KAPITOLA I.

Přehled některých vět z diferenciálního počtu.

Tato úvodní kapitola obsahuje přehled některých vět, které v dalších kapitolách budeme potřebovati; většina těchto vět je obsažena v Kösslerově „Úvodu do počtu diferenciálního". Mimo to obsahuje tato kapitola též některé doplňky, které v Kösslerově knížce nejsou.

1. Množiny, hlavně množiny číselné. Horní a dolní hranice. Slovem „*množina*" (nebo též „*množství*") označujeme souhrn jakýchkoliv předmětů; jednotlivé předměty této množiny nazývají se jejími „prvky" čili „elementy". Příklady: 1. Množina všech celých čísel kladných, menších než 10: tato množina se skládá z devíti prvků: tyto prvky jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. — 2. Množina všech čísel kladných, menších než 1: prvky jsou všechna čísla x, vyhovující vztahům $0 < x < 1$. — 3. Množina všech bodů v rovině (opatřené dvěma pravoúhlými osami souřadnými x, y), jež leží uvnitř kružnice o poloměru jednotkovém, jež má střed v počátku: prvky této množiny jsou všechny body v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnosti $x^2 + y^2 < 1$. — 4. Množina všech trojúhelníků v rovině R: prvky jsou jednotlivé trojúhelníky, ležící v rovině R.

Množiny, jež mají konečný počet prvků, nazývají se *konečné*; množiny, jež mají nekonečný počet prvků, nazývají se *nekonečné*. V předcházejících čtyřech příkladech byla první množina konečná, ostatní tři nekonečné.[1])

Množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla, budeme nazývati množinami číselnými; a těmi se nyní budeme hlavně zabývati. Příklady:

M_1 budiž množina všech celých kladných čísel. Prvky jsou tedy čísla 1, 2, 3, . . .

---

[1]) Pro zjednodušení zavádíme též pojem „množina prázdná" — to je množina, jež neobsahuje vůbec žádný prvek. Na př. množina všech prvočísel, jež jsou větší než 7 a současně menší než 11, je množina prázdná (neboť mezi 7 a 11 neleží žádné prvočíslo). Množinu, jež není prázdná, nazýváme neprázdnou. V těchto elementárních úvahách nebudeme však pojem množiny prázdné potřebovati.

M_2 budiž množina všech čísel x, jež hoví nerovnostem $0 < x < 1$.

M_3 budiž množina všech čísel celých záporných. Prvky jsou tedy čísla $-1, -2, -3, \ldots$

M_4 budiž množina všech čísel záporných. Prvky jsou tedy všechna čísla $x < 0$.

M_5 budiž množina všech čísel celých. Prvky jsou tedy čísla $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

M_6 budiž množina všech reálných čísel.

M_7 budiž množina všech čísel x, jež hoví vztahům $0 \leqq x \leqq 1$.

M_8 budiž množina, jejíž prvky jsou čísla $1, \sqrt{2}, 3$.

Množina M_8 je konečná, ostatní jsou nekonečné. O číselné množině M říkáme, že je „*shora ohraničena*" (nebo též *shora omezena*), existuje-li číslo K tak, že žádné číslo množiny M není větší než K [2]) (t. j. splňuje-li každý prvek x množiny M vztah $x \leqq K$). Na př. množina M_2 je shora ohraničena, protože žádné její číslo není větší než (třeba) 5; ba dokonce není větší než 1. Rovněž tak žádné číslo množiny M_3 není větší než -1, žádné číslo množiny M_4 není větší než 0 atd. Vidíme, že množiny M_2, M_3, M_4, M_7, M_8 jsou shora ohraničeny, množiny M_1, M_5, M_6 nejsou. Všimněme si ještě, že na př. mezi čísly množiny M_7 je jedno největší, totiž číslo 1 (obdobně u množiny M_3 číslo -1, u množiny M_8 číslo 3); kdežto mezi čísly množiny M_2 není největšího čísla (t. j. žádné číslo množiny M_2 není největším číslem množiny M_2): obdobně je tomu u množin M_1, M_4, M_5, M_6.

Dokážeme nyní velmi důležitou větu, t. zv. *větu o horní hranici*. Je-li totiž M neprázdná množina shora ohraničená, existuje (podle definice) číslo K takové, že žádné číslo množiny M není větší než K. Dokážeme nyní, že mezi všemi čísly K, jež mají tuto vlastnost, existuje jedno, jež je z nich ze všech nejmenší, t. j. dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Buď M neprázdná množina číselná shora ohraničená. Potom existuje jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. Žádné číslo množiny M není větší než G. [3])

---

[2]) Můžeme také říci: číselná množina M je shora ohraničena, existuje-li číslo L, jež je *větší*, než všechna čísla množiny M. Neboť, je-li $x < L$ pro každý prvek x množiny M, je tím spíše $x \leqq L$. Je-li za druhé $x \leqq K$ pro každý prvek x množiny M, můžeme položiti třeba $L = K + 1$ a potom bude $x < L$ pro každý prvek x množiny M. Tento přechod od vztahu $\leqq$ ke vztahu $<$ (a naopak) je tedy zcela samozřejmý a budu ho v dalším často bez zvláštní připomínky užívati. (Obdobně pro $\geqq$ a $>$.)

[3]) T. j.: všechna čísla x množiny M splňují nerovnost $x \leqq G$.

2. Je-li však G' jakékoliv číslo menší než G, potom existuje v množině M aspoň jedno číslo, jež je větší než G'.

Toto číslo G se nazývá horní hranicí množiny M (nebo též supremum množiny M).

Důkaz. Budiž M neprázdná číselná množina shora ohraničená. Dokážeme nejprve, že existuje aspoň jedno číslo G, jež má vlastnosti 1) a 2), uvedené ve větě 1. (Potom dokážeme, že nemůže existovati více než jedno takové číslo.)

