Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre IX: Surfaces réglées

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [125]--146.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402566

CHAPITRE IX.

SURFACES RÉGLÉES.

43. **Plans tangents.** — On obtient une surface réglée S en se donnant une correspondance entre deux courbes (directrices) C_1, C_2 et en joignant par une droite chaque couple de points correspondants. Désignons par la lettre $y(z)$ les quatre coordonnées homogènes du point mobile de $C_1(C_2)$, ces quantités étant des fonctions d'un paramètre v. La surface S est engendrée par le point [1]

$$x(u, v) = x = y + uz. \tag{1}$$

Les courbes $v = \text{const.}$ sont les *génératrices* (rectilignes) de S; toute autre courbe tracée sur S s'obtient en posant $u = \varphi(v)$. La surface S est *développable* si l'on peut choisir $\varphi(v)$ de manière que la courbe $y + \varphi z$ soit constamment tangente à la génératrice de S ou bien se réduise à un point fixe. Analytiquement, la condition est que le point [2]

$$\frac{dx}{dv} = y' + \varphi z' + \varphi' z$$

soit situé sur la droite (y, z). Cela exige que les points y, z, y', z' soient linéairement dépendants. *La condition nécessaire et suffisante pour une surface développable est donc* $\alpha = 0$, où nous avons posé

$$\alpha = (y, z, y', z'). \tag{2}$$

Le plan tangent à S au point x est

$$(x, x_u, x_v) = \eta_0 + u\zeta_0, \tag{3}$$

---

[1] A toute rigueur, on exclut ainsi les points de C_2 qui correspondent à $u = \infty$.

[2] L'accent signifie toujours la dérivée prise par rapport à v.

où

$$(3') \qquad \eta_0 = (y,\ z,\ y'), \qquad \zeta_0 = (y,\ z,\ z').$$

Évidemment, la position géométrique de ce plan ne dépend pas de u si $\alpha = 0$ et dans ce cas seulement. Il en résulte : *le plan tangent à une surface développable est fixe le long de chaque génératrice.* Nous ne poursuivrons pas ici l'étude des surfaces développables qui se réduit évidemment à celle de courbes (*voir* Chap. II et III). Rappelons seulement les recherches de M. Cartan [4] relatives à la déformation projective des surfaces développables.

Les développables étant exclues, nous avons $\alpha \neq 0$ [1]. L'expression (3) du plan tangent donne le théorème classique de Chasles [2] : *les plans tangents aux points d'une génératrice $(y,\ z)$, engendrent un faisceau autour de $(y,\ z)$ homographique à la ponctuelle décrite par les points de contact.*

Les plans η_0, ζ_0 contenant tous les deux la droite $(y,\ z)$, on a évidemment une relation de la forme $(\eta_0,\ \zeta_0) = \lambda(y,\ z)$. Précisément on a

$$(4) \qquad (\eta_0,\ \zeta_0) = \alpha(y,\ z),$$

c'est-à-dire $\lambda = \alpha$. En effet, d'après (3') et § 2 (4_3),

$$S(\eta_0,\ \zeta_0)(y',\ z') = \begin{vmatrix} S\eta_0 y' & S\eta_0 z' \\ S\zeta_0 y' & S\zeta_0 z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2;$$

d'autre part,

$$S(\eta_0,\ \zeta_0)(y',\ z') = \lambda\, S(y,\ z)(y',\ z') = \lambda\alpha.$$

Nous avons vu que le plan tangent à S au point x est

$$\xi = \lambda(\eta_0 + u\zeta_0).$$

Nous allons fixer λ conformément à la convention introduite au Chapitre IV. D'après le paragraphe 16 (14), le choix de λ doit être tel que, en chaque point x, les directions asymptotiques soient données par

$$(x\, dx) \pm (\xi\, d\xi).$$

---

(1) On peut avoir $\alpha = 0$ pour des génératrices particulières ; mais nous les exclurons comme *singulières*.

(2) *Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches* (*Journal de Math.*, 1re série, 2, 1837, p. 413-417).

Or, dans le cas présent, un système d'asymptotiques est formé par les génératrices $v = \text{const}$. On doit donc avoir

$$(x, x_u) = \pm (\xi, \xi_u),$$

c'est-à-dire

$$(y, z) = \pm \lambda^2 (\eta_0, \zeta_0).$$

On en conclut, d'après (4), que $\lambda = \pm |\alpha|^{-\frac{1}{2}}$. Pour fixer les idées, choisissons le signe supérieur de manière que

$$\xi = \eta + u\zeta \tag{5}$$

avec

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}(y, z, y'), \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}(y, z, z'). \tag{5'}$$

L'équation (4) s'écrit maintenant

$$(\eta, \zeta) = \omega(y, z), \qquad \omega = \pm 1, \tag{5''}$$

le signe ω étant défini par

$$\omega = \operatorname{sgn}(y, z, y', z').$$

Il importe de remarquer que notre choix du facteur λ est caractérisé par l'équation (5″). De la définition (5′) on déduit

$$S y\eta = S y\zeta = S z\eta = S z\zeta = 0, \tag{6}$$

$$S y'\eta = S z'\zeta = 0, \qquad S z'\eta = \omega\sqrt{|\alpha|}, \qquad S y'\zeta = -\omega\sqrt{|\alpha|}. \tag{6'}$$

En différentiant les équations (6), on obtient encore

$$S y\eta' = S z\zeta' = 0, \qquad S y\zeta' = \omega\sqrt{|\alpha|}, \qquad S z\eta' = -\omega\sqrt{|\alpha|}. \tag{6''}$$

44. L'élément linéaire projectif. — L'élément linéaire projectif de la surface S est (*voir* § 22) $F_3 : F_2$, où

$$F_2 = -S\, dx\, d\xi, \qquad F_3 = \frac{1}{2} S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x).$$

Calculons d'abord la forme F_2. On a, d'après (1), (5), (6), (6′), (6″),

$$\begin{aligned} F_2 &= -S[(y' + uz')\,dv + z\,du][(\eta' + u\zeta')\,dv + \zeta\,du] \\ &= 2\omega\sqrt{|\alpha|}\,du\,dv - S(y' + uz')(\eta' + u\zeta')\,dv^2. \end{aligned}$$

