CHAPITRE XII.

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DE PFAFF.

70. Le produit extérieur. — Dans ce chapitre nous donnerons un bref résumé de divers théorèmes concernant les équations de Pfaff dont nous ferons usage aux deux chapitres suivants. Nous supprimerons presque toutes les démonstrations que le lecteur trouvera dans l'Ouvrage de M. Goursat : *Leçons sur le problème de Pfaff*.

Soient

$$\omega_1 = \omega_1(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{1r} x_r,$$

$$\omega_2 = \omega_2(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{2r} x_r,$$

deux formes linéaires de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Nous introduirons une autre série de n variables $x'_1, \ldots, x'_n$ indépendantes entre elles et des $x_1, \ldots, x_n$ et nous formerons la forme bilinéaire alternée

$$\omega_1(x)\,\omega_2(x') - \omega_2(x)\,\omega_1(x');$$

nous l'appellerons le *produit extérieur* des deux formes linéaires ω_1 et ω_2, et nous la désignerons par $[\omega_1 \omega_2]$. Évidemment

$$[\omega_1 \omega_2] = \sum_{(rs)}^{(n)} (a_{1r} a_{2s} - a_{1s} a_{2r})(x_r x'_s - x_s x'_r),$$

la somme $\sum\limits_{(rs)}^{(n)}$ étant étendue à toutes les *combinaisons* des indices $1, 2, \ldots, n$ deux à deux.

Le produit extérieur obéit évidemment aux trois règles suivantes :

1° La loi *distributive*

$$[\omega_1 + \omega_2, \omega_3] = [\omega_1 \omega_3] + [\omega_2 \omega_3],$$
$$[\omega_1, \omega_2 + \omega_3] = [\omega_1 \omega_2] + [\omega_1 \omega_3];$$

2° La loi de la *multiplication scalaire*

$$[\alpha\omega_1, \beta\omega_2] = \alpha\beta[\omega_1 \omega_2];$$

3° La loi *anticommutative*

$$[\omega_2 \omega_1] = -[\omega_1 \omega_2].$$

Les produits extérieurs jouissent de la propriété de *covariance* par rapport à une substitution linéaire. Posons

$$(1) \qquad x_r = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{rs} y_s, \qquad x'_r = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{rs} y'_s$$

et désignons par Ω_1, Ω_2 ce que deviennent les formes ω_1, ω_2 moyennant (1_1); alors

$$[\omega_1 \omega_2] = [\Omega_1 \Omega_2]$$

en vertu de la substitution (1).

Si les formes linéaires $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont linéairement indépendantes, les formes bilinéaires $[\omega_r \omega_s]$ $(1 \leq r < s \leq n)$ le sont aussi. Supposons, par impossible, qu'on ait une relation

$$(2) \qquad \sum_{(rs)}^{(n)} c_{rs}[\omega_r \omega_s] = 0,$$

les quantités c_{rs} n'étant pas toutes nulles. Pour fixer les idées, soit $c_{12} \neq 0$. Or les formes ω_r étant linéairement indépendantes, on peut déterminer des valeurs de x_r et x'_r telles que

$$\omega_1(x) = 1, \qquad \omega_r(x) = 0 \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$
$$\omega_2(x') = 1, \qquad \omega_s(x') = 0 \qquad (s = 1, 3, \ldots, n).$$

L'équation (2) devient alors, contre la supposition, $c_{12} = 0$.

Nous aurons souvent à invoquer le suivant *lemme de M. Cartan* (1) :

---

(1) Voir *Bull. de la Soc. math.*, t. 47, 1919, p. 151.

Soient données $2\nu\ (1 \leqq \nu \leqq n)$ formes linéaires

$$(3) \qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu;$$

$$(3') \qquad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_\nu,$$

vérifiant la relation extérieure

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{\nu} [\omega_r \tau_r] = 0,$$

les formes (3) étant linéairement indépendantes. Alors les formes (3′) en dépendent linéairement, c'est-à-dire on a des relations de la forme

$$(5) \qquad \tau_r = \sum_{s=1}^{\nu} c_{rs}\,\omega_s;$$

en outre le tableau des coefficients c_{rs} est symétrique, c'est-à-dire $c_{rs} = c_{sr}$.