Ježto množina M je neprázdná, existuje aspoň jedno číslo x_0, jež patří do množiny M; ježto M je shora ohraničená, existuje aspoň jedno číslo L, jež je větší než všechna čísla množiny M (viz poznámku [2]) pod čarou na str. 10). Čísla x_0, L pevně zvolím. Přiřaďme nyní každému celému kladnému číslu n určité číslo

$$\frac{l_n}{2^n} \text{ (kde } l_n \text{ je celé číslo)}$$

tímto předpisem:

Vezměme (při daném n) všechna čísla $k : 2^n$, kde k probíhá všechna celá čísla, t. j. vezměme čísla

$$\ldots, -\frac{3}{2^n}, -\frac{2}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots$$

Mezi těmito čísly existuje jistě jedno — označme je $k_n : 2^n$ — jež je větší než L; rovněž existuje mezi těmito čísly jedno — označme je $k'_n : 2^n$ — jež je menší než x_0; je tedy

$$\frac{k'_n}{2^n} < x_0 < L < \frac{k_n}{2^n}, \text{ a tedy } k'_n < k_n.$$

Číslo $k'_n : 2^n$ *není* větší než všechna čísla množiny M (neboť je menší než x_0), kdežto číslo $k_n : 2^n$ *je* větší než všechna čísla množiny M (neboť je větší než L). Sestrojím-li tedy všechna čísla tvaru $k : 2^n$, kde k probíhá rostouc po řadě všechna celá čísla od k'_n do k_n, tedy jistě mezi těmito čísly bude jedno *poslední* — označme je $l_n : 2^n$ — které není větší než všechna čísla množiny M, kdežto číslo *následující*, t. j. číslo $(l_n + 1) : 2^n$, už je větší než všechna čísla množiny M. Tím jsme tedy každému celému kladnému číslu n přiřadili určité číslo $l_n : 2^n$; tak dostáváme posloupnost

$$\frac{l_1}{2^1}, \frac{l_2}{2^2}, \frac{l_3}{2^3}, \ldots \tag{1}$$

Tvrdím předně, že tato posloupnost je shora ohraničená (Kössler 22). Budiž totiž $l_n : 2^n$ libovolný člen posloupnosti (1): ježto

$l_n : 2^n$ není větší než všechna čísla množiny M, existuje číslo x v množině M tak, že $x \geq l_n : 2^n$; ale jest $x < L$, takže každý člen posloupnosti (1) splňuje nerovnost $l_n : 2^n < L$.

Za druhé tvrdím, že posloupnost (1) je neklesající, t. j. že je (Kössler 22)

$$\frac{l_1}{2^1} \leq \frac{l_2}{2^2} \leq \frac{l_3}{2^3} \leq \ldots \leq \frac{l_n}{2^n} \leq \frac{l_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \ldots$$

Budiž totiž n libovolné celé kladné číslo. Podle definice čísla l_n existuje číslo x množiny M tak, že $x \geq l_n : 2^n$; podle definice čísla l_{n+1} je číslo $(l_{n+1} + 1) : 2^{n+1}$ větší než všechna čísla množiny M, tedy též větší než x; tedy platí

$$\frac{l_n}{2^n} < \frac{l_{n+1} + 1}{2^{n+1}}, \text{ t. j. } 2l_n < l_{n+1} + 1; \tag{2}$$

ježto l_n, l_{n+1} jsou čísla celá, plyne z (2) nerovnost $2l_n \leq l_{n+1}$ a tedy

$$\frac{l_n}{2^n} \leq \frac{l_{n+1}}{2^{n+1}},$$

jak bylo dokázati. Posloupnost (1) je tedy neklesající a shora ohraničená a má tedy limitu[4]), kterou označíme písmenem G; dokážeme pak, že číslo G má požadované vlastnosti 1), 2). Jest totiž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2^n} = G, \text{a tedy též } \lim_{n\to\infty} \frac{l_n + 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = G. \tag{3}$$

Kdyby existovalo v množině M číslo x_1 větší než G, plynulo by z nerovnosti $x_1 > G$ a z druhé rovnice (3), že by pro jisté vhodně zvolené n bylo $x_1 > (l_n + 1) : 2^n$, což není možno, ježto číslo $(l_n + 1) : 2^n$ je větší než všechna čísla množiny M. Číslo G má tedy vlastnost 1). Budiž za druhé G' libovolné číslo menší než G. Z nerovnosti $G' < G$ a z první rovnice (3) plyne, že pro vhodně zvolené n je $G' < l_n : 2^n$. Ježto číslo $l_n : 2^n$ není větší než všechna čísla množiny M, existuje v množině M aspoň jedno číslo x_2 takové, že $l_n : 2^n \leq x_2$ a tím spíše tedy $G' < x_2$. Je-li tedy G' jakékoliv číslo menší než G, existuje v množině M aspoň jedno číslo větší než G', t. j. číslo G má též vlastnost 2).

Tím je dokázána existence čísla G, jež má vlastnosti 1) a 2). Dokážeme nyní, že takové číslo jest jen jedno. Čili dokážeme: žádné číslo G_1, různé od G, nemůže míti vlastnosti 1) a 2). Neboť,

[4]) Kössler 22.

je-li předně $G_1 < G$, použijeme toho, že číslo G má vlastnost 2): existuje tedy aspoň jedno číslo x v množině M, jež je větší než G_1, a tedy číslo G_1 nemá vlastnost 1). Je-li za druhé $G_1 > G$, použijeme toho, že G má vlastnost 1): žádné číslo množiny M není větší než G, ačkoliv číslo G je menší než G_1; tedy číslo G_1 nemá vlastnost 2).

Tím je věta 1 úplně dokázána.

Poznámka 1. Jestliže jedno z čísel číselné množiny M je největším číslem množiny M, je toto číslo (označme je x_0) horní hranicí množiny M. Neboť číslo x_0 má tyto vlastnosti: 1) Žádné číslo množiny M není větší než x_0. 2) Je-li G' libovolné číslo menší než x_0, potom existuje aspoň jedno číslo množiny M — totiž číslo x_0 — jež je větší než G'.