L'équation $F_2 = 0$ définit les asymptotiques. Donc une famille d'asymptotiques est formée par les génératrices $dv = 0$, ce qui était évident. De plus, nous voyons que l'autre famille d'asymptotiques est donnée par une équation différentielle de la forme

$$(\star) \qquad \frac{du}{dv} = a + 2bu + cu^2,$$

a, b, c étant des fonctions de v. Pour abréger, nous appellerons *asymptotiques* de S tout court celles de la famille définie par l'équation différentielle ($\star$). Cette équation a la forme de Riccati; d'après une propriété classique, son intégrale générale a la forme

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 c}{\lambda_1 + \mu_1 c},$$

où λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont des fonctions de v et c est la constante d'intégration. Les asymptotiques de S sont donc les courbes engendrées par

$$\lambda_1 y + \lambda_2 z + c(\mu_1 y + \mu_2 z),$$

c étant une constante. Il en résulte (1) : *les asymptotiques d'une surface réglée coupent les génératrices dans des ponctuelles homographiques entre elles*. En posant

$$\bar{y} = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \qquad \bar{z} = \mu_1 y + \mu_2 z,$$

nous voyons que la surface S est engendrée par le point $\bar{y}(v) + u\bar{z}(v)$, *u, v étant des coordonnées asymptotiques* (*voir* plus loin, § 45).

Passons à la forme F_3. Nous savons (§ 22) que, en chaque point de S, l'équation $F_3 = 0$ définit les directions de Darboux; dans notre cas d'une surface réglée, nous savons aussi (§ 21) que toutes les trois directions de Darboux coïncident avec la direction de la génératrice. Donc la forme F_3 se réduit à

$$F_3 = \frac{1}{2} S(x_v \xi_{vv} - x_{vv} \xi_v)\, dv^3,$$

ce qu'on pourrait aussi montrer aisément par un calcul direct. En se

---

(1) P. SERRET, *Théorie nouvelle géométrique des lignes à double courbure*, Paris, 1860, p. 169.

rappelant la forme (1), (5) des x, ξ, on voit que

$$F_3 = (A + 2Bu + Cu^2)\, dv^3,$$

A, B, C étant des fonctions de v. L'élément linéaire projectif d'une surface réglée a donc la forme

$$\frac{F_3}{F_2} = (A + 2Bu + Cu^2) \frac{dv^2}{2\, du + (a + 2bu + cu^2)\, dv}.$$

On peut avoir identiquement $A = B = C = 0$. Alors la forme F_3 s'évanouit; nous savons (§ 21) que cette circonstance caractérise *une surface quadrique*. En excluant ce cas élémentaire, on voit que, sur chaque génératrice de S, il y a deux points dans lesquels on a identiquement $F_3 = 0$; ce sont les points $y + uz$ avec $A + 2Bu + Cu^2 = 0$. Nous les appellerons les *points flecnodaux* de la génératrice considérée; ils peuvent du reste coïncider ou être imaginaires conjugués (¹).

En variant v, les points flecnodaux décrivent les deux *courbes flecnodales* de la surface S.

Avant de parler de la signification géométrique des points flecnodaux, rappelons-nous (*voir* § 20) que, pour une surface réglée, la *quadrique osculatrice* H (contenant trois génératrices infiniment voisines) coïncide avec la quadrique de Lie, laquelle est par suite fixe tout le long d'une génératrice. Or nous savons (*voir* § 21) que le plan polaire du point

$$\nu x + \nu_1 x_u + \nu_2 x_v$$

par rapport à la quadrique de Lie est

$$\nu \xi + \nu_1 \xi_u + \nu_2 \xi_v.$$

D'après (1) et (5), il résulte que *le plan polaire du point*

$$\lambda_1 y + \lambda_2 z + \mu_1 y' + \mu_2 z'$$

par rapport à la quadrique osculatrice H *est*

$$\lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta + \mu_1 \eta' + \mu_2 \zeta',$$

ce qui donne un moyen commode pour calculer l'équation de H.

(¹) Pour des génératrices particulières, on peut avoir $A = B = C = 0$; les points flecnodaux sont alors indéterminés. On voit aisément que ce cas est caractérisé par la circonstance que la quadrique osculatrice H a tout le long de la génératrice considérée un contact du troisième ordre avec la surface S.

Or, pour un point arbitraire x d'une surface S *quelconque*, la quadrique de Lie H a un contact du second ordre avec S en x, et la courbe d'intersection de S et de H a, par suite, un point triple, les tangentes à l'intersection en x étant les tangentes de Darboux $F_3 = 0$. Il en résulte que l'ordre de contact de S avec H au point x est supérieur à deux, si les tangentes de Darboux en x sont indéterminées, et dans ce cas seulement. Donc : *les points flecnodaux d'une surface réglée* S *sont les points où* S *a un contact du troisième ordre* (*au moins*) (¹) *avec la quadrique osculatrice* H. Une autre définition (*voir* paragraphe suivant) est : *les points flecnodaux sont les points d'inflexion des asymptotiques.*

Les tangentes asymptotiques à S aux points flecnodaux s'appellent *tangentes flecnodales*. Pour chaque valeur de v, *les deux directrices de la congruence linéaire osculatrice à* S *sont les tangentes flecnodales*. Voilà une troisième définition des points flecnodaux; pour la démonstration, nous renvoyons à *G. P. D.*, § 37, p. 222. En variant v, chaque tangente flecnodale décrit une surface réglée appelée *transformée flecnodale* de S.

