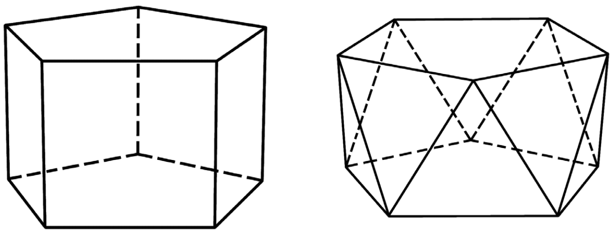
POLOPRAVIDELNÁ TĚLESA

Vlasta Moravcová

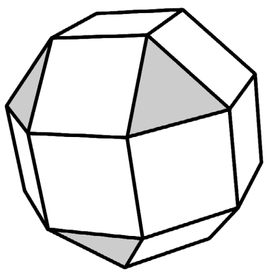
Archimédovými polopravidelnými tělesy nazýváme třináct těles, která patří mezi polopravidelné mnohostěny.

Polopravidelným mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož stěnami jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky dvou nebo tří typů, přičemž v každém vrcholu se setkává ve stejném pořadí stejný počet stěn téhož typu.



Obr. 1: Pětiboký hranol a antihranol jako polopravidelná tělesa.

Kromě Archimédových těles patří mezi polopravidelné mnohostěny také speciální hranoly[1] a antihranoly[2] (obr. 1), kterých je nekonečně mnoho. Občas se k polopravidelným mnohostěnům řadí také tzv. Aškinuzeho těleso[3] (obr. 2).



Obr. 2: Aškinuzeho/Millerovo/Johnsonovo těleso.

[1] Pravidelné kolmé n-boké hranoly s výškou rovnou délce podstavné hrany. Povrch tedy tvoří dvě podstavy (pravidelné n-úhelníky) a n bočních stěn (čtverců).

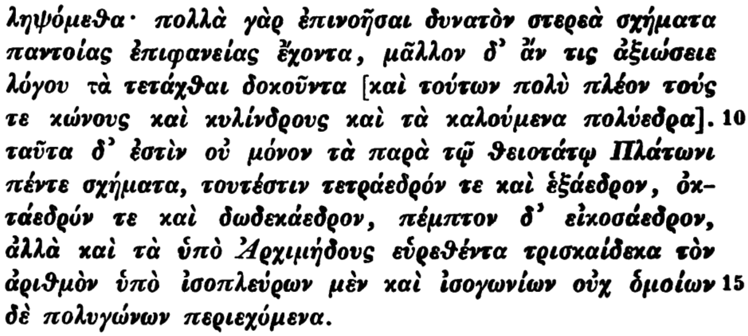
[2] Horní podstavu pravidelného kolmého n-bokého hranolu pootočíme o úhel $\frac{\pi}{n}$ okolo osy hranolu, doplníme n bočních hran tak, aby po stranách vznikly trojúhelníky, a upravíme výšku tak, aby tyto trojúhelníky byly rovnostranné.

[3] Toto těleso, které je uváděno pod různými názvy podle svých objevitelů (též Millerovo nebo Johnsonovo) bylo popsáno až v polovině 20. století. Jedná se o těleso, které vznikne malou úpravou jednoho z Archimédových těles (pootočením několika stěn vůči ostatním). Aškinuzeho těleso sice splňuje definici polopravidelného mnohostěnu (a proto bývá někdy označováno jako čtrnácté Archimédovo těleso), avšak nemá takové symetrické vlastnosti jako zbývajících třináct mnohostěnů. Více viz [Cro], str. 91.

Archimédova tělesa nazýváme podle řeckého matematika Archiméda ze Syrákús, jelikož právě jemu je připisován jejich objev. Archimédovo pojednání o polopravidelných tělesech se bohužel nedochovalo, avšak zmínku o jeho existenci nalézáme v díle Pappa Alexandrijského (3. století n. l.), který v 5. knize *Synagógé* [*Sbírka*] píše [Pap]:[4]

I když si můžeme představit mnohá tělesa s rozličnými povrchy, tak se domníváme, že spíše jsou hodna zmínky ta, která jsou pravidelně uspořádána. Není to pouze těch pět těles, která nacházíme u božského Platóna, tj. čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a pátý dvacetistěn, ale také třináct těles objevených Archimédem, která jsou ohraničena pravidelnými, avšak ne podobnými mnohoúhelníky …

Pappův text pokračuje výčtem jednotlivých těles s popisem, které stěny tvoří povrch těchto těles.


ληψόμεθα· πολλὰ γὰρ ἐπινοῆσαι δυνατὸν στερεὰ σχήματα παντοίας ἐπιφανείας ἔχοντα, μᾶλλον δ' ἄν τις ἀξιώσειε λόγου τὰ τετάχθαι δοκοῦντα [καὶ τούτων πολὺ πλέον τούς τε κώνους καὶ κυλίνδρους καὶ τὰ καλούμενα πολύεδρα]. ταῦτα δ' ἐστὶν οὐ μόνον τὰ παρὰ τῷ θειοτάτῳ Πλάτωνι πέντε σχήματα, τουτέστιν τετράεδρόν τε καὶ ἑξάεδρον, ὀκτάεδρόν τε καὶ δωδεκάεδρον, πέμπτον δ' εἰκοσάεδρον, ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα τρισκαίδεκα τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ ἰσοπλεύρων μὲν καὶ ἰσογωνίων οὐχ ὁμοίων δὲ πολυγώνων περιεχόμενα.

Obr. 3: Pappova zmínka o existenci Archimédových těles v kritickém vydání Pappova díla pořízeného F. Hultschem (viz [Pap]).

1 Přehled Archimédových mnohostěnů

V tabulce na následující straně je souhrnný přehled třinácti Archimédových mnohostěnů (obr. 4, 5, 6) a jejich základních vlastností. Současné nejběžněji používané anglické názvy vycházejí z latinských názvů Johanna Keplera (viz obr. 20). V tabulce je u každého tělesa uveden anglický název. Názvy se do češtiny zpravidla nepřekládají, častěji se pro jednotlivá tělesa používá symbolické označení P_k, kde hodnota k odpovídá pořadí, ve kterém uvedl tělesa Pappos Alexandrijský.

Dále je v tabulce uveden počet vrcholů v, počet hran h a počet stěn s všech těles. Jednotlivé členy p_q součtů ve sloupci „Druhy stěn“ označují, že se na povrchu daného tělesa vyskytuje p pravidelných q-úhelníků. Například zápis $4_3 + 4_6$ znamená, že povrch tělesa tvoří 4 rovnostranné trojúhelníky a čtyři