Jestliže však žádné číslo číselné množiny M není největším číslem množiny M, nemůže horní hranice množiny M býti číslem množiny M; neboť je-li x_1 libovolné číslo množiny M, potom není x_1 největším číslem množiny M a tedy existuje v množině M číslo větší než x_1, takže číslo x_1 nemá vlastnost 1).

Poznámka 2. Jestliže číslo K má tu vlastnost, že žádné číslo neprázdné číselné množiny M není větší než K, potom horní hranice G množiny M[5]) splňuje nerovnost $G \leq K$. Neboť kdyby bylo $K < G$, nemělo by číslo G vlastnost 2), ježto žádné číslo množiny M není větší než K.

Obdobně, jako jsme definovali číselné množiny shora ohraničené, definujeme též množiny zdola ohraničené takto: číselná množina M je *zdola ohraničena* (nebo též *zdola omezena*), existuje-li číslo K tak, že žádné číslo množiny M není menší než K. Platí pak věta zcela obdobná větě 1:

Věta 2. *Budiž M neprázdná množina číselná zdola ohraničená. Potom existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. Žádné číslo množiny M není menší než g.

2. Je-li však g' jakékoliv číslo větší než g, potom existuje v množině M alespoň jedno číslo, jež je menší než g'.

Toto číslo g se nazývá dolní hranicí množiny M (nebo též infimum množiny M).

Platí opět zcela analogické poznámky: jestliže mezi čísly číselné množiny M je jedno nejmenší, je toto nejmenší číslo dolní

[5]) Tato horní hranice existuje, ježto neprázdná číselná množina M je shora ohraničena.

hranicí množiny M. Není-li však žádné číslo množiny M nejmenším číslem množiny M, nemůže dolní hranice množiny M patřiti k množině M. — Má-li číslo K tu vlastnost, že žádné číslo neprázdné číselné množiny M není menší než K, potom dolní hranice g množiny M splňuje nerovnost $g \geqq K$. — Důkazy vynechávám, ježto jsou zcela obdobné důkazům vět o horní hranici.[6])

Množina číselná, jež je ohraničena shora i zdola, nazývá se krátce množinou *ohraničenou* (nebo též *omezenou*). Neprázdná množina ohraničená M má ovšem horní hranici G i dolní hranici g a je zřejmě $g \leqq G$ (neboť, vyberu-li z množiny M libovolné číslo x, je $g \leqq x$, $G \geqq x$). Rovnost $G = g$ platí ovšem tehdy a jen tehdy, skládá-li se množina M z jediného čísla.[7])

Věta 3. *Číselná množina M je ohraničena tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K tak, že všechna čísla x množiny M splňují nerovnost*

$$|x| \leqq K.^{8)} \tag{4}$$

Důkaz. 1. Platí-li nerovnost (4) pro všechna čísla x množiny M, platí pro všechna tato x nerovnosti $-K \leqq x \leqq K$ a tedy množina M je ohraničena (shora i zdola).

2. Naopak, je-li množina M ohraničena, existují čísla L_1, L_2 tak, že pro každé x množiny M platí $L_1 \leqq x \leqq L_2$. Položme $K = \mathrm{Max}\,(L_2, -L_1)$,[9]) takže $K \geqq L_2$, $-K \leqq L_1$; tedy pro každé x

---

[6]) Věty o dolní hranici lze ostatně z vět o horní hranici odvoditi tímto jednoduchým obratem: budiž M neprázdná zdola ohraničená množina číselná. Z množiny M sestrojíme novou množinu N tím, že u každého čísla množiny M změním znamení (t. j. číslo x patří k množině N tehdy a jen tehdy, patří-li číslo $-x$ k množině M). Množina N je pak zřejmě shora ohraničená a z vět o horní hranici, platných pro N, dostanu jednoduchou změnou znamení věty o dolní hranici pro množinu M. Podrobnosti tohoto přechodu jsou tak jasné, že je mohu přenechati čtenáři. Tohoto obratu se dá ostatně užíti i při mnoha obdobných případech.

[7]) Neboť potom toto číslo je současně největším i nejmenším číslem množiny M. Obsahuje-li však množina M aspoň dvě čísla, vyberme z ní dvě čísla $x_1 < x_2$; potom je $g \leqq x_1 < x_2 \leqq G$, tedy $g < G$.

[8]) Znamení $\leqq$ bychom ovšem v této větě mohli též nahraditi znamením $<$; viz pozn. [2]) na str. 10.

[9]) Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *konečná* posloupnost reálných čísel (různých nebo stejných), značíme znakem $\mathrm{Max}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ největší a znakem $\mathrm{Min}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nejmenší z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Na př.: $\mathrm{Max}\,(5{,}7, -3{,}0) = 7$, $\mathrm{Min}\,(5{,}7, -3{,}0) = -3$, $\mathrm{Max}\,(5{,}5) = \mathrm{Min}\,(5{,}5) = 5$.

množiny M platí nerovnosti $-K \leqq x \leqq K$, t. j. nerovnost $|x| \leqq K$.

Vraťme se ještě k příkladům M_1 až M_8. Množina M_1 je ohraničena zdola (dolní hranice je 1), ale ne shora. M_2 je ohraničena (horní hranice je 1, dolní je 0). M_3, M_4 jsou shora, ale ne zdola ohraničeny. Horní hranice množiny M_3 je -1, u M_4 je horní hranice 0. Množiny M_5, M_6 nejsou shora ani zdola ohraničeny. Množiny M_7, M_8 jsou ohraničeny, horní a dolní hranice jsou u M_7 čísla 1, 0, u M_8 čísla 3, 1.