45. **Les équations fondamentales.** — Nous allons retrouver une partie des résultats du paragraphe 44 par une autre méthode. Supposons que le point $x(u, v)$ engendre une surface réglée, u, v étant des coordonnées asymptotiques. Pour fixer les idées, supposons que les génératrices rectilignes soient les lignes $v =$ const. Les équations fondamentales (*voir* § 17) sont

$$(7) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma\, x_u + \theta_v x_v + p_{22} x. \end{cases}$$

Dans le cas présent, on a identiquement $(x, x_u, x_{uu}) = 0$, d'où $\beta = 0$, comme nous l'avons déjà remarqué (*voir* § 21). L'équation (7_1) devient donc

$$(7') \qquad x_{uu} = \theta_u x_u + p_{11} x.$$

Pour chaque valeur de v, c'est une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre. Soient $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ un système fonda-

(¹) On peut démontrer (*voir* Čech [6]) que l'ordre de contact est supérieur à trois si les deux lignes flecnodales coïncident, et dans ce cas seulement.

mental de ses solutions. Chaque solution est alors de la forme $c_1\varphi + c_2\psi$, c_1 et c_2 étant indépendantes de u. Donc

$$x = \varphi Y + \psi Z, \tag{8}$$

les points Y et Z dépendant de la variable v seule. Il en résulte que

$$(x, x_u, x_v, x_{uv}) = (\varphi\psi_u - \psi\varphi_u)^2 (Y, Z, Y', Z').$$

Or le premier membre est égal [*voir* § 17 (1_2)] à $\pm e^{2\theta}$ de manière que

$$(\varphi\psi_u - \psi\varphi_u) \neq 0, \qquad (Y, Z, Y', Z') \neq 0, \tag{$\star$}$$

et en particulier $\psi \neq 0$. Or les courbes $u =$ const. étant des asymptotiques, nous avons [*voir* § 16 (11_4)] $(x, x_u, x_v, x_{vv}) = 0$. En substituant la valeur (8) de x, on obtient

$$(\varphi\psi_u - \psi\varphi_u)(Y, Z, \varphi Y' + \psi Z', \varphi Y'' + \psi Z'' + 2\varphi_v Y' + 2\psi_v Z') = 0.$$

D'après ($\star$) cela donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = a\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^2 + 2b\frac{\psi}{\varphi} + c,$$

a, b, c étant des fonctions de v. En intégrant cette équation de Riccati, on obtient

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\lambda_2 + \mu_2 t}{\lambda_1 + \mu_1 t},$$

λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 étant des fonctions de v, tandis que t ne dépend que de u. Donc

$$x = \rho[(\lambda_1 + \mu_1 t)Y + (\lambda_2 + \mu_2 t)Z].$$

Sans altérer la généralité, nous pouvons supposer que $\rho = 1$. En posant

$$\lambda_1 Y + \lambda_2 Z = y, \qquad \mu_1 Y + \mu_2 Z = z,$$

on a $x = y + tz$. D'ailleurs t contient effectivement u, parce que autrement x ne dépendrait que de v et la surface S se réduirait à une courbe. Il s'ensuit que nous pouvons changer la variable u en supposant simplement $t = u$, de manière que

$$x = y + uz, \tag{9}$$

les points y et z dépendant de v. En substituant la valeur (9) de x

dans l'équation (7'), on obtient

$$\theta_u = 0, \qquad p_{11} = 0. \tag{10}$$

La quantité θ ne dépend donc que de v, ce qui résulte aussi de l'équation

$$\pm e^2\theta = (x, x_u, x_v, x_{uv}) = (y, z, y', z'). \tag{11}$$

En substituant la valeur (9) dans l'équation (7_2), on obtient

$$y'' + u z'' = \gamma z + \theta'(y' + u z') + p_{22}(y + u z). \tag{12}$$

En y opérant par $\frac{\partial}{\partial u}$, on obtient

$$z'' - \theta' z' = \left(\gamma_u + p_{22} + u \frac{\partial p_{22}}{\partial u}\right) z + \frac{\partial p_{22}}{\partial u} y.$$

Le premier membre ne dépend pas de u; les points y, z dépendent de la variable v seule et sont linéairement indépendantes. Donc

$$\frac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\gamma_u + p_{22} + u \frac{\partial p_{22}}{\partial u}\right) = 0, \tag{13}$$

d'où

$$\gamma = A + 2Bu + Cu^2, \qquad p_{22} = -Cu - (B + j), \tag{13'}$$

où A, B, C, j sont des fonctions de v. D'après (13'), l'équation (12) donne

$$\left\{\begin{aligned} y'' &= -(B + j)y + Az + \theta' y', \\ z'' &= (B - j)z - Cy + \theta' z'. \end{aligned}\right. \tag{I}$$

Désignons par ξ les coordonnées du plan tangent dont le facteur soit choisi d'après la convention usuelle. On voit facilement que (*voir* d'ailleurs § 43)

$$\xi = \eta + u\zeta,$$

les plans η et ζ ne dépendant que de v. En passant du point x au plan ξ, on doit (*voir* § 17) remplacer γ, p_{22} par $-\gamma$ et

$$\pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u = p_{22} + \gamma_u \qquad [\textit{voir}\ (10)],$$

tandis que θ reste inaltérée. On en déduit les équations corrélatives à (I) :

$$\left\{\begin{aligned} \eta'' &= (B - j)\eta - A\zeta + \theta'\eta', \\ \zeta'' &= -(B + j)\zeta + C\eta + \theta'\zeta'. \end{aligned}\right. \tag{II}$$

On peut déduire aussi la forme (13′) des quantités γ et p_{22} en faisant usage des conditions d'intégrabilité des équations fondamentales. Des équations $\beta = 0$ et (10) il résulte [*voir* § 28 (I)] que

$$L = 0, \qquad M = \theta'' - \frac{1}{2}\theta' - \gamma_u - 2p_{22}.$$

Les conditions d'intégrabilité sont [*voir* § 28 (III)]

$$L_v = 0, \qquad M_u = 0,$$
$$\gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} = 0.$$

En substituant les valeurs de L, M, on obtient

$$\gamma_{uuu} = 0, \qquad \gamma_{uu} + 2\frac{\partial p_{22}}{\partial u} = 0,$$

ce qui donne de nouveau les équations (13′).