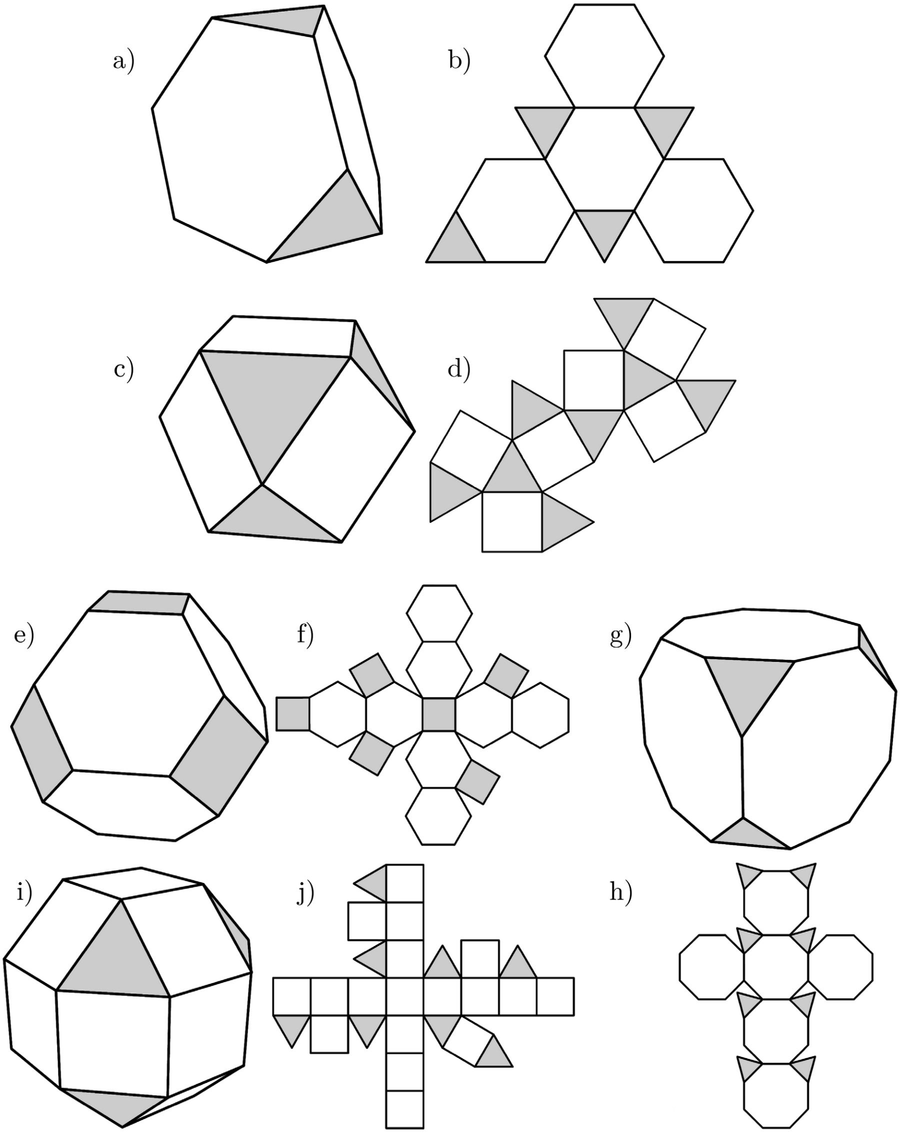
[4] Citace ze starých děl z uvedených zdrojů přeložila a v zájmu srozumitelnosti přizpůsobila současné češtině autorka článku.

pravidelné šestiúhelníky. Počet čísel v závorce ve sloupci „Typ vrcholu“ odpovídá počtu stěn, které se stýkají v jednom vrcholu, a hodnoty těchto čísel udávají, kolikaúhelníkové tyto stěny jsou a v jakém pořadí obklopují každý vrchol. Například zápis (3, 4, 3, 4) znamená, že se v každém vrcholu potkávají rovnostranný trojúhelník, čtverec, další rovnostranný trojúhelník a další čtverec v tomto pořadí.

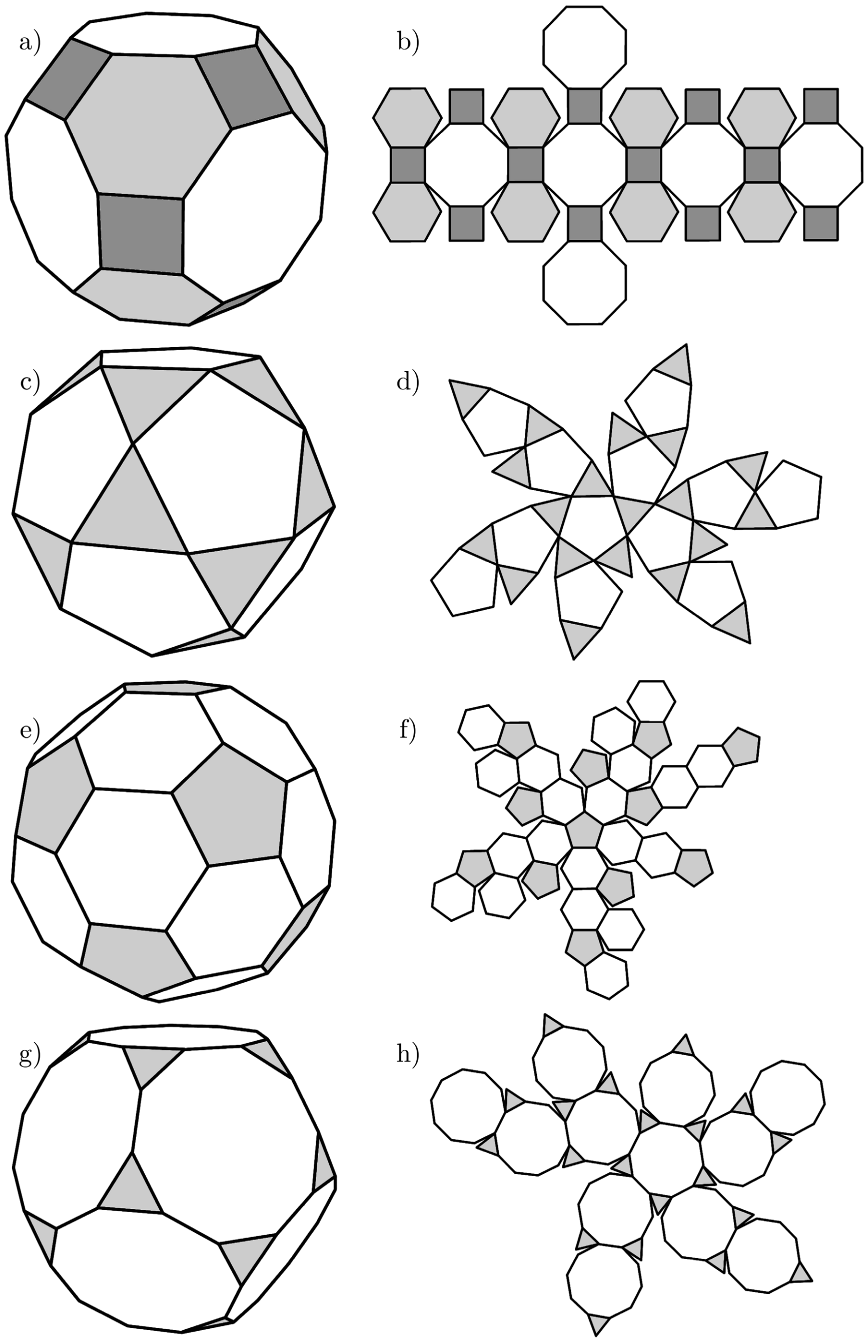
Další vlastnosti těchto těles (poloměry opsaných kulových ploch, kartézské souřadnice vrcholů apod.) lze najít na mnoha webových stránkách.[5]