Démonstration. — On peut ajouter à (3) $n - \nu$ formes linéaires auxiliaires $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_n$ de manière que les n formes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n$$

soient linéairement indépendantes. Chaque forme linéaire en est alors une combinaison linéaire; en particulier, on peut poser

$$\tau_r = \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\,\omega_s = \sum_{s=1}^{\nu} c_{rs}\,\omega_s + \sum_{s=\nu+1}^{n} c_{rs}\,\omega_s.$$

La relation (4) devient

$$0 = \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}[\omega_r \omega_s]$$

ou bien

$$\sum_{(rs)}^{(\nu)} (c_{rs} - c_{sr})[\omega_r \omega_s] + \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{s=\nu+1}^{n} c_{rs}[\omega_r \omega_s] = 0.$$

Or nous savons que les produits extérieurs qui y apparaissent sont linéairement indépendants, d'où résulte

$$c_{rs} = c_{sr} \qquad \text{pour } 1 \leqq r,\ s \leqq \nu;$$
$$c_{rs} = 0 \qquad \text{pour } 1 \leqq r \leqq \nu,\ \nu + 1 \leqq s \leqq n,$$

ce qui conduit aux relations (5).

71. **Le covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff.** — Nous appliquerons les définitions et propositions qui précèdent aux *formes de Pfaff* (formes linéaires de différentielles). Donc, si

$$\omega_1 = \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\, dx_r, \qquad \omega_2 = \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\, dx_r,$$

les quantités a_{1r} et a_{2r} étant des fonctions analytiques de n variables $x_1, \ldots, x_n$, nous poserons

$$\begin{aligned}[][\omega_1 \omega_2] &= \omega_1(d)\,\omega_2(\delta) - \omega_1(\delta)\,\omega_2(d)\\ &= \sum_{(rs)}^{(n)} (a_{1r} a_{2s} - a_{1s} a_{2r})(dx_r\, \delta x_s - \delta x_r\, dx_s),\end{aligned}$$

d et δ étant deux différents symboles de différentiation. Ce produit extérieur jouit de la propriété de covariance par rapport à une substitution analytique quelconque. Posons

$$x_r = \varphi_r(y_1, \ldots, y_m), \tag{6}$$

φ_r étant des fonctions analytiques; l'effet de cette substitution sur les différentielles est donné par la substitution *linéaire*

$$dx_r = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_s}\, dy_s, \qquad \delta x_r = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_s}\, \delta y_s, \tag{6'}$$

de manière que ω_1 et ω_2 se changent en deux formes de Pfaff Ω_1, Ω_2, où apparaissent les variables y et leurs différentielles; en vertu de (6) et (6'), on a

$$[\omega_1 \omega_2] = [\Omega_1 \Omega_2].$$

D'une forme de Pfaff

$$\omega = \omega(d) = \sum_{r=1}^{n} a_r\, dx_r,$$

on peut déduire la forme bilinéaire alternée ([1])

$$\omega' = d\,\omega(\delta) - \delta\,\omega(d) = \sum_{r=1}^{n} (da_r\,\delta x_r - \delta a_r\,dx_r)$$

$$= \sum_{(rs)}^{(n)} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s}{\partial x_r}\right)(dx_s\,\delta x_r - dx_r\,\delta x_s).$$

Nous l'appellerons la *dérivée extérieure* de la forme de Pfaff; nous désignerons toujours la différentiation extérieure par un accent. On appelle ω' aussi le *covariant bilinéaire* car, ici encore, on a $\Omega' = \omega'$ en vertu de (6) et (6′).