46. **Quelques applications des résultats précédents.** — Des équations fondamentales il résulte que $(x, x_v, x_{vv}) = 0$ si $\gamma = 0$ et dans ce cas seulement. Donc les points flecnodaux (dans lesquels l'élément linéaire projectif $\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv} = \gamma \frac{dv^2}{2\, du}$ s'évanouit) sont les points d'inflexion des asymptotiques $u =$ const., comme nous l'avons déjà énoncé au paragraphe 44. Il en résulte qu'*une ligne à la fois flecnodale et asymptotique d'une surface réglée est rectiligne.*

Comme $\beta = 0$, *l'équation différentielle des pangéodésiques est* [*voir* § 37 (1_1)]

$$2\gamma u'' = 2\gamma_u u'^2 + \gamma_v u'. \tag{14}$$

Cherchons quand il arrive qu'une ligne flecnodale est pangéodésique. Les équations (14) et $\gamma = 0$ doivent avoir une solution commune. Or, en différentiant l'équation $\gamma = 0$, on obtient $\gamma_u u' + \gamma_v = 0$ de manière que (14) devient $\gamma_u u' = 0$. Donc deux cas sont à distinguer : 1° $u' = 0$, $u =$ const.; la ligne flecnodale est asymptotique et par suite rectiligne. 2° $\gamma = \gamma_u = 0$; or $\gamma = A + 2Bu + Cu^2$, de manière que la ligne flecnodale $\gamma = \gamma_u = 0$ soit double : *donc une ligne flecnodale sur une surface réglée* S *est pangéodésique sur* S, *si c'est une droite directrice de* S *ou une ligne flecnodale double, et dans ces cas seulement.*

En particulier (Tzitzéica [12]) : *si la surface réglée* S *possède une ligne flecnodale plane* C, *non rectiligne, alors* C *est une ligne flecnodale double de* S *si les plans tangents à* S *le long de* C *passent par un point fixe, et dans ce cas seulement*.

Pour une surface réglée S quelconque, les équations fondamentales ont, comme nous l'avons vu, la forme (I), A, B, C, j étant des fonctions *arbitraires* (parce que les conditions d'intégrabilité ne donnent plus aucune condition) de v. En y changeant la valeur de j, on obtient une autre surface dont l'élément linéaire projectif est égal à celui $\frac{1}{2}\gamma\frac{dv^2}{du}$ de S, car γ dépend seulement de A, B, C. Donc *chaque surface réglée est projectivement déformable et ses déformées dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument*. En renvoyant à *G. P. D.* (§ 40), remarquons ici sans démonstration que S possède d'autres déformations projectives, outre celles qui viennent d'être définies, si elle appartient à une congruence linéaire fixe, et dans ce cas seulement.

Les équations (I) et (II) forment la base d'une étude approfondie de surfaces réglées, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à *G. P. D.* (Chap. IV). Ici, nous voulons nous borner à un exemple simple. Les demi-quadriques osculatrices H_1 (contenant chacune trois génératrices infiniment voisines de S) engendrent une congruence de droites, appelée la *congruence flecnodale de la surface réglée* S. Or *les deux surfaces focales de la congruence flecnodale sont les deux transformées flecnodales de la surface* S (*voir* la fin du paragraphe 14), ce qui explique le nom donné à la congruence. Pour chaque valeur de v, la demi-quadrique H_2 complémentaire à H_1 est engendrée par les tangentes asymptotiques aux points de la génératrice (y, z) correspondante. Or les asymptotiques étant les courbes $u =$ const., nous voyons que H_2 est le lieu de la droite (obtenu en variant u seule)

$$(y + uz,\ y' + uz'). \tag{15}$$

La demi-quadrique complémentaire H_1 est donc formée par les droites

$$(y + ty',\ z + tz'). \tag{15'}$$

La congruence flecnodale est donc engendrée par la droite (15′) où t et v sont variables. Les deux foyers de la génératrice (15′) de la congruence sont donnés par

$$X = (y + ty') + u(z + tz'), \tag{16}$$

u étant une fonction de t, v telle que, pour un déplacement infinitésimal convenable de t, v, le point dX soit situé sur la droite (15′). Or on trouve

$$dX = (y' + uz')(dt + dv) + t(y'' + uz'')\,dv + (z + tz')\,du,$$

de manière que la condition est qu'on puisse déterminer $\dfrac{dt}{dv}$ de telle sorte que le point

$$(y' + uz')(dt + dv) + t(y'' + uz'')\,dv$$

soit situé sur la droite (15′). En éliminant $\dfrac{dt}{dv}$, on obtient

$$(y + ty',\ z + tz',\ y' + uz',\ y'' + uz'') = 0.$$

D'après (I) cela donne

$$\begin{aligned}
&[y + ty',\quad z + tz',\quad y' + uz',\\
&\quad Az - (B + j)y + (B - j)uz - Cuy + \theta'(y' + uz')]\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -B - j - Cu \\ 0 & 1 & 0 & A + Bu - ju \\ t & 0 & 1 & \theta' \\ 0 & t & u & \theta' u \end{vmatrix} (y,\ z,\ y',\ z')\\
&= t(A + 2Bu + Cu^2)(y,\ z,\ y',\ z') = 0.
\end{aligned}$$

Les foyers cherchés sont donc les points (16), u étant déterminé par l'équation $A + 2Bu + Cu^2 = 0$. Or, en variant t, le point (16) décrit la droite (15) avec $A + 2Bu + Cu^2 = 0$, c'est-à-dire une tangente flecnodale de S.

47. Courbes flecnodales d'une surface réglée et courbes de Darboux d'une surface générale. — Désignons par x les coordonnées homogènes du point mobile sur une surface *arbitraire* S, et par ξ les coordonnées homogènes du plan tangent à S. La surface S supposée non développable, nous pouvons choisir les facteurs des coordonnées de manière que les deux tangentes asymptotiques à S soient données par

$$(x\,dx) \pm (\xi\,d\xi) \tag{17}$$

pour un déplacement infinitésimal d quelconque [§ 16 (14)]. Soit S′ une autre surface non développable, $y(\eta)$ les coordonnées de ses points (plans tangents), et

$$(y\,dy) \pm (\eta\,d\eta) \tag{17'}$$

ses tangentes asymptotiques. *Supposons maintenant que les surfaces* S, S′ *se touchent le long d'une courbe* C *non asymptotique.* Sans altérer la généralité, nous pouvons supposer qu'on ait $y = x$ le long de C. Les deux surfaces se touchant suivant toute la courbe C, nous aurons la relation $\eta = \sigma\xi$ à chaque point de C. Il est aisé d'obtenir la signification géométrique du facteur σ. En effet, à chaque point x de C, les tangentes asymptotiques de S sont données par (17), où nous pouvons supposer que la différentiation se fait dans la direction de C. Pareillement on a pour les tangentes asymptotiques de S′ l'expression (17′) qui se réduit à

$$(x\,dx) \pm \sigma^2(\xi\,d\xi)$$

en vertu des relations $y = x$, $\eta = \sigma\xi$ valables le long de toute la courbe C. Donc : *A chaque point de* C, *le couple des tangentes asymptotiques de* S, *et également celui des tangentes asymptotiques de* S′, *appartient à l'involution* J *dont les éléments doubles sont la tangente* $(x\,dx)$ *à* C *et la tangente conjuguée* $(\xi\,d\xi)$. *Les deux éléments doubles et les deux couples de tangentes asymptotiques forment quatre couples de l'involution* J. *Le rapport anharmonique de ces quatre couples est égal à* σ^4 (¹).