P_x	Název	v	h	s	Druhy stěn	Typ vrcholu
P_1	Truncated tetrahedron	12	18	8	$4_3 + 4_6$	(3, 6, 6)
P_2	Cuboctahedron	12	24	14	$8_3 + 6_4$	(3, 4, 3, 4)
P_3	Truncated octahedron	24	36	14	$6_4 + 8_6$	(4, 6, 6)
P_4	Truncated hexahedron	24	36	14	$8_3 + 6_8$	(3, 8, 8)
P_5	Rhombicub-octahedron	24	48	26	$8_3 + 18_4$	(3, 4, 4, 4)
P_6	Truncated cuboctahedron	48	72	26	$12_4 + 8_6 + 6_8$	(4, 6, 8)
P_7	Icosidodeca-hedron	30	60	32	$20_3 + 12_5$	(3, 5, 3, 5)
P_8	Truncated icosahedron	60	90	32	$12_5 + 20_6$	(5, 6, 6)
P_9	Truncated dodecahedron	60	90	32	$20_3 + 12_{10}$	(3, 10, 10)
P_{10}	Snub hexahedron	24	60	38	$32_3 + 6_4$	(3, 3, 3, 3, 4)
P_{11}	Rhombicosi-dodecahedron	60	120	62	$20_3 + 30_4 + 12_5$	(3, 4, 5, 4)
P_{12}	Truncated ico-sidodecahedron	120	180	62	$30_4 + 20_6 + 12_{10}$	(4, 6, 10)
P_{13}	Snub dodecahedron	60	150	92	$80_3 + 12_5$	(3, 3, 3, 3, 5)

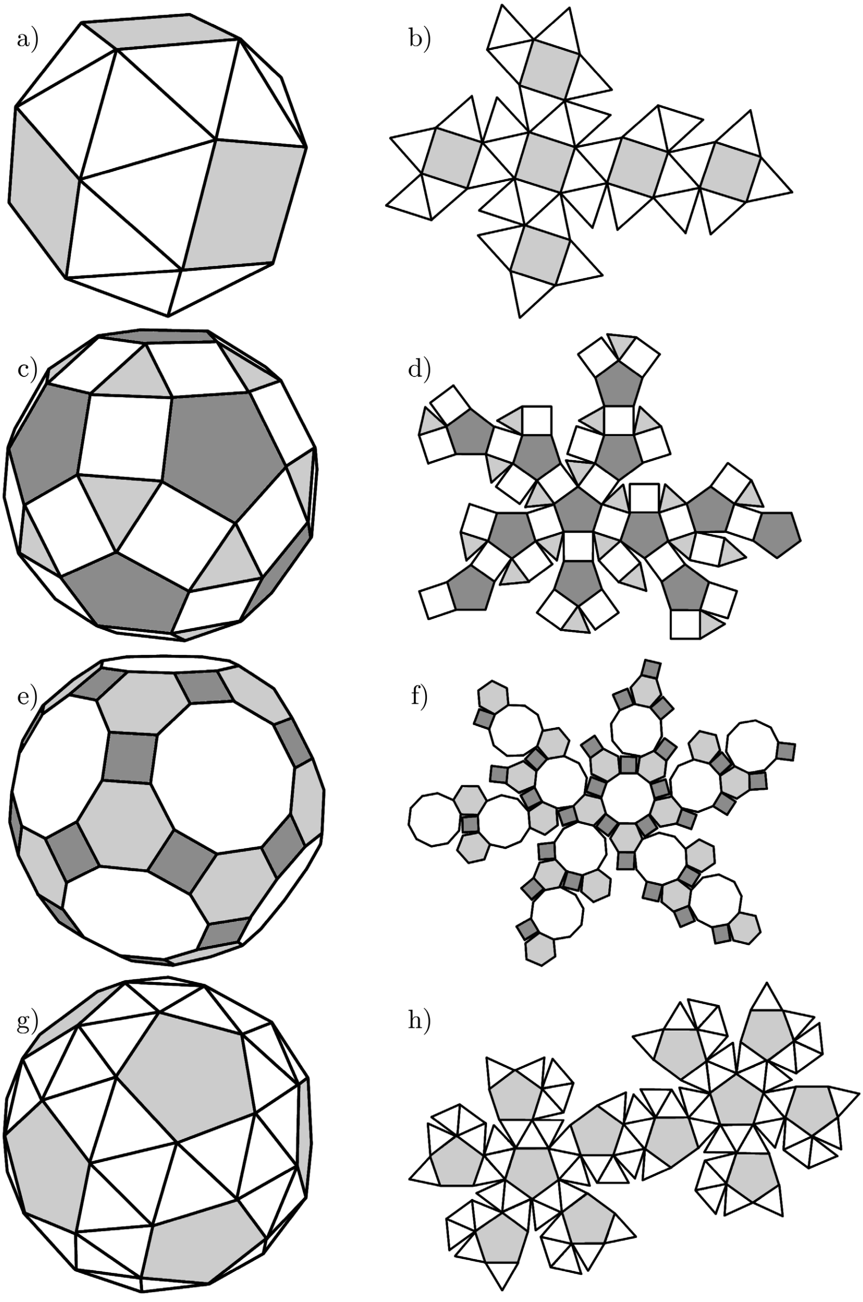
[5] Například na stránce http://en.wikipedia.org/wiki/Semiregular_polyhedron nebo na http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html.



Obr. 4: a) Těleso P_1, b) síť tělesa P_1, c) těleso P_2, d) síť tělesa P_2, e) těleso P_3, f) síť tělesa P_3, g) těleso P_4, h) síť tělesa P_4, i) těleso P_5, jeho úpravou získáme těleso na obr. 2, j) síť tělesa P_5.



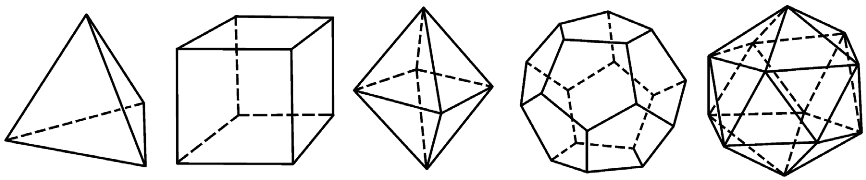
Obr. 5: a) Těleso P_6, b) síť tělesa P_6, c) těleso P_7, d) síť tělesa P_7, e) těleso P_8, f) síť tělesa P_8, g) těleso P_9, h) síť tělesa P_9.



Obr. 6: a) Těleso P_{10}, b) síť tělesa P_{10}, c) těleso P_{11}, d) síť tělesa P_{11}, e) těleso P_{12}, f) síť tělesa P_{12}, g) těleso P_{13}, h) síť tělesa P_{13}.

2 Odvození Archimédových těles z pravidelných mnohostěnů

Všechna Archimédova tělesa lze odvodit z pravidelných (též platónských) mnohostěnů (obr. 7) ořezáním vrcholů nebo hran vhodnými rovinami. Pravidelných těles je právě pět: pravidelný čtyřstěn (tetraedr), pravidelný šestistěn neboli krychle (hexaedr), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr). Těmito tělesy se zabývali již ve 4. století př. n. l. Theaitétos a Platón. Také je jim věnována 13. kniha Eukleidových *Základů*.

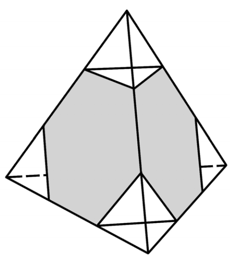


Obr. 7: Tetraedr, hexaedr, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr.

Každé Archimédovo těleso lze odvodit z některého pravidelného mnohostěnu jedním (nebo více) z pěti následujících způsobů. Způsoby a) až d) jsou založené pouze na myšlence odřezávání vrcholů nebo hran pravidelných těles. Způsob e) je složitější, kombinuje myšlenku ořezávání původních těles s otáčením nově vzniklých stěn. Archimédovy mnohostěny lze tedy tvořit:[6]

a) Odříznutím vrcholů pravidelného mnohostěnu rovinami, které zkrátí každou hranu tak, aby z původních n-úhelníkových stěn zbyly pravidelné $2n$-úhelníkové stěny (přičemž je jich stejný počet). Namísto každého vrcholu pravidelného mnohostěnu vznikne pravidelný m-úhelník.