Zaveďme ještě zvláštní označení pro některé číselné množiny, které se budou v dalším stále vyskytovati, totiž pro t. zv. *intervaly*. Buďte a, b dvě čísla, $a < b$. Znakem (a, b) značíme množinu všech čísel x, pro něž jest $a < x < b$ (název: otevřený interval). Znakem $\langle a, b \rangle$ značíme množinu všech čísel x, pro něž jest $a \leqq x \leqq b$ (název: uzavřený interval). Znakem $\langle a, b)$ značíme množinu oněch čísel x, pro něž jest $a \leqq x < b$ a znakem $(a, b\rangle$ značíme množinu oněch čísel x, pro něž jest $a < x \leqq b$. Čísla a, b nazýváme (ve všech těchto případech) „koncovými body“ intervalu; čísla intervalu, jež nejsou koncovými body, nazýváme „vnitřními body“ intervalu (to jsou tedy ona čísla x, pro něž jest $a < x < b$.[10]) Vedle těchto t. zv. „konečných“ intervalů[11]) zavádíme též t. zv. „nekonečné intervaly“ takto: (a, ∞) je množina všech čísel $x > a$; $\langle a, \infty)$ je množina všech čísel $x \geqq a$; $(-\infty, b)$ je množina všech čísel $x < b$; $(-\infty, b\rangle$ je množina všech čísel $x \leqq b$; $(-\infty, \infty)$ je množina všech čísel (reálných) vůbec. Také nekonečné intervaly (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ budeme nazývati otevřenými intervaly. Také o koncových a vnitřních bodech mluvíme u nekonečných intervalů v obdobném smyslu, jako u konečných. Pamatujme, že podle podaných definic užíváme znaku $\langle a, b \rangle$ jen u konečných intervalů.

2. Funkce ohraničené.[12]) Budiž $f(x)$ funkce, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Probíhá-li číslo x všechny hodnoty intervalu

[10]) Definice je velmi názorná: interval o koncových bodech a, b je prostě množina všech „bodů na úsečce o koncových bodech a, b“; při tom koncové body a, b k intervalu (a, b) nepatří, k intervalu $\langle a, b \rangle$ patří; k intervalu $\langle a, b)$ patří a, ale ne b; k intervalu $(a, b\rangle$ patří b, ale ne a.

[11]) Ovšem „konečný“ interval je nekonečná množina číselná; proto by snad bylo vhodnější, říkati ohraničený (nebo omezený) interval, v souhlase s definicí ohraničené množiny.

[12]) Místo názvů ohraničený, horní hranice, dolní hranice lze ovšem též zde užívati slov omezený, supremum, infimum.

$\langle a, b \rangle$, probíhá hodnota $f(x)$ jistou neprázdnou číselnou množinu N. (Na př.: budiž $f(x) = x^2$, $a = 2$, $b = 3$; probíhá-li x všechny hodnoty intervalu $\langle 2, 3 \rangle$, probíhá $f(x)$ právě všechny hodnoty intervalu $\langle 4, 9 \rangle$; množina N je zde interval $\langle 4, 9 \rangle$. Nebo: budiž $f(x) = 0$ pro racionální x, $f(x) = 1$ pro iracionální x; $a = 5$, $b = 8$; probíhá-li x interval $\langle 5, 8 \rangle$, nabývá $f(x)$ hodnot 0, 1 a žádných jiných; množina N se zde skládá právě ze dvou čísel 0,1.) Je-li množina N shora ohraničena (viz odst. 1), říkáme, že funkce $f(x)$ je *shora ohraničena v intervalu* $\langle a, b \rangle$. Podle definice množiny shora ohraničené můžeme tuto definici vysloviti také takto: Funkce $f(x)$ nazývá se shora ohraničenou v intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ platí nerovnost $f(x) \leq K$.

Je-li funkce $f(x)$ shora ohraničena v $\langle a, b \rangle$, t. j. je-li množina N shora ohraničena, existuje podle věty 1 jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti: 1. žádné číslo množiny N není větší než G; 2. je-li G' jakékoliv číslo menší než G, existuje aspoň jedno číslo množiny N, jež je větší než G'. Toto číslo G budeme nazývati *horní hranicí funkce* $f(x)$ *v intervalu* $\langle a, b \rangle$. Uvážíme-li, že N je množina všech hodnot, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá všechny hodnoty intervalu $\langle a, b \rangle$, můžeme tento výsledek vysloviti též takto:

Věta 4. *Je-li funkce $f(x)$ shora ohraničena v intervalu $\langle a, b \rangle$, potom existuje jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto vlastnosti:*

1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f(x) \leq G$.

2. Je-li však G' jakékoliv číslo menší než G, potom existuje aspoň jedna hodnota x intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $f(x) > G'$.

Toto číslo G nazývá se horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Z poznámek 1 a 2 k větě 1 plynou pak ihned tyto poznámky:

Poznámka 1. Jestliže mezi hodnotami, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá interval $\langle a, b \rangle$, jest jedna ze všech největší, je tato největší hodnota zároveň horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka 2. Existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f(x) \leq K$, nemůže býti horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ větší než K.

Obdobně definujeme funkce zdola ohraničené takto: Funkce $f(x)$ nazývá se zdola ohraničenou v intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f(x) \geq K$. Stejně jako pro funkce shora ohraničené se dokáže:

Věta 5. *Je-li funkce $f(x)$ zdola ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto vlastnosti:*

1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq g$.

2. Je-li však g' jakékoliv číslo větší než g, potom existuje aspoň jedno x intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) < g'$.

Toto číslo g nazývá se dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 1. Jestliže mezi hodnotami, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá interval $\langle a, b\rangle$, jest jedna ze všech nejmenší, je tato nejmenší hodnota zároveň dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2. Existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq K$, nemůže býti dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ menší než K.

Funkci $f(x)$, jež je v intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničena shora i zdola, nazýváme krátce *funkcí ohraničenou v intervalu* $\langle a, b\rangle$. To tedy znamená, že množina N, o níž jsme mluvili na začátku tohoto odstavce, je ohraničena (shora i zdola); věta 3 dává pak ihned tento výsledek:

Věta 6. *Funkce $f(x)$ je ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$.*

Poznámka. Nechť platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž G horní hranice a g dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$. Podle poznámky 2 k větě 4 a 5 je $-K \leqq g \leqq G \leqq K$, a tedy platí nerovnosti $|g| \leqq K$, $|G| \leqq K$.