On démontre aisément les règles suivantes pour la différentiation extérieure : 1° on a $\omega' = 0$ si et seulement si ω est une différentielle exacte d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$; 2° $(\omega_1 + \omega_2)' = \omega'_1 + \omega'_2$; 3° α étant une fonction analytique de $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$(\alpha\omega)' = \alpha.\omega' + [d\alpha, d\omega].$$

La propriété de covariance du produit extérieur et de la dérivée extérieure nous sera utile sous deux aspects différents : 1° Si $m = n$ et si le jacobien de la substitution (6) est différent de zéro, alors la substitution (6) signifie simplement un changement des variables indépendantes; on voit que les expressions $[\omega_1\omega_2]$ et ω' sont essentiellement indépendantes du choix des variables indépendantes; dans les applications qui suivront, il ne sera jamais nécessaire de fixer ce choix, tous les calculs à faire étant invariants. 2° Si $m < n$, la substitution (6) équivaut à l'introduction de certaines relations entre les variables $x_1, \ldots, x_n$; et la propriété d'invariance dit que chaque relation entre des expressions de la forme $[\omega_1\omega_2]$ et ω' reste conservée si l'on introduit des liaisons quelconques entre les variables $x_1, \ldots, x_n$. Naturellement, ces liaisons peuvent avoir comme conséquence des nouvelles relations entre ces expressions.

72. Systèmes de Pfaff complètement intégrables. — Soit

$$(7) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_\nu = 0,$$

un système d'équations de Pfaff à n variables $x_1, \ldots, x_n$. Nous sup-

---

(1) On suppose $d\delta = \delta d$.

poserons que les formes ω_r $(1 \leqq r \leqq \nu)$ sont linéairement indépendantes, d'où $\nu \leqq n$; d'ailleurs, on peut supposer $\nu < n$, le cas $\nu = n$ étant sans intérêt. On dit que le système (7) est *complètement intégrable* s'il est équivalent au système

$$df_1 = 0, \quad \ldots, \quad df_\nu = 0, \tag{7'}$$

f_r $(1 \leqq r \leqq \nu)$ étant des fonctions indépendantes des variables $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire si

$$\omega_r = \sum_{s=1}^{\nu} c_{rs}\, df_s.$$

Un système de relations entre $x_1, \ldots, x_n$ constitue alors une solution de (7) s'il en résulte

$$f_1 = c_1, \qquad f_r = c_r,$$

c_r $(1 \leqq r \leqq \nu)$ étant des constantes, et dans ce cas seulement. Dans le cas $\nu = n - 1$, le système (7) est *toujours* complètement intégrable.

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que le système (7) soit complètement intégrable est que les équations

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_\nu = 0, \tag{8}$$

obtenues en différentiant extérieurement les équations (7) soient une conséquence « algébrique » des équations

$$\begin{aligned} \omega_1(d) &= 0, & \ldots, \quad \omega_\nu(d) &= 0, \\ \omega_1(\delta) &= 0, & \omega_\nu(\delta) &= 0. \end{aligned}$$

Cela peut aussi s'exprimer de la façon suivante : Pour chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$, appelons *élément linéaire* chaque n-uple $(dx_1, \ldots, dx_n)$; un élément linéaire est dit *intégral* s'il satisfait aux équations du système de Pfaff donné (7); deux éléments linéaires $(dx_1, \ldots, dx_n)$ et $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ sont dits *en involution* [par rapport au système (1)] s'ils vérifient les équations (8). En employant cette terminologie, on voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que le système* (7) *soit complètement intégrable est que, à chaque point* $(x_1, \ldots, x_n)$, *chaque couple d'éléments linéaires intégraux soit en involution*.

73. Le système caractéristique d'un système de Pfaff. — Considérons toujours le système de Pfaff

$$\omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_\nu = 0 \tag{7}$$

sans supposer qu'il soit complètement intégrable. On vérifie aisément que la propriété de deux éléments linéaires *intégraux* $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ d'être en involution ne change ni par un changement de variables indépendantes ni par le passage de (7) à un système *équivalent*

$$\sum_{s=1}^{\nu} c_{rs}\omega_s = 0 \qquad (1 \leqq r \leqq \nu;\ |c_{rs}| \neq 0).$$