   Takto získáme těleso P_1 z tetraedru (obr. 8),[7] těleso P_3 z oktaedru, těleso P_4 z hexaedru, těleso P_8 z ikosaedru a těleso P_9 z dodekaedru.



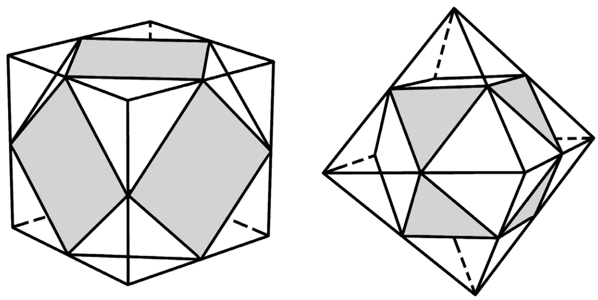
Obr. 8: Vznik tělesa P_1 z tetraedru.

[6] V popisech jednotlivých způsobů odvození Archimédových těles značí n počet vrcholů jedné stěny pravidelného mnohostěnu a m počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu z něhož vycházíme.

[7] V obrázcích 8 až 12 jsou šedě obarveny ty stěny Archimédova tělesa, které leží ve stěnách původního pravidelného mnohostěnu.

b) Odříznutím vrcholů pravidelného mnohostěnu rovinami, které procházejí středy hran sbíhajících se v jednom vrcholu tohoto mnohostěnu. Z původních n-úhelníkových stěn vzniknou menší pravidelné n-úhelníky. Místo každého vrcholu pravidelného mnohostěnu vznikne opět pravidelný m-úhelník.

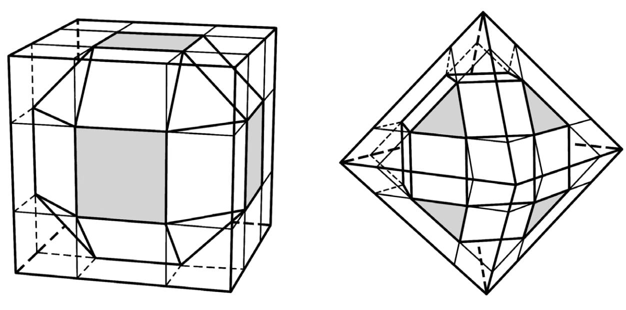
Takto získáme těleso P_2 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 9) a těleso P_7 z dodekaedru nebo ikosaedru. Pokud bychom tímto způsobem oddělili vrcholy tetraedru, vznikl by oktaedr.[8]



Obr. 9: Vznik tělesa P_2 z hexaedru nebo oktaedru.

c) Odříznutím hran pravidelného mnohostěnu rovinami rovnoběžnými s jeho hranami tak, aby z původních n-úhelníkových stěn vznikly menší pravidelné n-úhelníky, místo každé hrany vznikl čtverec a místo původních vrcholů vznikly pravidelné m-úhelníky.

Takto získáme těleso P_5 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 10) a těleso P_{11} z dodekaedru nebo ikosaedru. Při stejném postupu aplikovaném na tetraedr bychom získali již známé těleso P_2, které lze zkonstruovat snadněji postupem b).

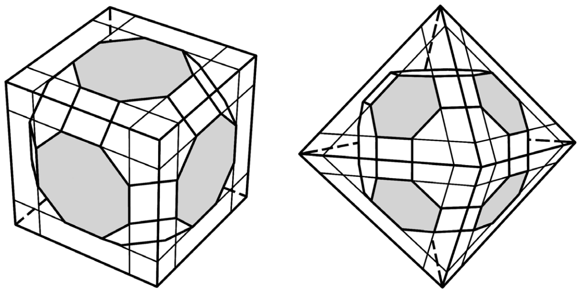


Obr. 10: Vznik tělesa P_5 z hexaedru nebo oktaedru.

[8] Skutečnost, že jedním způsobem lze odvodit totéž těleso ze dvou různých pravidelných mnohostěnů, souvisí s dualitou těchto mnohostěnů. Dva mnohostěny se nazývají duální, pokud je lze do sebe navzájem vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn tělesa druhého. Hexaedr s oktaedrem a dodekaedr s ikosaedrem jsou dvojice duálních těles. Tetraedr je duální sám se sebou.

d) Odříznutím hran pravidelného mnohostěnu rovinami rovnoběžnými s těmito hranami tak, aby z původních n-úhelníkových stěn vznikly menší pravidelné n-úhelníkové stěny, a následným odříznutí vrcholů tak, aby z menších n-úhelníkových stěn vznikly pravidelné $2n$-úhelníky. Místo původních hran doplníme čtverce, místo původních vrcholů vzniknou nové $2m$-úhelníky.

Takto získáme těleso P_6 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 11) a těleso P_{12} z dodekaedru nebo ikosaedru.



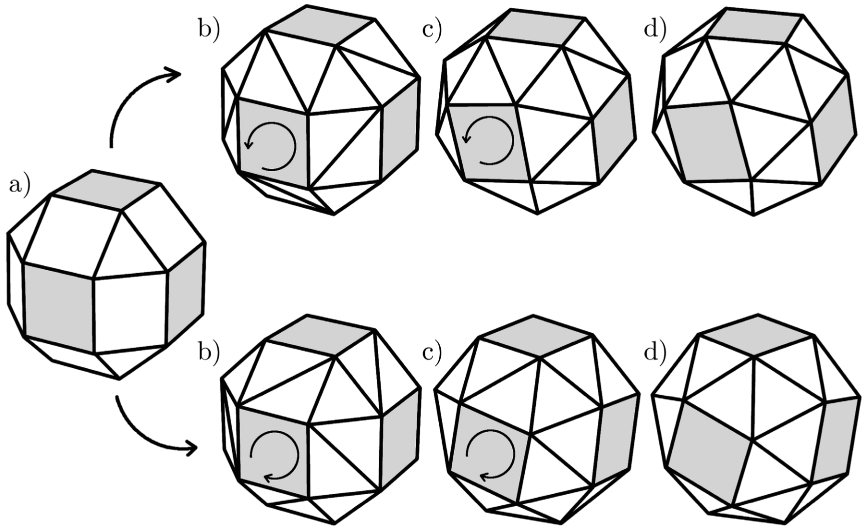
Obr. 11: Vznik tělesa P_6 z hexaedru nebo oktaedru.

e) Zbývající tělesa – P_{10} a P_{13} – již nelze vytvořit tak snadno.

Vznik tělesa P_{10} si můžeme představit takto: Sestrojíme nejprve z hexaedru (resp. oktaedru) těleso P_5 (obr. 12a). Čtverce, které vznikly namísto původních hran hexaedru, rozdělíme úhlopříčkou vždy na dva rovnoramenné trojúhelníky (obr. 12b). Nyní máme těleso, jehož povrch tvoří takový počet čtverců a trojúhelníků, který bychom potřebovali (avšak dvojice některých trojúhelníků leží v jedné rovině a navíc se nejedná o rovnostranné trojúhelníky). Nyní necháme rotovat čtverce v jejich rovinách okolo jejich středů, přičemž současně s nimi se budou ve svých rovinách okolo svých středů otáčet i rovnostranné trojúhelníky, které již na povrchu tělesa leží (obr. 12c), a to do takové polohy, kdy se delší hrany v rovnoramenných trojúhelnících zkrátí tak, že tyto trojúhelníky přejdou v trojúhelníky rovnostranné (obr. 12d). Celý postup lze provést dvěma způsoby, získáme tak dvě formy mnohostěnu P_{10} – levou a pravou (tyto dvě formy jsou v prostoru nepřímo shodné).[9]

Těleso P_{13} lze vytvořit z tělesa P_{11} obdobným způsobem, přičemž je třeba nechat rotovat pětiúhelníkové stěny spolu s rovnostrannými trojúhelníky a přitom čtverce na povrchu tělesa P_{11} rozdělit opět úhlopříčkou na dva trojúhelníky.