Or supposons que C soit une courbe de Darboux relativement à S; alors le long de C on a la relation

$$\mathrm{S}(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 0. \tag{18}$$

L'équation différentielle des lignes de Darboux de la surface S′ est

$$\mathrm{S}(dy\,d^2\eta - d\eta\,d^2y) = 0.$$

(¹) On peut dire aussi que le rapport anharmonique des quatre tangentes asymptotiques, prises dans un ordre convenable, est égal à $\left(\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1}\right)^2$.

Le long de C, le premier membre en est

$$(18') \quad \begin{aligned} & S[dx\, d^2(\sigma\xi) - d(\sigma\xi)\, d^2x] \\ & = \sigma\, S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x) + d\sigma\, S(2\, dx\, d\xi - \xi\, d^2x) \\ & = \sigma\, S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x) + 3\, d\sigma\, S\, dx\, d\xi. \end{aligned}$$

D'après (18), ceci devient

$$3\, d\sigma\, S\, dx\, d\xi.$$

Or S $dx\, d\xi \neq 0$, la courbe C n'étant pas asymptotique : *Si la courbe de contact* C [*non droite* (1)] *de deux surfaces* S, S′ *est une courbe de Darboux sur* S, *pour qu'elle soit une courbe de Darboux aussi sur* S′, *il faut et il suffit que le rapport anharmonique des tangentes asymptotiques des deux surfaces soit constant le long de* C. *Cela arrive en particulier si le contact de* S *et de* S′ *est du second ordre tout le long de* C.

Si la surface S est *réglée*, alors, comme nous l'avons vu au paragraphe **44**, à un point arbitraire de S les trois tangentes de Darboux coïncident avec la génératrice, exception faisant les points flecnodaux où les tangentes de Darboux sont indéterminées. Donc, *sur une surface réglée, une courbe non asymptotique est une courbe de Darboux si elle est une ligne flecnodale, et dans ce cas seulement.*

En appliquant la proposition générale au cas particulier où une des deux surfaces, soit S′, est réglée, nous arrivons au théorème suivant : *Si une courbe* C *tracée sur la surface* S *est une courbe de Darboux sur* S, *c'est une courbe flecnodale de la surface engendrée par les tangentes asymptotiques* (2) *de* S *le long de* C, *et réciproquement.* Voilà une nouvelle définition des lignes de Darboux d'une surface quelconque.

De ce qui précède il résulte aussi aisément le théorème suivant : *Soit donnée une courbe* C *engendrée par le point* $x(s)$, *et donnons-nous pour chaque valeur de* s *un plan* $\xi(s)$ *tangent à* C, *mais différent du plan osculateur. Il existe* ∞^1 *surfaces réglées dont* C *est une ligne flecnodale et qui touchent à chaque point* $x(s)$ *de* C *le plan* $\xi(s)$ *donné. Ces surfaces se déterminent par une*

(1) Nous avons supposé que C n'est pas une courbe asymptotique; or ici C est une courbe de Darboux sur S, de manière que ce n'est pas une asymptotique si elle n'est pas rectiligne.

(2) D'un système ou de l'autre.

quadrature. En effet, on voit de ce qui vient d'être dit qu'une surface cherchée est engendrée par la droite

$$(x\,dx) \pm \sigma^2(\xi\,d\xi),$$

en choisissant σ de manière que

$$S[dx\,d^2(\sigma\xi) - d^2x\,d(\sigma\xi)] = 0.$$

Il en résulte, d'après (18'), que les surfaces cherchées sont données par

$$(x\,dx) + t(\xi\,d\xi)$$

avec

$$t = c\,e^{-\int \frac{S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x)}{S\,dx\,d\xi}}, \tag{19}$$

c étant une constante arbitraire. En changeant le signe de c, on passe évidemment d'une surface de la famille à sa *transformée flecnodale* (*voir* § 44).

Il est intéressant à remarquer que les surfaces réglées en question s'obtiennent sans aucune quadrature, si la courbe C est *plane*. Dans ce cas, on peut supposer que $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$. Or soient (ξ_1, ξ_2, ξ_3) les coordonnées de la tangente à C, leur facteur étant choisi d'après la convention faite au paragraphe 4, ce qui n'exige que des dérivations. On a alors la relation [*voir* § 4 (5_2)]

$$\sum_{i=1}^{3} (dx_i\,d^2\xi_i - d\xi_i\,d^2x_i) = 0. \tag{20}$$

Or le plan ξ contient la droite (ξ_1, ξ_2, ξ_3) du plan $x_4 = 0$, de manière que $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varphi)$. D'après (19) et (20), *les surfaces réglées dont la courbe plane* C *donnée est une ligne flecnodale* sont engendrées par la droite

$$(x\,dx) + c(\xi\,d\xi),$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, 0), \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varphi),$$

c étant une constante et φ une fonction arbitraire. Par exemple, si C est une *conique*, on peut supposer que

$$x = (1, s, s^2, 0),$$

alors

$$\xi = (s^2, -2s, 1, \varphi)$$

et l'on trouve aisément que *les surfaces réglées dont la conique donnée est une ligne flecnodale sont engendrées par la droite* (x, y) où

$$y = [2(\varphi' + a),\ s(\varphi' + a),\ 2s\varphi,\ -2s],$$

a étant une constante et φ *une fonction arbitraire de* S.