Funkce $f(x)$ ohraničená v $\langle a, b\rangle$ má v tomto intervalu horní hranici G i dolní hranici g a jest ovšem $g \leqq G$. Znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, nabývá-li funkce $f(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jen jediné hodnoty, t. j. je-li $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Uveďme ještě některé drobnosti, jichž budeme v dalším potřebovati.

Věta 7. *Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v $\langle a, b\rangle$; budiž G horní hranice, g dolní hranice funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$. Je-li k číslo kladné, má funkce $k\,f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ horní hranici kG a dolní hranici kg; je-li k číslo záporné, má funkce $kf(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ dolní hranici kG a horní hranici kg.*

Důkaz. A) Budiž $k > 0$. Potom číslo kG má tyto vlastnosti: 1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq G$ a tedy $k\,f(x) \leqq kG$. 2. Je-li G' libovolné číslo menší než kG, je $G'/k < G$ a tedy existuje aspoň jedna hodnota x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro kterou je $f(x) > G'/k$ a tedy $k\,f(x) > G'$. Tedy je $k\,f(x)$ shora ohraničená v $\langle a, b\rangle$ a číslo kG je její horní hranicí v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro dolní hranici je důkaz obdobný.

B) Budiž $k < 0$. Potom číslo kG má tyto vlastnosti: 1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq G$ a tedy $k\,f(x) \geqq kG$.[13]) 2. Je-li g' libovolné číslo větší než kG (t. j. $g' > kG$), je $g'/k < G$ (násobím *záporným* číslem $1/k$) a tedy existuje aspoň jedno číslo x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $f(x) > g'/k$ a tedy $k\,f(x) < g'$. Funkce $k\,f(x)$ je tedy zdola ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a číslo kG je její dolní hranicí v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro horní hranici je důkaz obdobný.

Věta 8. *Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž $\langle c, d\rangle$ částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$.*[14]) *Potom je funkce $f(x)$ ohraničená též v intervalu $\langle c, d\rangle$; značí-li G, g horní a dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí-li G_1, g_1 horní a dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle c, d\rangle$, je $g \leqq g_1 \leqq G_1 \leqq G$.*

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ a tedy tím spíše pro všechna x intervalu $\langle c, d\rangle$ platí nerovnost $f(x) \leqq G$; tedy je funkce $f(x)$ shora ohraničena v intervalu $\langle c, d\rangle$ a podle poznámky 2 k větě 4 nemůže býti G_1 větší než G, t. j. je $G_1 \leqq G$. Důkaz pro dolní hranici je obdobný.

Věta 9. *Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c\rangle$, je ohraničena též v intervalu $\langle a, c\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existují dvě čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|\,f(x)\,| \leqq K_1$ a pro všechna x intervalu $\langle b, c\rangle$ je $|\,f(x)\,| \leqq K_2$. Položíme-li tedy $K = \text{Max}\,(K_1, K_2)$, je nerovnost $|\,f(x)\,| \leqq K$ splněna pro všechna x intervalu $\langle a, c\rangle$.

Věta 10. *Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ a liší-li se funkce $g(x)$ od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$, jest i funkce $g(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existuje číslo K tak, že pro všechna x

---

[13]) Násobím-li nerovnost $A \leqq B$ *záporným* číslem C, musím obrátiti její smysl: je potom $AC \geqq BC$. Obdobně, je-li $A < B$, $C < 0$, je $AC > BC$.

[14]) Tím rozumím, že každý bod intervalu $\langle c, d\rangle$ patří k intervalu $\langle a, b\rangle$; to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $a \leqq c < d \leqq b$.

[15]) Z těchto nerovností je zřejmo, že je $K \geqq 0$, $L \geqq 0$.

intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$. Buďte $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ony body intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $g(x) \neq f(x)$. Položme

$$K_1 = \operatorname{Max}(K, |g(x_1)|, |g(x_2)|, \ldots, |g(x_p)|);$$

potom zřejmě pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|g(x)| \leqq K_1$.

Věta 11. *Jsou-li funkce $f(x), g(x)$ ohraničeny v intervalu $\langle a, b\rangle$, jsou i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$ ohraničeny v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existují dvě čísla K, L taková, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq L$.[15]) Tedy pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) \pm g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| \leqq K + L, \quad |f(x)\,g(x)| = \\ = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqq KL.$$

3. Spojité funkce. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, rovnou číslu A (znak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž platí nerovnosti $0 < |x - x_0| < \delta$[16]) (Kössler 54). Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zprava, rovnou číslu A (znak $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$), jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž platí nerovnosti $x_0 < x < x_0 + \delta$. Obdobná je definice limity zleva (znak $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$), pouze nerovnosti $x_0 < x < x_0 + \delta$ jsou nahrazeny nerovnostmi $x_0 - \delta < x < x_0$ (Kössler 56). Z definic plyne ihned

Věta 12. *Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, existují i limity $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ a jest*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Též naopak platí

Věta 13. *Existují-li limity $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ a je-li*

[16]) Nerovnost $|x - x_0| < \delta$ znamená, že je $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$; nerovnost $|x - x_0| > 0$ znamená, že je $x \neq x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, *existuje i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *a je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

Důkaz. Budiž $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$; budiž ε libovolné kladné číslo. Podle definic limity zprava a zleva existují dvě kladná čísla δ_1, δ_2, které mají tuto vlastnost: nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí především pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ a za druhé pro všechna x, pro něž je $x_0 - \delta_2 <$ $< x < x_0$. Položme $\delta = \text{Min}(\delta_1, \delta_2)$, takže $\delta > 0$. Potom nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí jednak pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta$, jednak pro všechna x, pro něž je $x_0 - \delta <$ $< x < x_0$; tedy celkem platí tato nerovnost pro všechna x, pro něž je $0 < |x - x_0| < \delta$ (viz poslední poznámku pod čarou), takže je vskutku $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Definujme nyní spojitost funkce v bodě takto: Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Kössler 60). Podle definice limity můžeme definici spojitosti vysloviti také takto: funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, splňující nerovnosti $0 < |x - x_0| < \delta$.[17])

Spojitost zprava a zleva definujeme takto: Funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0, je-li $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$; funkce $f(x)$ je spojitá zleva v bodě x_0, je-li $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$. Podle definice limity zprava a zleva můžeme tuto definici vysloviti též takto: Funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta$.[18]) Obdobně

[17]) Místo nerovností $0 < |x - x_0| < \delta$ můžeme zde psáti též nerovnost $|x - x_0| < \delta$ (a to budeme také zpravidla činiti); neboť rozdíl je jen ten, že jednou nepřipouštíme a po druhé připouštíme hodnotu $x = x_0$; ale pro $x = x_0$ je $f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, takže podmínka $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ je pro $x = x_0$ jistě splněna — je tedy jedno, požadujeme-li či nepožadujeme-li splnění této podmínky pro hodnotu $x = x_0$.