[9] Tento postup je názornější při zhlédnutí animace – na internetu je k dispozici animace v Cabri3D na http://gallery.cabri.com/en/snubCube.html.



Obr. 12: Vznik tělesa P_{10} z hexaedru; v horním řádku levá forma, v dolním pravá forma.

3 Znovuobjevování Archimédových těles

Kromě již zmíněného Pappova díla není známo, že by o Archimédových mnohostěnech byla dochována nějaká jiná písemná zmínka evropského původu starší než z 15. století.[10] V renesanci se však v několika dílech matematiků a výtvarníků postupně objevují popisy a nákresy některých ze třinácti Archimédových těles.

Prvními takovými pracemi jsou dva rukopisy Piera della Francesca[11] *Trattato d'abaco* [*Pojednání o abaku*] a *Libellus de quinque corporibus regularibus* [*Knížka o pěti pravidelných tělesech*]. Obě práce vyšly pod jeho jménem tiskem až ve 20. století,[12] byly však sepsány někdy před rokem 1482.

V díle *Trattato d'abaco* se autor věnuje mimo jiné pravidelnému čtyřstěnu a krychli (s odkazem na 13. knihu Eukleidových *Základů*) a jejich vepisování do kulové plochy. Vzápětí formuluje následující dvě úlohy:[13]

---

[10] V arabském světě byl ve 13. století vytvořen dodatek (tzv. XVI. kniha) k Eukleidovým *Základům*, v němž jsou popsány konstrukce polopravidelných mnohostěnů. Toto dílo se však dochovalo jen v jediném exempláři.

[11] Piero della Francesca (?1416/7–1492) byl italský malíř, jeden z představitelů rané renesance. Zabýval se matematikou a geometrií, studoval perspektivu.

[12] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco: Dal Codice Ashburnhamiano 280 (359*.291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze*, ed. G. Nicco Fasola, Florence, 1942; Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, eds. M. Dalai Emiliani, C. Grayson, C. Maccagni et al., Florence, 1995.

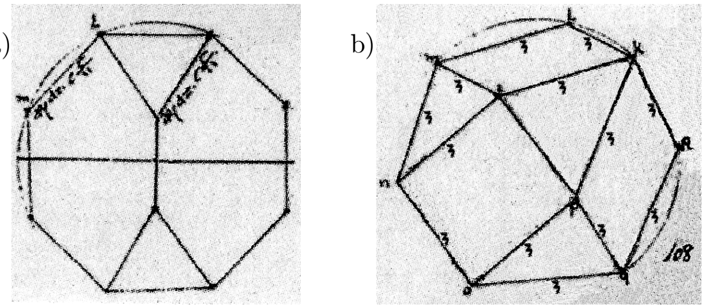
[13] Podle [Fie], str. 248.

Je dána kulová plocha o průměru 6. Vepište do této kulové plochy těleso o osmi stěnách – čtyřech trojúhelnících a čtyřech čtvercích – s navzájem shodnými hranami. Jaká bude délka hrany takového tělesa?

Je dána kulová plocha o průměru 6. Vepište do této kulové plochy těleso o čtrnácti stěnách – šesti čtvercích a osmi trojúhelnících – s navzájem shodnými hranami. Jaká bude délka hrany takového tělesa?

V prvním případě je hledaným tělesem Archimédův mnohostěn P_1. Piero della Francesca svou úlohu provází obrázkem (obr. 13a). V druhém případě se jedná o těleso P_2. Zadání této úlohy je rovněž doplněno obrázkem (obr. 13b) a navíc vysvětlením, že toto těleso získáme ořezáním krychle rovinami procházejícími středy hran krychle.

a) b)



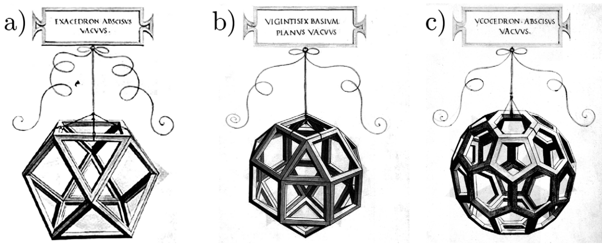
Obr. 13: Konstrukce Piera della Francesca: a) těleso P_1, b) těleso P_2.

V díle *Libellus de quinque corporibus regularibus* Piero della Francesca popisuje dokonce pět polopravidelných mnohostěnů – opět P_1 a dále P_3, P_4, P_8 a P_9, tedy všechna tělesa, která lze vytvořit jednoduchým ořezáním vrcholů pravidelných mnohostěnů, viz způsob a) na str. 75. U každého tělesa odvozuje, v jakém poměru je třeba rozdělit hranu původního pravidelného mnohostěnu na tři díly, aby z n-úhelníkových stěn vznikly pravidelné $2n$-úhelníky. Zatímco u mnohostěnů P_1, P_3 a P_8 je odvození snadné (původní hranu dělíme na tři shodné úsečky), u těles P_4 a P_9 autor uvádí dlouhé a podrobné výpočty, jak vytvořit ze čtverce pravidelný osmiúhelník a z pravidelného pětiúhelníku pravidelný desetiúhelník.

Jen několik let po sepsání výše uvedených rukopisů vyšla tiskem práce *De divina proportione* [*O božském poměru*] (Venice, 1509) od Luca Pacioliho.[14] V tomto díle je popsáno šest Archimédových mnohostěnů, z nichž čtyři (P_1, P_2, P_3 a P_8) znal Pacioli z rukopisů Piera della Francesca.[15] Ilustrace vytvořil Leonardo da Vinci (1452–1519).

[14] Luca Pacioli (1445–?1514/7) byl italský františkánský mnich a matematik. Je znám především jako autor knihy *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (Venice, 1494), v níž shrnul matematické znalosti své doby.

[15] Luca Pacioli byl žákem Piera della Francesca a je známo, že Pacioli ve svých dílech použil mnoho myšlenek a textů svého učitele.

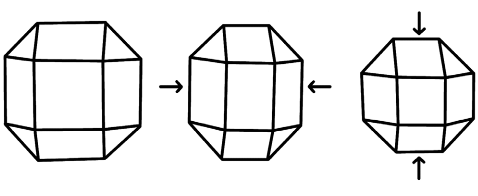


Obr. 14: Ilustrace Leonarda da Vinciho v Pacioliho díle
De divina proportione: a) těleso P_2, b) těleso P_5, c) těleso P_8.

Pacioli popisuje tělesa o něco podrobněji než Piero della Francesca, avšak z dnešního pohledu poměrně kostrbatě. Například vzhled tělesa P_2 vysvětluje následovně:[16]

Toto těleso vzniklé ořezáním krychle má 24 hran určujících 48 rovinných úhlů [vnitřní úhly stěn], *z nichž 24 je pravých a zbylé jsou ostré. Těleso má 12 vrcholů a jeho povrch tvoří 14 stěn – 6 čtverců a 8 trojúhelníků, přičemž každá strana čtverce je současně stranou trojúhelníku. Těleso vznikne ořezáním krychle skrz středy hran, jak je vidět na obrázku* [(obr. 14a)].