Considérons encore une surface arbitraire S et posons, comme d'habitude,

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi, \qquad F_3 = \frac{1}{2}S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x),$$

de manière que l'élément linéaire projectif de S soit $F_3 : F_2$. D'après (18′), on a

$$S[dx\,d^2(\sigma\xi) - d^2x\,d(\sigma\xi)] = 2\sigma F_3 - 3\,d\sigma F_2.$$

Une courbe C de S est donc flecnodale sur la surface réglée engendrée par la droite

$$(x\,dx) \pm \sigma^2(\xi\,d\xi)$$

(les différentiations se rapportant à C), si

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}$$

et dans ce cas seulement. En se rappelant la signification géométrique du facteur σ, on obtient le théorème suivant :

Soit C *une courbe non asymptotique d'une surface* S; *on peut distribuer les tangentes à* S *le long de* C *en une famille* F *simplement infinie de surfaces réglées de façon que* C *soit une courbe flecnodale sur chaque surface de la famille. A chaque point de* C, *considérons l'involution ordinaire des tangentes à* S, *dont les éléments doubles sont la tangente à* C *et sa conjuguée. Soit* φ *le rapport anharmonique de quatre couples suivants de cette involution : les deux éléments doubles, le couple des tangentes asymptotiques à* S, *et celui qui contient la génératrice d'une surface réglée* R *de la famille* F. *L'accroissement de* $\log\varphi$ *le long de* C *est donné par l'intégrale*

$$\frac{8}{3}\int\frac{F_3}{F_2},$$

et cela de quelque manière que l'on choisisse la surface R *dans la famille* F.

48. **Les surfaces réglées asymptotiques d'une surface arbitraire.** — Supposons que le point $x(u, v)$ engendre une surface S non réglée, rapportée à ses asymptotiques. Gardons toutes nos notations habituelles pour la surface S. En particulier, rappelons les équations fondamentales [§ 17 (1)]

$$(21)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma\ x_u + \theta_v x_v + p_{22} x, \end{cases}$$

ainsi que les formules (¹)

$$(22)\qquad (x,\ x_u,\ x_v) = e^{\theta}\xi, \qquad (x,\ x_u,\ x_{uv}) = e^{\theta}\xi_u.$$

Appelons asymptotiques $v(u)$ celles pour lesquelles $v =$ const. ($u =$ const.). Le long d'une asymptotique u, les tangentes $(x,\ x_u)$ aux asymptotiques v engendrent une surface réglée qui sera désignée par R_1; analoguement, soit R_2 la surface engendrée par les tangentes asymptotiques $(x,\ x_v)$ le long d'une asymptotique v. Les surfaces réglées R_1 et R_2 sont les *surfaces réglées asymptotiques de la surface* S.

Nous allons calculer l'élément linéaire projectif d'une surface R_1, appartenant à $u = u_0$. Cette surface est engendrée par le point

$$(23)\qquad z = z(t,\ v) = y + tx,$$

où

$$(23')\qquad y = x_u - \frac{1}{2}\theta_u x,$$

et où l'on doit remplacer u par u_0 (²). Le plan tangent à R_1 au point z est (*voir* § 43), d'après (22),

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ y_v) + t(x,\ y,\ x_v) &= \left(x,\ x_u,\ x_{uv} - \frac{1}{2}\theta_u x_v\right) + t(x,\ x_u,\ x_v) \\ &= e^{\theta}\xi_u + \left(t - \frac{1}{2}\theta_u\right)\xi;\end{aligned}$$

(¹) La première de ces formules s'obtient de la formule (12) du paragraphe 16 [d'après § 17 (I_2)]; la seconde s'obtient en différentiant la première et en tenant compte de (21).

(²) Cette substitution sera toujours sous-entendue, pour ne pas compliquer l'écriture.

c'est donc le plan

$$\zeta = \eta + t\xi, \tag{24}$$

où

$$\eta = \xi_u - \frac{1}{2}\theta_u \xi. \tag{24'}$$

Il en résulte que

$$(x, y) = (x, x_u), \qquad (\xi, \eta) = (\xi, \xi_u);$$

donc, d'après le paragraphe 16 (13_3), $(\xi\eta) = \pm (x, y)$, de manière que, d'après les résultats du paragraphe 43, le facteur choisi pour le plan tangent ζ corresponde au facteur du point z d'après notre convention habituelle. Les formes fondamentales de R_1 sont donc (*voir* § 44)

$$\left\{\begin{aligned} F_2^{(1)} &= -S\, dz\, d\zeta, \\ F_3^{(1)} &= \frac{1}{2} S(z_v \zeta_{vv} - \zeta z_{vv})\, dv^3. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Or, d'après (23), (23'), (24) et (24'),

$$dz = z_v\, dv + z_t\, dt = \left(x_{uv} - \frac{1}{2}\theta_u x_v - \frac{1}{2}\theta_{uv} x + t x_v\right) dv + x\, dt,$$

$$d\zeta = \zeta_v\, dv + \zeta_t\, dt = \left(\xi_{uv} - \frac{1}{2}\theta_u \xi_v - \frac{1}{2}\theta_{uv}\xi + t\,\xi_v\right) dv + \xi\, dt,$$

de manière que [*voir* § 14 (5), (5_1); § 15 (8_1), (8_2), (8_3); § 17 (15), (15_1)]

$$F_2^{(1)} = -a_{12}\, dv(2\, dt + \beta\gamma\, dv). \tag{25'}$$

Il en résulte que *les asymptotiques de* R_1 *sont données par*

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{2}\beta\gamma. \tag{26}$$

Ensuite, les équations (23) et (23') donnent

$$z_{vv} = x_{uvv} - \frac{1}{2}\theta_u x_{vv} - \theta_{uv} x_v - \frac{1}{2}\theta_{uvv} x + t x_{vv},$$

de manière que, d'après (21) et (22),

$$\begin{aligned} z_{vv} = {} & \left[\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \left(t - \frac{1}{2}\theta_u\right) p_{22} + \gamma p_{11} - \frac{1}{2}\theta_{uvv}\right] x \\ & + \left[\gamma_u + \left(t + \frac{1}{2}\theta_u\right)\gamma + p_{22}\right] x_u + \left[\beta\gamma + \left(t - \frac{1}{2}\theta_u\right)\theta_v\right] x_v + \theta_v x_{uv}; \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\frac{1}{a_{12}} S z_{vv} \zeta_v = \frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \gamma p_{11} + \theta_v \beta\gamma + \frac{1}{2}\theta_u \gamma_u + \frac{1}{4}\theta_u^2 \gamma$$
$$- \frac{1}{2}\theta_{uvv} + \frac{1}{2}\theta_v \theta_{uv} - t\gamma_u - t^2\gamma.$$

