objem úseče válce, pomocná křivka parabola v podstavě
(15) objem úseče válce, geometrický důkaz; závěr je nenávratně ztracen

5 Metoda – rotační paraboloid

Ukažme si, v čem spočívá Archimédova metoda. Nejnázornějším tělesem[11] je úseč rotačního paraboloidu. Její objem je roven $\frac{3}{2}$ vepsaného kužele. Řez vedoucí osou a vrcholem kužele i paraboloidu je uveden na obrázku.



Z vlastností paraboly plyne, že

$$\frac{AD}{AS} = \frac{DB^2}{SX^2}.$$

Tuto rovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$AD \cdot (\text{kruh } SX \text{ v paraboloidu}) = AS \cdot (\text{kruh } SM \text{ ve válci}),$$

což můžeme interpretovat jako vztah rovnováhy na páce

$$r_1 \cdot m_1 = r_2 \cdot m_2.$$

Jelikož jsme brali libovolný řez, tak předchozí vztah platí pro každý řez (tedy „pro všechny řezy", které vlastně tvoří celý válec, resp. celou úseč paraboloidu). Takže paraboloid umístěný v Q (jelikož $AD = AQ$) vyváží válec setrvávající na místě (tj. umístěný ve svém těžišti K). Odtud již dostáváme poměrně elegantně formulovaný výsledek:

$$\text{paraboloid} = \frac{AK}{AD} \cdot \text{válec} = \frac{1}{2} \text{ válce} = \frac{3}{2} \text{ kuželu.}$$

[11] Jelikož se připravuje vydání úplného překladu Archimédovy *Metody* včetně podrobného matematického komentáře, uvádíme pouze jeden ilustrační příklad.