[18]) Místo těchto nerovností můžeme (a většinou též budeme) psáti nerovnosti $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$; viz předešlou poznámku pod čarou.

lze vysloviti definici spojitosti zleva, jen místo nerovností $x_0 < < x < x_0 + \delta$ je třeba psáti nerovnosti $x_0 - \delta < x < x_0$ (nebo $x_0 - \delta < x \leqq x_0$).

Věta 14. *Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá tehdy a jen tehdy, je-li v bodě x_0 spojitá zprava i zleva.*

Důkaz plyne přímo z definice: je-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{5}$$

je podle věty 12 též

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0): \tag{6}$$

naopak: platí-li (6), platí podle věty 13 též (5).

* * *

Je-li (a, b) *otevřený* interval (konečný nebo nekonečný), říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v intervalu* (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a, b) (Kössler 61).

Je-li $\langle a, b \rangle$ *uzavřený* interval,[19] říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v intervalu* $\langle a, b \rangle$, je-li funkce $f(x)$ spojitá v otevřeném intervalu (a, b)[20] a mimo to spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b. Rozdíl je tedy v tom, že pro spojitost v *uzavřeném* intervalu požadujeme ještě jednostrannou spojitost v koncových bodech.

Pro funkci spojitou v uzavřeném intervalu platí tato základní věta:

Věta 15. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak mezi hodnotami, kterých $f(x)$ tam nabývá, jest největší hodnota a nejmenší hodnota.* (Kössler 62.)

To znamená tedy: v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje aspoň jedna hodnota c taková, že hodnota $f(c)$ je největší ze všech hodnot funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$; t. j. pro všechny hodnoty x intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f(x) \leqq f(c)$. Obdobně pro nejmenší hodnotu. Z věty 15 bezprostředně plyne

Věta 16. *Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ je ohraničena v intervalu $\langle a, b \rangle$* (Kössler 64).

---

[19]) Uzavřený interval je ovšem vždy konečný.

[20]) t. j. spojitá v každém *vnitřním* bodě intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka 1. Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ tehdy a jen tehdy, má-li tuto vlastnost:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \text{Je spojitá zprava v každém bodě } x_0, \text{ pro nějž platí } a \leqq \\ \leqq x_0 < b \text{ a je spojitá zleva v každém bodě } x_0, \text{ pro nějž} \\ \text{platí } a < x_0 \leqq b. \end{cases}$$

Vskutku, vlastnost (A) říká právě toto: funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě a, spojitá zleva v bodě b a spojitá zprava i zleva v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$. Této podmínky (A) se leckdy užívá.

Poznámka 2.[21] (O spojitosti t. zv. „složených funkcí".) Dosadíme-li do funkce $f(x)$ za proměnnou x funkci $\varphi(t)$ proměnné t, dostaneme funkci $f(\varphi(t))$ proměnné t. Odvodíme nyní tři věty, jež nám zodpovídají tuto otázku: co lze říci o spojitosti „složené" funkce $f(\varphi(t))$, víme-li něco o spojitosti funkcí $f(x)$ a $\varphi(t)$?

Věta A. *Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě t_0 a nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $\varphi(t_0)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě t_0.*

Důkaz. Položme pro zkrácení $\varphi(t_0) = x_0$. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že nerovnost

$$|\, f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))\,| < \varepsilon \tag{7}$$

platí pro všechna t, pro něž je $|\, t - t_0\,| < \delta$. Především existuje číslo $\eta > 0$ takové, že nerovnost $|\, f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$, t. j.

$$|\, f(x) - f(\varphi(t_0))\,| < \varepsilon \tag{8}$$

platí pro všechna x, pro něž je $|\, x - x_0\,| < \eta$ čili $|\, x - \varphi(t_0)\,| < \eta$. Ježto $\varphi(t)$ je funkce spojitá v bodě t_0, existuje k číslu η číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|\, \varphi(t) - \varphi(t_0)\,| < \eta$ platí pro všechna t, pro něž je $|\, t - t_0\,| < \delta$. Pro tyto hodnoty t bude tedy splněna nerovnost (8), klademe-li do ní $\varphi(t)$ za x[22]; t. j. bude splněna nerovnost (7), jak bylo dokázati.

Věta B. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu (α, β); funkce $f(x)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu (a, b)*[23]*; pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu (α, β).*

[21]) Tuto poznámku budeme potřebovati až v kap. III, odst. 4 a 5; proto ji čtenář může zatím — chce-li — přeskočiti.

[22]) Neboť nerovnost $|\, x - \varphi(t_0)\,| < \eta$ je splněna, klademe-li do ní $\varphi(t)$ za x (je-li ovšem $|\, t - t_0\,| < \delta$).

[23]) Intervaly (α, β), (a, b) mohou býti konečné nebo nekonečné.

Důkaz. Budiž t_0 libovolný bod intervalu (α, β). Číslo $\varphi(t_0)$ leží v intervalu (a, b); tedy funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě t_0 a funkce $f(x)$ v bodě $\varphi(t_0)$; tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě t_0 (podle věty A), čímž věta B dokázána, neboť t_0 může být kterýkoliv bod intervalu (α, β).