On en obtient (*voir* § 17) $S\zeta_{vv} z_v$, en remplaçant β, γ, p_{11}, p_{22} respectivement par $-\beta$, $-\gamma$, π_{11}, π_{22}, de manière que

$$\frac{1}{a_{12}} S(z_v \zeta_{vv} - z_{vv}\zeta_v)$$
$$= \frac{\partial(\pi_{22} - p_{22})}{\partial u} - \gamma(p_{11} + \pi_{11}) - \theta_u \gamma_u - \frac{1}{2}\theta_u^2 \gamma + 2t\gamma_u + 2t^2\gamma.$$

Or [*voir* § 17 (16), (16$_1$)]

$$\pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \theta_u \gamma, \qquad \pi_{11} + p_{11} = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - L.$$

Donc, d'après (25),

$$(25'') \qquad F_3^{(v)} = \frac{a_{12}}{2}(\gamma_{uu} + L\gamma + 2t\gamma_u + 2t^2\gamma)\, dv^3.$$

Des équations (25′) et (25″), on obtient *l'élément linéaire projectif cherché de la surface* R_1 :

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\gamma_{uu} + L\gamma + 2t\gamma_u + 2t^2\gamma)\, dv^2}{2\,dt + \beta\gamma\, dv}.$$

Les deux lignes flecnodales de la surface R_1 sont déterminées par l'équation

$$\gamma_{uu} + L\gamma + 2t\gamma_u + 2t^2\gamma = 0.$$

Le conjugué harmonique du point x par rapport aux points flecnodaux de R_1 est donc donné par $\gamma_u + 2t\gamma = 0$; c'est donc le point

$$y - \frac{1}{2}\frac{\gamma_u}{\gamma} x = x_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma} + \theta_u\right) x$$

qui *est* (*voir* § 33) *situé sur la (seconde) directrice de Wilczynski. Les deux lignes flecnodales de la surface réglée* R_1 *coïncident si*

$$(27) \qquad L = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)^2 - \frac{\gamma_{uu}}{\gamma}.$$

D'après le paragraphe 31 (1), *l'équation* (27) *est encore la condi-*

tion pour qu'une famille de développables de la congruence des (premières ou secondes) directrices de Wilczynski corresponde aux asymptotiques v.

49. **Courbes remarquables tracées sur la surface R_1.** — Nous avons vu que les asymptotiques de la surface réglée R_1 sont données par l'équation (26). Outre les asymptotiques, on peut considérer d'autres familles remarquables de lignes tracées sur R_1. En premier lieu, ce sont les lignes $t=$ const. On peut les définir géométriquement d'une manière simple. En effet, la génératrice de R_1 ayant un contact du second ordre avec S, elle coupe trois lignes asymptotiques u infiniment voisines de S. *Les courbes* $t=$ const. *de la surface* R_1 *sont caractérisées par la double propriété suivante : 1° elles coupent les génératrices dans des ponctuelles toutes homographiques entre elles; 2° à ces courbes appartiennent trois asymptotiques u infiniment voisines de la surface* S_1. Nous laissons la démonstration au soin du lecteur. Les courbes $t=$ const. et les asymptotiques (26) sont deux cas particuliers des lignes tracées sur R_1 définies par l'équation

$$\frac{dt}{dv}=\frac{h-1}{2}\beta\gamma, \tag{26'}$$

h étant une constante arbitraire. Or je dis que *les courbes* (26') *jouissent,* quelle que soit la valeur de h, *de la propriété suivante : Aux points de chaque génératrice* (x, x_u), *leurs tangentes forment une série de génératrices de la quadrique de Darboux* (relative à la surface S) *d'indice h* (*voir* § 20). Pour les asymptotiques (26), $h=0$ et la quadrique correspondante est la quadrique de Lie; c'est d'ailleurs la définition de la quadrique de Lie. Pour les courbes $t=$ const., on a $h=1$ et la quadrique de Darboux correspondante est celle étudiée par M. Bompiani (*voir* § 20). La démonstration est simple; la tangente à une courbe (26') contient le point $z=y+tx$ et le point

$$\frac{dz}{dv}=y_v+tx_v+\frac{dt}{dv}x=x_{uv}+\left(t-\frac{1}{2}\theta_u\right)x_v+\left(\frac{h-1}{2}\beta\gamma-\frac{1}{2}\theta_{uv}\right)x,$$

de manière que le résultat soit évident d'après le paragraphe 20 (11_1).

50. **Les surfaces R_1, R_2 et le faisceau canonique.** — Posons

$$K=-\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u\,\partial v},\qquad H=\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2\log(\beta:\gamma)}{\partial u\,\partial v}.$$

On voit aisément que ces deux quantités sont intrinsèques; ce sont donc des invariants projectifs de la surface S. Rappelons aussi que la seconde droite canonique de paramètre λ (§ 35) joint les points

$$2y+\left[(2\lambda+1)\frac{\beta_u}{\beta}+(4\lambda+1)\frac{\gamma_u}{\gamma}\right]x,$$

$$2\bar{y}+\left[(4\lambda+1)\frac{\beta_v}{\beta}+(2\lambda+1)\frac{\gamma_u}{\gamma}\right]x,$$

y étant défini par (23′) et

$$\overline{y} = x_v - \frac{1}{2}\theta_v x.$$

L'intersection de la droite canonique de paramètre λ avec la génératrice (x, x_u) de R_1 appartient donc à

$$2t = (2\lambda + 1)\frac{\beta_u}{\beta} + (4\lambda + 1)\frac{\gamma_u}{\gamma}.$$

En écrivant que la courbe décrite par cette intersection en variant v appartient au système (26′), on obtient la condition

$$\lambda H + (3\lambda + 1)K = 1 - h. \tag{28}$$

En remplaçant R_1 avec R_2, et en considérant la droite canonique de paramètre μ (au lieu de λ), on obtient la condition analogue

$$-\mu H + (3\mu + 1)K = 1 - h. \tag{28′}$$

Nous connaissons ainsi une propriété caractéristique des surfaces S pour lesquelles il existe entre les deux invariants H et K une relation linéaire

$$aH + bK + c = 0$$

(a, b, c constantes; a, b pas nulles à la fois).