Particulièrement importants sont les éléments linéaires *caractéristiques*; ce sont les éléments linéaires *intégraux* qui sont en involution avec *chaque* élément linéaire *intégral* issu du même point $(x_1, \ldots, x_n)$. Les éléments linéaires caractéristiques sont ceux qui satisfont à un certain système de Pfaff (C). Le système (C) s'obtient évidemment de la manière suivante. Choisissons $n - \nu$ formes de Pfaff $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_n$ telles que les formes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n$$

soient linéairement indépendantes. Chaque expression bilinéaire alternée en $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ peut s'écrire comme expression bilinéaire alternée en

$$\omega_1(d), \quad \ldots, \quad \omega_n(d), \quad \omega_1(\delta), \quad \ldots, \quad \omega_n(\delta).$$

En particulier, les premiers membres des équations

$$\omega'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega'_\nu = 0 \tag{8}$$

peuvent s'écrire ainsi. En ordonnant ces premiers membres d'après

$$\omega_1(\delta), \quad \omega_2(\delta), \quad \ldots, \quad \omega_n(\delta)$$

et en annulant les coefficients de

$$\omega_{\nu+1}(\delta), \quad \ldots, \quad \omega_n(\delta),$$

on obtient un certain nombre d'équations de Pfaff. Le système (C) s'obtient en ajoutant ces équations aux équations (7).

Évidemment, le système (C) coïncide avec (7) si le système (7) est complètement intégrable et dans ce cas seulement.

L'importance du système (C) découle du fait qu'*il est toujours complètement intégrable*; d'ailleurs, c'est le plus petit système complètement intégrable contenant le système (7). Le système (C) peut donc s'écrire

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{\nu+k} = 0,$$

$y_1, \ldots, y_{\nu+k}$ étant des fonctions indépendantes des variables $x_1, \ldots, x_n$; le nombre k s'appelle la *classe* du système de Pfaff (7). Pour un système complètement intégrable, on a $k = 0$ et *vice versa*; le cas $k = 1$ est impossible. Si $\nu + k < n$, on peut ajouter aux fonctions $y_1, \ldots, y_{\nu+k}$, $n - \nu - k$ autres fonctions $y_{\nu+k+1}, \ldots, y_n$ de manière que toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ soient indépendantes; alors on peut introduire $y_1, \ldots, y_n$ au lieu de $x_1, \ldots, x_n$ comme nouvelles variables indépendantes; or le système (7) transformé au moyen de cette substitution est équivalent à un système *ne contenant que les* $\nu + k$ *variables* $y_1, \ldots, y_{\nu+k}$ qu'on appelle les *variables caractéristiques* du système (7). Si $\nu + k = n$, les variables $x_1, \ldots, x_n$ elles-mêmes sont caractéristiques et leur nombre ne peut plus être abaissé par un nouveau choix de variables indépendantes.

74. **Les systèmes de Pfaff en involution.** — Considérons un système de Pfaff à n variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(7) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_\nu = 0.$$

Supposons que les formes de Pfaff

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu$$

soient linéairement indépendantes. On peut considérer les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des coordonnées (non homogènes) dans un espace $\mathcal{E}$ à n dimensions. Une variété à p dimensions de cet espace sera appelée *solution à p dimensions du système* (7) si tous ses éléments linéaires satisfont aux équations (7). Analytiquement, une solution à p dimensions du système (7) est donc donnée par des équations de la forme

$$(\star) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ_i étant des fonctions analytiques de p variables auxiliaires $u_1, u_2, \ldots, u_p$ assujetties à la condition que les équations (7) soient identiquement vérifiées en y remplaçant les x_i par les valeurs (✱) et, simultanément, les dx_i par les valeurs

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_p} dp$$

obtenues en différentiant les équations (✱). Pour que la solution ait effectivement p dimensions, il faut supposer encore qu'il y ait parmi les fonctions φ_i p indépendantes entre elles. En remplaçant les $u_1, \ldots, u_p$ par p fonctions indépendantes de p nouvelles variables, on obtient de (✱) une solution *formellement* distincte, mais que l'on regardera comme identique à la solution (✱); ce qui importe, c'est l'ensemble des relations entre les x_i seules équivalant aux équations paramétriques (✱).