Dále Pacioli popisuje mnohostěny P_5 a P_7 jako tělesa odvozená stejným způsobem (tj. půlením hran) dodekaedru a mnohostěnu P_2. V tomto postupu konstrukce tělesa P_5 je však problém. Pokud ořežeme vrcholy mnohostěnu P_2 rovinami procházejícími středy hran, získáme mnohostěn, který těleso P_5 sice připomíná, ale nejedná se přímo o ně. Ořezáním vrcholů tělesa P_2 nevzniknou na povrchu čtverce, jak bychom si přáli, ale obdélníky. Z tohoto „nepravého“ tělesa P_5 lze to správné vytvořit poměrně snadno pomocí dvou prostorových transformací – „stlačením“ v horizontálním a vertikálním směru (obr. 15). Otázkou je, zda si byl Pacioli tohoto omylu vědom, jelikož se o něm v textu nezmiňuje, avšak da Vinciho ilustrace zobrazuje skutečně těleso P_5 (obr. 14b).



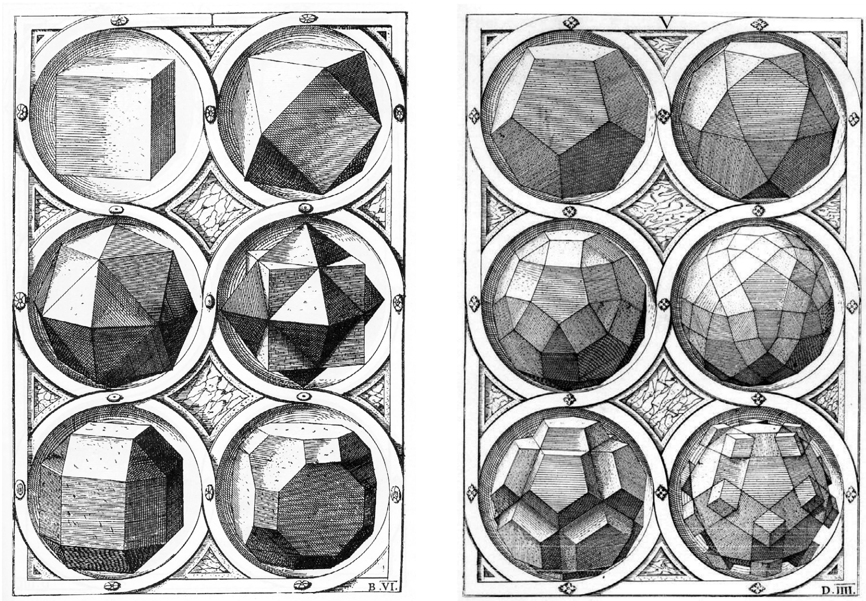
Obr. 15: Vytvoření tělesa P_5 z mnohostěnu, který popsal Pacioli.

Těleso, které Luca Pacioli ve skutečnosti popsal (tedy to, které získáme ořezáním vrcholů mnohostěnu P_2), zobrazil správně o necelých šedesát let později Wentzel Jamnitzer[17] ve svém díle *Perspectiva corporum regularium* [*Perspek-*

[16] Podle [Fie], str. 254.

[17] Wentzel Jamnitzer (1508–1585) byl německý zlatník a malíř. Zajímal se o geometrii, zejména perspektivu a její užití v malířství.

tiva pravidelných těles] (Nürnberg, 1568), v němž se nezabýval cíleně polopravidelnými mnohostěny, ale mnohostěny, které lze nějak odvodit z jednoho pravidelného tělesa například ořezáváním vrcholů nebo průnikem s dalším pravidelným tělesem (obr. 16).

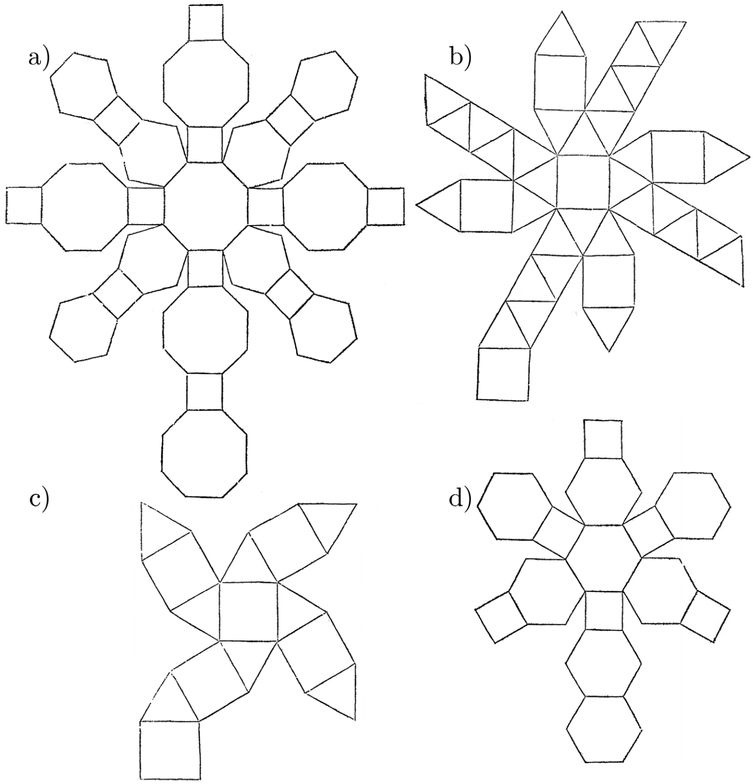


Obr. 16: Ukázka dvou stránek z Jamnitzerovy *Perspectiva corporum regularium*. Ořezaný mnohostěn P_2 je vlevo dole.

Další významnou osobností zabývající se polopravidelnými mnohostěny byl Albrecht Dürer.[18] V prvním vydání svého rozsáhlého díla *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* [*Pojednání o měření kružítkem a pravítkem na přímkách, v rovinách a tělesech*] (Nürnberg, 1525) představil sedm Archimédových těles, z nichž dvě (P_6, P_{10}) nemohl znát z prací svých renesančních předchůdců. Těmi dalšími jsou tělesa P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5.

Dürer však použil zcela novou metodu objevování těchto těles, a sice prostřednictvím jejich sítí. Vyšel od jednoho z pravidelných mnohoúhelníků a přikresloval k jeho stranám souměrně do všech stran další a další pravidelné mnohoúhelníky (obr. 17). Správnost svých sítí Dürer pravděpodobně testoval jejich skládáním (jak napovídá jeho popis jednotlivých těles).

[18] Albrecht Dürer (1471–1528) byl německý malíř, grafik a matematik. Vytvořil přes tisíc uměleckých děl (kresby, malby, rytiny atd.). V oblasti matematiky se zabýval především geometrií. Své poznatky shrnul v díle *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* (Nürnberg, 1525), což byla první práce tohoto druhu v němčině. Známá je též jeho práce *Vier Bücher von menslicher Proportion* [*Čtyři knihy o lidských proporcích*] (Nürnberg, 1528).

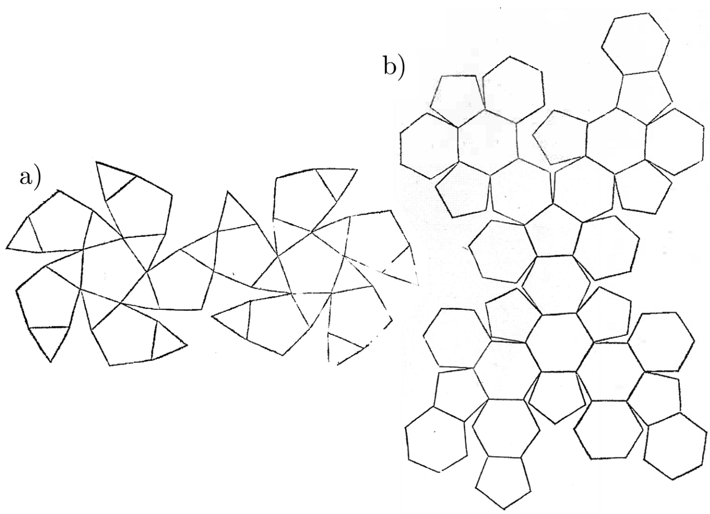


Obr. 17: Ukázky Dürerových sítí: a) síť tělesa P_6, b) síť tělesa P_{10}, c) síť tělesa P_2, d) síť tělesa P_3.