Signalons deux cas particuliers remarquables : 1° Les intersections des (secondes) normales projectives de S avec les génératrices correspondantes de R_1 engendrent une asymptotique sur R_1 si $K = 1$ et dans ce cas seulement; on obtient la même condition en remplaçant R_1 par R_2. 2° Une surface R_0 (§ 29) est caractérisée par l'équation $\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\, \partial v} = 0$ ou $\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\, \partial v} = 0$. Pour fixer les idées, considérons le cas $\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\, \partial v} = 0$ ou $H = K$, où le réseau de déformation projective se réduit aux asymptotiques v.

Ces surfaces sont caractérisées par la propriété que les intersections des directrices de Wilczynski $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ avec les génératrices correspondantes de R_1 forment une courbe $t =$ const. sur R_1 et aussi par l'autre propriété que les intersections des arêtes de Green $\left(\mu = -\frac{1}{4}\right)$ avec les génératrices correspondantes de R_2 forment une courbe $t =$ const. sur R_2.

En particulier, les équations (28) et (28′) donnent des propriétés caractéristiques des surfaces pour lesquelles les deux invariants H et K sont des constantes. Bornons-nous à la remarque que les valeurs constantes de H et K ne peuvent pas être quelconques. Quatre cas seulement sont possibles :

$(29_1)\qquad H = 0, \qquad K$ arbitraire;

$(29_2)\qquad H = \pm 1, \qquad K = -1;$

$(29_3)\qquad H = \pm \frac{4}{3}, \qquad K = -\frac{2}{3};$

$(29_4)\qquad H = \pm \frac{3}{2}, \qquad K = -\frac{1}{2}.$

Les surfaces (29_1) ont la propriété caractéristique de posséder ∞^3 déformées projectives (*voir* § 29); pour $K = -2$ elles ont aussi la propriété caractéristique d'appartenir à des complexes linéaires (*voir* § 17); les (29_1) peuvent être caractérisées comme des surfaces R_0 dont les asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires. Les surfaces (29_1) dépendent, si $K = -2$, de deux fonctions arbitraires d'un argument; pour chaque valeur de $K \neq -2$ elles dépendent seulement de six constantes arbitraires (Cartan [4]). Les surfaces (29_2), (29_3) et (29_4) dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

Pour la théorie systématique des surfaces réglées, voir *G. P. D.*, Chap. IV, ainsi que les traités de MM. Wilczynski (Chap. IV-XII) et Čech (Chap. IV). La congruence flecnodale a été étudiée par MM. Wilczynski [5], [10] et Mentré [11]. Les résultats du paragraphe 47 ont été donnés par Čech [12]. Les surfaces réglées asymptotiques ont été étudiées par M. Wilczynski [15]; *voir* aussi Godeaux [1]. Les surfaces réglées plus générales ayant pour génératrices les tangentes asymptotiques à une surface courbe S le long d'une courbe *quelconque* de S ont été considérées par MM. Bompiani [32], [45], Klobouček [1], Lane [11]. La relation entre les directrices de Wilczynski et les points flecnodaux des surfaces R_1, R_2 a été donnée par M. Demoulin [3]; *voir* Godeaux [9]. Le théorème à la fin du paragraphe 48 a été donné essentiellement par M. Godeaux [2]. Les résultats exposés aux paragraphes 49 et 50 sont nouveaux (Čech).

Pour des questions particulières, *voir* encore Bioche [1] (courbes particulières sur une surface réglée) et [2], [3] (asymptotiques cubiques); Bompiani [20] (systèmes axiaux) et [30] (pangéodésiques); Carpenter [1], [3], [8] (propriétés flecnodales), [2] (équations fondamentales), [4], [5], [6] (configurations covariantes), [7], [9] (triples de surfaces réglées); Čech [1] (élément du troisième ordre), [5] (surfaces réglées particulières), [6] (élément du quatrième ordre), [20] (théorie générale); Gambier [1], [2] (asymptotiques appartenant à des complexes linéaires); Hedley [1], [2] (propriétés flecnodales); Jamet [1] (asymptotiques); Klapka [1], [3], [6] (propriétés flecnodales); Kœnigs [4], [12], [13] (asymptotiques); Lane [3] (correspondances entre deux surfaces réglées); Lasley [1] (propriétés flecnodales); Mac Lean [1] (configurations covariantes); M^{lle} Mancinelli [1] (asymptotiques cubiques); Mayer [1], [2] (transformation harmonique, propriétés flecnodales, surfaces réglées particulières); Mentré [2] (déformation projective d'une surface réglée considérée comme lieu de ∞^1 droites) et [13] (complexe flecnodale); Pittarelli [1] (asymptotiques); Sisam [1] (surfaces réglées autoduales); Sun [1] (configurations covariantes); Tzitzéica [3], [5], [12], [24] (propriétés flecnodales, surfaces réglées particulières); Voss [1], [2] (asymptotiques et courbes flecnodales); Wilczynski [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [11], [12] (*voir* le Traité de M. Wilczynski).

La théorie des congruences W dont les deux nappes sont réglées peut être présentée comme une extension de la théorie des surfaces réglées, *voir* Klapka [2], [4], [5]; pour ces congruences W, *voir* encore C. Segre [3], [9]; Fubini [21]; Tortorici [1], [2].

Pour des généralisations aux hyperespaces, *voir* Bompiani [9], [42]; Čech [19] et *G. P. D.*, § 112, 113; Mohrmann [1]; Moore [1], [2]; Moreno [1]; C. Segre [7], [8]; Stouffer [1], [4].

Pour la théorie analytique des congruences W, qui ont pour nappes focales des surfaces réglées, le lecteur trouvera un exposé systématique dans la *G. P. D.* (Chap. V), où il pourra trouver aussi la théorie complète de quelques transformations asymptotiques.