Particulièrement simple est l'étude des solutions à *une* dimension (1). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le système (7) a la forme

$$dx_j = \tau_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

les seconds membres étant des formes de Pfaff qui ne contiennent que les différentielles $dx_{\nu+1}, \ldots, dx_n$. On voit sans difficulté que dans la solution à une dimension $x_i = \varphi_i(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les fonctions $\varphi_{\nu+1}(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent être choisies arbitrairement; pour déterminer les autres fonctions $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_p(u)$, on n'a alors qu'à intégrer un système d'équations différentielles ordinaires. En se rappelant qu'une solution ne change pas en posant $u = \varphi(v)$, on voit que dans le cas $\nu < n - 1$ la solution générale à une dimension dépend de $n - \nu - 1$ fonctions arbitraires d'un argument; dans le cas $\nu = n - 1$, la solution générale à une dimension dépend de $n - 1$ constantes arbitraires.

Beaucoup moins élémentaire est le cas des solutions à plus d'une dimension. Nous nous bornerons à considérer les solutions à *deux* dimensions. Rappelons que deux éléments linéaires *intégraux* $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ et $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ issus du même point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appellent *en involution* s'ils vérifient les équations

$$(8) \qquad \omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_\nu = 0$$

---

(1) Les équations (7) et (8) étant linéaires et homogènes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, les éléments linéaires intégraux en involution avec E forment un système linéaire.

obtenues de (7) par différentiation extérieure. Un élément linéaire intégral $E = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ étant donné, appelons pour un moment *caractère* de E le nombre ρ des éléments linéaires intégraux linéairement indépendants issus du même point et en involution avec E (1). On a toujours $\rho \geqq 1$, car l'élément E lui-même est évidemment en involution avec E. En excluant des éléments E exceptionnels satisfaisant à certaines égalités qui ne sont pas vérifiées identiquement, le nombre ρ a une valeur *fixe* ρ_0 qui est appelée le caractère du système de Pfaff. Le caractère des éléments linéaires intégraux exceptionnels ou, comme nous les appellerons, *singuliers* est, si de tels éléments existent, supérieur à ρ_0. Une solution du système de Pfaff (7) sera appelée *singulière* si tous ses éléments linéaires sont singuliers. Dans les applications qui suivront, nous n'aurons pas à considérer de solutions singulières.

Cela posé, nous dirons que le système de Pfaff (7) est *en involution* (par rapport aux solutions à deux dimensions) si son caractère ρ_0 est $\geqq 2$. On peut démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution à deux dimensions contenant une courbe intégrale arbitrairement donnée est que le système (7) soit en involution. On peut donner un énoncé beaucoup plus précis : *Soit* C *une courbe intégrale non singulière. Si* $\rho_0 = 2$, *il existe une et une seule solution à deux dimensions contenant la courbe* C. *Si* $\rho_0 \geqq 3$, *les solutions à deux dimensions contenant la courbe* C *dépendent de* $\rho_0 - 2$ *fonctions arbitraires de deux arguments*. Dans nos applications, nous n'aurons qu'à considérer le cas $\rho_0 = 2$. Les courbes intégrales C dépendent, comme nous l'avons vu plus haut, de $n - \nu - 1$ fonctions arbitraires d'un argument (2); elles sont en général non singulières. Chaque courbe intégrale non singulière donne *une* solution non singulière à deux dimensions; or chaque courbe contenue dans une solution donnée à deux dimensions (de telles courbes dépendent évidemment d'une fonction arbitraire d'un argument) donne la même solution. Donc, *dans le cas* $\rho_0 = 2$, *les solutions non singulières à deux dimensions dépendent de* $n - \nu - 2$ *fonctions arbitraires d'un argument* (3).

---

(1) Géométriquement, ce sont des *courbes* de l'espace $\mathcal{E}$ que nous appellerons *courbes intégrales* du système (7).

(2) L'existence des solutions à une dimension exige évidemment qu'il soit $\nu \leqq n-2$.