Obdobná věta platí pro *uzavřené* intervaly:

Věta C. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; funkce $f(x)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*[24] *Pro každé t intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ budiž $a \leqq \varphi(t) \leqq b$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.*

Důkaz. Definujme funkci $\psi(t)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto: pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$, pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha)$, pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta)$.

Funkce $\psi(t)$ je zřejmě spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.[25]

Obdobně definujme funkci $g(x)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto: pro $a \leqq x \leqq b$ budiž $g(x) = f(x)$, pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a)$, pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b)$. Funkce $g(x)$ je opět spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$. Podle věty B (kde za interval (α, β) i za interval (a, b) je třeba vzíti interval $(-\infty, \infty)$) je tedy funkce $g(\psi(t))$ spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a tedy též v *uzavřeném* intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Ale v pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $g(\psi(t)) = f(\varphi(t))$,[26] a tedy i funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.

4. Derivace. Připomeňme si ještě definici derivace a větu o střední hodnotě.

Existuje-li limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita *derivací* funkce $f(x)$ v bodě x_0; znak $f'(x_0)$ (Kössler 69). Existuje-li limita zprava, $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita derivací zprava funkce $f(x)$ v bodě x_0 (znak $f'_+(x_0)$);

---

[24]) Intervaly $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle a, b\rangle$ jsou ovšem konečné.

[25]) V bodě $t = \alpha$ je totiž funkce $\psi(t)$ především spojitá zprava, neboť je $\psi(t) = \varphi(t)$ pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$; za druhé je funkce $\psi(t)$ v bodě $t = \alpha$ též spojitá zleva, ježto pro $t \leqq \alpha$ je funkce $\psi(t)$ rovna konstantě $\varphi(\alpha)$. Obdobně je tomu pro $t = \beta$; ostatní hodnoty t pak nepůsobí obtíží.

[26]) Je totiž $\varphi(t) = \psi(t)$ pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$, $f(x) = g(x)$ pro $a \leqq x \leqq b$. Tedy: je-li $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\varphi(t) = \psi(t)$ a tedy $g(\psi(t)) = g(\varphi(t))$; zároveň je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$ a tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.

existuje-li limita zleva, $\lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita derivací zleva funkce $f(x)$ v bodě x_0 (znak $f'_-(x_0)$).

Věta 17. *Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci tehdy a jen tehdy, má-li v bodě x_0 derivaci zprava $f'_+(x_0)$ i derivaci zleva $f'_-(x_0)$ a je-li nadto $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$; potom je $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Důkaz plyne okamžitě z vět 12 a 13, podle nichž limita nějaké funkce v nějakém bodě (zde tedy limita funkce proměnné h

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

v bodě $h = 0$) existuje tehdy a jen tehdy, existují-li v tom bodě limita zprava a zleva a jsou-li si rovny; jejich společná hodnota je pak hodnotou limity.

Poznámka 1. Platí tato věta: *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci zprava, je v bodě x_0 spojitá zprava; má-li v bodě x_0 derivaci zleva, je v bodě x_0 spojitá zleva.* Důkaz: má-li funkce $f(x)$ derivaci zprava v bodě x_0, existuje limita zprava $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$; ježto pro $h \neq 0$ je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \, . \, h,$$

je $\lim\limits_{h \to 0+} (f(x_0+h) - f(x_0)) = f'_+(x_0) \, . \lim\limits_{h \to 0+} h = 0$,[27] t. j. $\lim\limits_{h \to 0+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ čili $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$, takže funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0. Důkaz pro spojitost zleva se vede obdobně. — *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci,* má ovšem v tomto bodě derivaci zprava i zleva, je tedy v bodě x_0 spojitá zprava i zleva, t. j. *je v tomto bodě spojitá.*

Poznámka 2.[28] (O derivování „složených funkcí".) Z diferenciálního počtu znáte tuto větu (Kössler 75):

Věta A'. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v určitém bodě t; nechť funkce $f(x)$ má derivaci v příslušném bodě $x = \varphi(t)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v bodě t derivaci $f'(\varphi(t)) \, \varphi'(t)$.*

[27]) Podle věty o limitě součinu, viz Kössler 55; v Kösslerově knížce je sice míněna limita a nikoliv limita zprava; důkaz pro limitu zprava je však zcela obdobný důkazu pro limitu.

[28]) Tuto poznámku budeme potřebovati až v kap. III, odst. 4 a 5; proto ji čtenář může zatím — chce-li — přeskočiti.

Z věty A′ plyne snadno tato

Věta B′. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu (α, β)*[29]*; nechť funkce $f(x)$ má derivaci v intervalu (a, b); nechť pro každé t intervalu (α, β) hodnota funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v intervalu (α, β) derivaci $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.*

Důkaz. Je-li t jakákoliv hodnota intervalu (α, β), existuje derivace $\varphi'(t)$ a hodnota $x = \varphi(t)$ leží v intervalu (a, b), takže funkce $f(x)$ má derivaci v bodě $x = \varphi(t)$. Z věty A′ tedy plyne, že existuje v bodě t derivace funkce $f(\varphi(t))$, rovná číslu $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Pro *uzavřené* intervaly platí obdobná

Věta C′. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci $\varphi'(t)$ v uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$; při tom slovem „derivace" a znakem $\varphi'(t)$ rozumím v bodě $t = \alpha$ derivaci zprava a v bodě $t = \beta$ derivaci zleva. Funkce $f(x)$ nechť má derivaci $f'(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$; při tom opět slovem „derivace" a znakem $f'(x)$ rozumím v bodě $x = a$ derivaci zprava a v bodě $x = b$ derivaci zleva. Pro každé t intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nechť je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$. Potom funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci $F'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$; při tom opět slovem „derivace" a znakem $F'(t)$ rozumím pro $t = \alpha$ derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva.*[30]

Důkaz. Definujme funkce $\psi(t), g(x)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto:

Pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$; pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\varphi'(\alpha)$; pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta) + (t - \beta)\varphi'(\beta)$.

Pro $a \leqq x \leqq b$ budiž $g(x) = f(x)$; pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a) + (x - a)\,f'(a)$; pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b) + (x - b)\,f'(b)$.