Dürerův způsob popisu jednotlivých polopravidelných těles si ukážeme na mnohostěnu P_6 [Dür1]:

Toto těleso má 6 osmiúhelníkových, 8 šestiúhelníkových a 12 čtyřúhelníkových stěn. Pokud je složíme, získáme 48 vrcholů a 72 hran.

Field ve svém článku [Fie], str. 269, považuje za pravděpodobné, že Dürer touto metodou objevil i sítě dalších polopravidelných mnohostěnů. Vyhnul se však konstrukci sítí těch těles, jejichž stěny tvoří pravidelné pětiúhelníky nebo desetiúhelníky, jelikož prosazoval konstrukce pouze pomocí pravítka a kružítka a konstrukce pravidelného pětiúhelníku či desetiúhelníku je za těchto podmínek o něco pracnější, a proto by v případě sítí, kde je třeba takových mnohoúhelníků narýsovat více, mohla vést k nepřesnostem v rýsování. Ve druhém vydání Dürerovy práce *Underweysung der Messung* ... (Nürnberg, 1538) jsou však vyobrazeny sítě dalších dvou Archimédových těles – P_7 a P_8 (obr. 18), na jejichž povrchu pravidelné pětiúhelníky jsou. Zřejmě se tedy Dürer konstrukci více pravidelných pětiúhelníků v jednom obrázku nevyhýbal a zmíněná tělesa jsou všechna, o nichž Dürer věděl.



Obr. 18: Dürerovy sítě z druhého vydání díla *Underweysung der Messung ...* a) síť tělesa P_7, b) síť tělesa P_8.

Ve znovuobjevování Archimédových mnohostěnů nejdále[19] z renesančních umělců pokročil Daniele Barbaro,[20] který v práci *La Pratica della perspettiva* [*Užití perspektivy*] (Venice, 1568) znázornil a popsal jedenáct Archimédových mnohostěnů, z nichž devět (P_1 až P_9) se objevilo již v dřívějších dílech a dvě (P_{11} a P_{12}) byla nová.

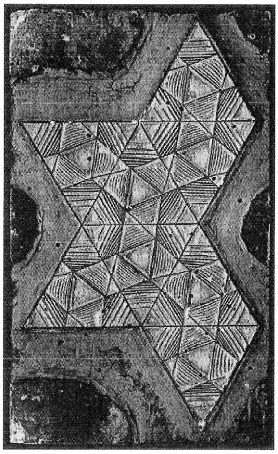
Barbaro byl více výtvarník než matematik. Jednotlivá polopravidelná tělesa popsal jen velmi jednoduše. Striktně se držel metody ořezávání pravidelných mnohostěnů. To je pravděpodobně důvodem, proč nepopsal také těleso P_{10}, které mohl znát z Dürerovy práce. Toto těleso totiž, jak bylo výše uvedeno, nelze jednoduchým ořezáním pravidelného mnohostěnu vytvořit.

Při konstrukci těles P_5 a P_{11} se Barbaro dopustil stejného omylu jako Pacioli. Těleso P_5 popsal jako mnohostěn, který získáme ořezáním vrcholů (rovinami vedenými středy hran) tělesa P_2, a těleso P_{11} popsal chybně jako mnohostěn, který získáme obdobným ořezáním vrcholů tělesa P_7.

[19] Nejdále ve smyslu vyobrazení i slovního popisu těles. V článku [SFS] je popsáno 40 dřevorytin vytvořených pravděpodobně mezi lety 1538 až 1556 (tedy někdy po vydání Dürerova *Underweysung ...* , ale ještě před vydáním Barbarovy práce), na nichž jsou vyobrazeny sítě všech pravidelných a Archimédových mnohostěnů (obr. 19). Není jasné, kdo je autorem těchto rytin, ani zda byly připraveny jako ilustrace k nějakému textu. Nicméně kromě sítí jako takových znázorňují i postupy, jak polopravidelné mnohostěny vznikají z mnohostěnů pravidelných (sítě polopravidelných těles jsou vepsané do sítí těles pravidelných, takže je vlastně v obrázcích naznačeno ořezávání pravidelných mnohostěnů). O těchto rytinách se další autoři nezmiňují. Je-li však správně určeno období jejich vzniku, pak se pravděpodobně jedná o nejstarší dochované vyobrazení sítí všech Archimédových mnohostěnů.

[20] Daniele Barbaro (1514–1570) byl italský filosof a matematik. Je znám svým komentovaným překladem Vitruviova díla (Marcus Vitruvius Polio: *De architectura*, 1. století př. n. l.) do italštiny.

Kromě polopravidelných těles odvodil Barbaro metodou ořezávání vrcholů i další mnohostěny, které mají vrcholy různých typů.



Obr. 19: Dřevorytina neznámého autora zobrazující síť oktaedru s naznačením, jak vytvořit těleso P_{10}.

Zdá se, že se výše uvedení autoři nesnažili podat kompletní seznam polopravidelných těles. Nezabývali se jejich definicí, někteří byli dokonce přesvědčeni, že je jich nekonečně mnoho. Nikdo z nich neuvedl v souvislosti s těmito mnohostěny jméno Archiméda ze Syrákús nebo Pappa z Alexandrie.

Kompletní přehled polopravidelných těles spolu s jejich definicí podal až Johannes Kepler[21] v díle *Harmonices Mundi* [*Harmonie světa*] (Linz, 1619). V úvodu kapitoly věnované těmto mnohostěnům uvádí, že se jedná o tělesa Archimédova. Tuto informaci zřejmě převzal z Pappova díla, které dobře znal a několikrát se na ně v *Harmonices Mundi* odvolává. Kromě Archimédových mnohostěnů popsal jako polopravidelná tělesa též hranoly a antihranoly.

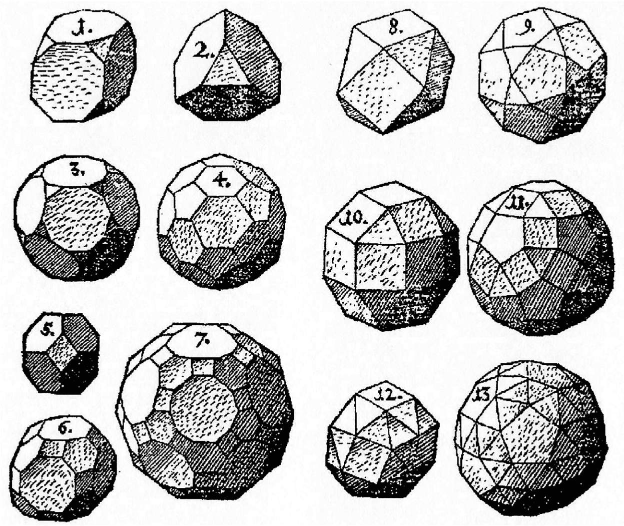
Kepler zkonstruoval všech třináct Archimédových těles tak, že zkoumal všechna možná uspořádání pravidelných mnohoúhelníků okolo jednoho vrcholu mnohostěnu. Všechna přípustná uspořádání stěn kolem vrcholu podrobně diskutoval[22] a pomocí těchto uspořádání také jednotlivá tělesa popisoval. Podívejme se například na Keplerův komentář k mnohostěnu P_5 [Kep], str. 62, kniha II.:

Jeden trojúhelníkový a tři čtyřúhelníkové [úhly] *jsou menší než čtyři pravé* [úhly]. *Takže se spolu pojí osm trojúhelníků a osmnáct (tj. 12 a 6) čtverců a vytvoří jeden Icosihexaedron* [26-stěn], *který nazývám Rhombicuboctaedricus sectus neboli Rhombicuboctaedron.*

[21] Johannes Kepler (1571–1630) byl německý matematik, astrolog a astronom. V letech (1600–1612) působil v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. Je znám především zformulováním tří (Keplerových) zákonů o pohybu nebeských těles.