(3) Cela suppose que $\nu \leqq n-3$; or, dans le cas $\nu = n-2$, on voit sans peine que le

Dans nos applications, nous aurons à considérer seulement des systèmes d'équations de Pfaff (7) pour lesquels les équations (8) ont une forme particulièrement simple. Précisément : les équations (8) prendront, en vertu des équations (7) elles-mêmes. la forme suivante :

$$(9)\qquad \sum_{s=1}^{n-\nu-2} [\tau_s \omega_{rs}] + a_r[\Omega_1 \Omega_2] = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\nu-2).$$

Ici, les τ_s, Ω_1, Ω_2 seront des formes de Pfaff telles que les n formes de Pfaff

$$(10)\qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu; \quad \Omega_1, \quad \Omega_2; \quad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_{n-\nu-2}$$

seront linéairement indépendantes. Les ω_{rs} seront des combinaisons linéaires des Ω_1, Ω_2 telles que le déterminant

$$D = |\omega_{rs}| \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n-\nu-2)$$

ne sera pas identiquement égal à zéro. Nous allons calculer le caractère ρ_0 d'un tel système de Pfaff. A cet effet, partons d'un élément linéaire intégral $E = (\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$. Désignons par ε_1, ε_2, e_r, t_s, e_{rs} ce que deviennent les formes Ω_1, Ω_2, ω_r, τ_s, ω_{rs} pour l'élément E. Pour un élément linéaire intégral $E_1 = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ en involution avec E, on a les conditions (7) ainsi que

$$\sum_{s=1}^{n-\nu-2} (\tau_s e_{rs} - t_s \omega_{rs}) + a_r(\Omega_1 \varepsilon_2 - \Omega_2 \varepsilon_1) = 0.$$

On voit que, si le déterminant $|e_{rs}|$ est différent de zéro, on peut donner arbitrairement les valeurs de Ω_1 et Ω_2 relatives à E_1 ; les valeurs des autres formes de Pfaff (10) sont alors déterminées sans ambiguïté. Les formes (10) étant linéairement indépendantes, on voit que $\rho_0 = 2$, les éléments linéaires intégraux singuliers étant ceux pour lesquels $D = 0$. Donc, sous les hypothèses actuelles, *le système* (7) *est en involution et sa solution générale* (*à deux dimensions*) *dépend de* $n - \nu - 2$ *fonctions arbitraires d'un argument*. Les solutions singulières, si elles existent, annulent tous les coefficients de D. Sur une

---

système (7) ne peut être en involution que dans le cas où il est complètement intégrable; les solutions à deux dimensions dépendent alors de $n - 2$ constantes arbitraires.

solution non singulières à deux dimensions, les courbes intégrales *singulières* [que nous appellerons *caractéristiques* du système de Pfaff (7)] s'obtiennent en intégrant l'équation $D = 0$ qui est, pour une solution à deux dimensions donnée, une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du $(n - \nu - 2)^{\text{ième}}$ degré. Donc il y a sur chaque solution non singulière à deux dimensions $n - \nu - 2$ systèmes ∞^1 de caractéristiques qui peuvent d'ailleurs coïncider en partie ou totalement.

De la discussion qui vient d'être faite on déduit sans difficulté qu'*une solution* (non singulière) *à deux dimensions laisse indépendantes les formes de Pfaff* Ω_1, Ω_2. Nous exprimerons ce fait en disant que le système de Pfaff (7) est en involution *par rapport* à Ω_1, Ω_2. L'importance de ce fait résulte des remarques suivantes : nous ferons usage du système de Pfaff (7) pour déterminer des surfaces S de l'espace ordinaire jouissant de certaines propriétés. Parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ figureront des coordonnées curvilignes u, v de la surface S; et il est évident que seulement ces solutions (7) auront intérêt pour notre but qui laissent indépendantes les variables u, v. Or toutes les solutions à deux dimensions de (7) auront cette propriété, car les formes Ω_1, Ω_2 ne contiendront que les différentielles du, dv, de manière que l'indépendance linéaire de Ω_1, Ω_2 assurera celle de du, dv.