Položme ještě $G(t) = g(\psi(t))$; je-li $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$ a současně $a \leqq \varphi(t) \leqq b$, tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$, takže jest

$$G(t) = g(\psi(t)) = g(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) = F(t).$$

V intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je tedy $G(t) = F(t)$. Podaří-li se nám tedy dokázati, že v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ platí rovnice

[29]) To ovšem znamená, že funkce $\varphi(t)$ má derivaci v každém bodě intervalu (α, β); podobně v analogických případech. Intervaly (α, β), (a, b) mohou býti ovšem i nekonečné.

[30]) Pro zkrácení píši tedy $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$, $f'(a)$, $f'(b)$, $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ místo $\varphi'_+(\alpha)$, $\varphi'_-(\beta)$, $f'_+(a)$, $f'_-(b)$, $F'_+(\alpha)$, $F'_-(\beta)$. U ostatních funkcí $\psi(t)$, $g(x)$, $G(t)$, které se vyskytnou v důkazu, toto zkrácení nezavádím, takže na př. $\psi'(\alpha)$ bude znamenati derivaci funkce $\psi(t)$ v bodě α a *nikoliv* derivaci zprava.

$$G'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t), \tag{9}$$

bude tím věta dokázána; neboť potom bude $F'(t) = G'(t)$ pro $\alpha < t < \beta$ a pro $t = \alpha$ bude derivace zprava funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_+(\alpha) = G'(\alpha) = f'(\varphi(\alpha))\,\varphi'(\alpha)$ a obdobně pro $t = \beta$ bude derivace zleva funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_-(\beta) = G'(\beta) = f'(\varphi(\beta))\varphi'(\beta)$.

Tvrdím nyní, že funkce $\psi(t)$ má derivaci v intervalu $(-\infty, \infty)$ a že v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Vskutku pro $t < \alpha$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\alpha)$ a pro $t > \beta$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\beta)$, pro $\alpha < t < \beta$ je pak zřejmě $\psi'(t) = \varphi'(t)$.

Zbývá vyšetřiti hodnoty $t = \alpha$, $t = \beta$. Ježto pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $\psi(t) = \varphi(t)$, je $\psi'_+(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; ježto pro $t \leqq \alpha$ je $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\,\varphi'(\alpha)$, je $\psi'_-(\alpha) = \varphi'(\alpha)$, tedy vskutku $\psi'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; obdobně se dokáže, že je $\psi'(\beta) = \varphi'(\beta)$. Tedy vskutku $\psi'(t)$ existuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ a v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí rovnice $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Obdobně se ukáže: $g'(x)$ existuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ a v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí rovnice $g'(x) = f'(x)$. Ježto $\psi'(t)$ i $g'(x)$ existují v intervalu $(-\infty, \infty)$, máme podle věty B′ tento výsledek: pro každé t je

$$G'(t) = g'(\psi(t))\,\psi'(t). \tag{10}$$

Je-li však $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$, $\psi'(t) = \varphi'(t)$ a dále je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$, takže $g'(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))$; z rovnice (10) plyne tedy

$$G'(t) = g'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

čímž rovnice (9) v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je dokázána.

Věta 18. (Věta o střední hodnotě, Kössler 84.) *Jestliže funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*[31] *potom existuje aspoň jedno číslo c tak, že platí*

$$a < c < b, \qquad f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c).$$

Učiňme z této věty dva důsledky:

Věta 19. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li rovnice $f'(x) = 0$ v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*[31] *je funkce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz: Stačí dokázati: pro každé číslo t intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(t) = f(a)$. Ježto pro $t = a$ je tato rovnice samozřejmá, stačí

[31]) T. j. v každém *vnitřním* bodě intervalu $\langle a, b\rangle$.

předpokládati, že je $a < t \leqq b$. Na interval $\langle a, t \rangle$ můžeme užíti věty 18; existuje tedy číslo c tak, že je $a < c < t$ (tedy i $a < c < b$), $f(t) - f(a) = (t - a) f'(c)$. Je však $f'(c) = 0$, a tedy vskutku $f(t) = f(a)$.

Věta 20. *Má-li funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule v každém bodě otevřeného*[32]) *intervalu (a, b), je funkce $f(x)$ konstantní v intervalu (a, b).*

Důkaz. Zvolme nějaké číslo d v intervalu (a, b); máme dokázati: je-li t libovolné číslo intervalu (a, b), je $f(t) = f(d)$. Budiž tedy t libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není ani jeho nejmenším ani jeho největším číslem, lze nalézti v otevřeném intervalu (a, b) dvě čísla α, β tak, že $\alpha < \operatorname{Min}(t, d) \leqq \operatorname{Max}(t, d) < \beta$. Funkce $f(x)$ má derivaci (rovnou nule) nejenom ve vnitřních, nýbrž i v koncových bodech intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a je tedy v tomto *uzavřeném* intervalu spojitá.[33]) Můžeme tedy na interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ užíti věty 19 a dostáváme, že funkce $f(x)$ je konstantní v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$; ježto však t, d jsou dvě hodnoty z tohoto intervalu, je vskutku $f(t) = f(d)$.

KAPITOLA II.

Teorie určitého integrálu.

1. Úvod. K pojmu určitého integrálu — jímž se budeme v následujících odstavcích zabývati — byli matematikové přivedeni — mimo jiné — také geometrickým problémem, totiž otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii definuje se plošná velikost neboli obsah trojúhelníka (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložiti na konečný počet trojúhelníků, t. j. plošná velikost mnohoúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem jest vhodno definovati obsah oborů obecnějších, jež nelze rozložiti na konečný počet trojúhelníků; vezměme jeden takový jednoduchý případ.

Budiž dána funkce $f(x)$, spojitá a kladná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Sestrojme obor P (viz obr. 1a), ohraničený jednak osou x, jednak přímkami $x = a$ a $x = b$, jednak křivkou $y = f(x)$. Jak defino-

[32]) Konečného nebo nekonečného.

[33]) Podle poznámky 1 na str. 24.