[22] Keplerův postup zkoumání přípustných typů vrcholů je popsán v [Cro].

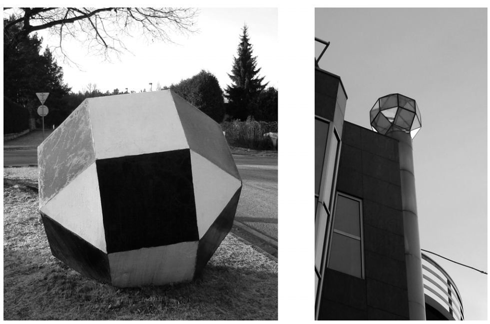
Každé z Archimédových těles je v *Harmonices Mundi* vyobrazeno, tyto ilustrace připravil Wilhelm Shickard (1592–1635). Jednotlivé mnohostěny jsou na obrázku očíslovány, Keplerovo číslování však neodpovídá našemu značení P_k (obr. 20).



Obr. 20: Ilustrace Archimédových mnohostěnů z *Harmonices Mundi*. Johannes Kepler nazval tělesa následovně: (1) cubus truncus, (2) tetraedron truncum, (3) dodecaedron truncum, (4) icosihedron truncum, (5) octaedron truncum, (6) cuboctaedron truncum, (7) icosidodecaedron truncum, (8) cuboctaedron, (9) icosidodecahedron, (10) rhombicuboctaedron, (11) rhombicosidodecaedron, (12) cubus simus, (13) dodecaedron simum.

4 Archimédova tělesa okolo nás

S Archimédovými tělesy (přesněji s modely těchto těles) se setkáváme i v běžném životě, zejména v architektuře.

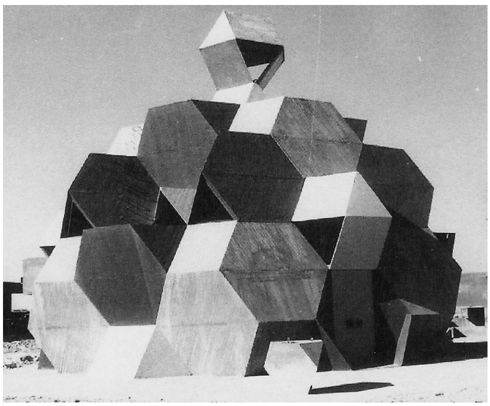


Obr. 21: Model tělesa P_2 v Praze Klánovicích (vlevo) a v Praze v pasáži Archa (vpravo).

V České republice lze najít některé z Archimédových mnohostěnů použité jako dekorativní prvky. Jen v Praze jsou mi známé tři takové situace – plechový model tělesa P_2 o délce hrany asi 80 cm na konečné autobusu v městské části Klánovice (obr. 21), skleněné dekorativní zakončení sloupku tímtéž tělesem v pasáži Archa spojující ulice Na Poříčí a Na Florenci (obr. 21) a tři okrasné skleníky s kopulí ve tvaru tělesa P_8 ve stanici metra Lužiny (obr. 22).

Obr. 22: Těleso P_8 ve stanici pražského metra Lužiny.

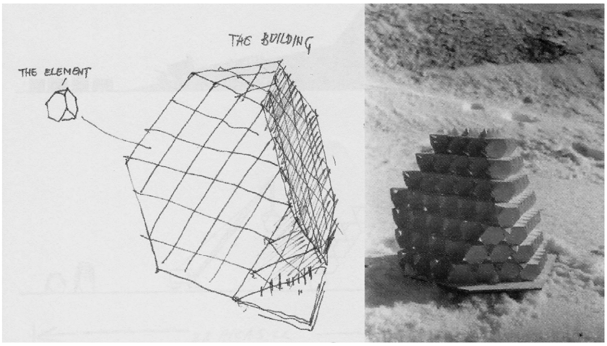
Podobných výjevů bychom jistě našli více. Existují však architekti, kteří práci s (nejen polopravidelnými) mnohostěny dovedli mnohem dál než jen k jejich využití jako dekorativních prvků. Velké nadšení v použití mnohostěnů je zřejmé v díle Alfreda Neumanna[23] a jeho žáků Zvi Heckera a Eldara Sharona.



Obr. 23: Synagoga v izraelské poušti Negev podle návrhu A. Neumanna a Z. Heckera.

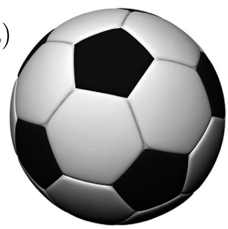
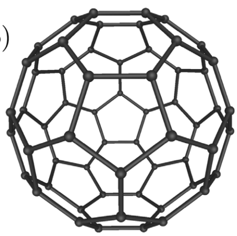
[23] Alfred Neumann (1900–1968) se narodil ve Vídni, část života strávil v Brně (zde studoval na Německé technice), působil ve Vídni, Brně, Paříži a Praze. V roce 1945 byl transportován do Terezína. Po válce se vrátil do Brna a roku 1949 emigroval do Izraele. Zde byl roku 1952 jmenován profesorem architektury na Izraelském institutu techniky v Jeruzalémě. V roce 1966 odešel do Kanady, kde žil až do své smrti. Se svými studenty Zvi Heckerem a Eldarem Sharonem spolupracoval v Izraeli od roku 1959.

Tito tři architekti pracovali společně na několika projektech založených na vhodné kombinaci mnohostěnů. Jejich zájem se dotkl i Archimédových těles. Některé z těchto projektů byly realizovány – např. projekt synagogy ve vojenském prostoru v poušti Negev v Izraeli (obr. 23). Při stavbě byly použity díly ve tvarech Archimédových mnohostěnů P_1, P_2 a P_3. Projekt je z let 1967–69 a podíleli se na něm A. Neumann a Z. Hecker. K zajímavým nerealizovaným projektům patří návrh synagogy (obr. 24) z roku 1966. Tato stavba byla založena na vhodném poskládání mnohostěnů P_1. Jedná se opět o projekt A. Neumanna a Z. Heckera. O díle Alfreda Neumanna a jeho žáků podrobně pojednává práce [Seg].



Obr. 24: Skica a model nerealizovaného projektu.

S Archimédovými tělesy se však setkáme také v jiných oborech. Populárním mnohostěnem je P_8, jehož tvar je základem při výrobě fotbalových míčů, které vznikají sešitím povrchu tělesa – pravidelných pětiúhelníků a šestiúhelníků. Kulatého tvaru je pak dosaženo nafouknutím míče (obr. 25a). Totéž těleso je též dobře známé chemikům, stabilní molekula uhlíku fulleren C_{60} má totiž svých 60 atomů uspořádaných právě ve vrcholech tělesa P_8 (obr. 25b). V chemii však najdeme i další tvary polopravidelných mnohostěnů, viz například článek [Liu] zabývající se supramolekulami, jejichž tvar souvisí s mnohostěnem P_3.

a)  b) 

Obr. 25: a) Fotbalový míč, b) fulleren.