Úvod do neeukleidovské geometrie

Úvod

In: Václav Hlavatý (author): Úvod do neeukleidovské geometrie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1926. pp. 7–[22].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402722

Kapitola I.

ÚVOD.

§ 1. Všeobecné poznámky.

V této práci snažím se podati, pokud možno populárně, úvod do geometrie neeuklidovské. Při tom omezuji se jen na geometrické výzkumy, které dnes možno pokládati za klasické a nebéřu zřetel k výzkumům doby současné, které jsou méně vhodné k popularisaci. Vzhledem k tomu, že kniha je psána pro širší kruhy, i nematematické, omezuji se jen na studium v rovině. Proto může knížku čísti každý, kdo má matematickou průpravu, rovnající se průpravě ze střední školy.

V únoru tohoto roku (1926) bylo tomu sto let, kdy ruský matematik *Lobačevský* vystoupil na veřejnost se svými úvahami o neeuklidovské geometrii. Nebyl prvým ani posledním, který se těmito problémy zabýval. Dávno před ním a dlouho po něm byla neeuklidovská geometrie předmětem úvah, jež často zdánlivě spolu nesouvisely. Jednotící princip těmto a podobným úvahám dal německý matematik *F. Klein* svojí definicí geometrie. (Viz § 5, odst. 3 a kap. II.) Tím byla postavena kostra stavby geometrie a monografická pojednání ji měla vyplniti. Zároveň však se klasická neeuklidovská geometrie stala disciplinou uzavřenou a proto badání o ní více méně neplodným. Z toho důvodu nepodávám v této práci nových původních výsledků, nýbrž omezuji se na shrnutí nejzákladnějších poznatků formou pokud možno přístupnou. S tím též souvisí, že zásadně necituji pojednání nebo větší práce z tohoto oboru. Čtenář, který se o tyto problémy zajímá, najde si v literárních poznámkách na konci knihy některé prameny, které ho dovedou dále, než může učiniti tato knížka, která je jen úvodem.

Kapitola prvá a osmá jest určena jen pro laiky. V prvé kapitole snažil jsem se totiž cestou pokud možno názornou a bez matematiky ozřejmiti postup, kterým se budeme bráti. Nechtěje přerušovati plynulost výkladů v kapitole druhé až sedmé uváděním některých nutných poznatků, které sice přímo s látkou projednávanou nesouvisí, ale jsou potřebné k jejímu porozumění, shrnul jsem je zvláště do kapitoly osmé. Na příslušných místech je vždy citováno místo této kapitoly, kde se potřebný pojem nebo vzorec nalézá. Přes to doporučuji čtenáři-laikovi, aby po přečtení prvé kapitoly absolvoval kapitolu osmou a teprve potom četl kapitoly II—VII.

Odkazy vůbec uvádím v závorce. Tak na příklad (IV, 2, 8) značí čtvrtou kapitolu, druhý §, osmý vzorec. Pokud není výslovně jinak poznamenáno, vztahují se tato čísla v uvedeném pořádku vždy ke kapitole, paragrafu, rovnici.

§ 2. Euklidovy postuláty.

Geometrie vznikla z potřeb praktického měření. Časem přišlo se k poznání, že některá tato měření možno usnadniti užitím vzorců. To byl asi počátek geometrických pouček. Tak na příklad, jakmile se nalezla formule pro obsah trojúhelníka, stačilo změřiti základnu z a výšku v, načež $\frac{zv}{2}$ byl hledaný obsah. Ovšem, že všechny takové poučky spočívaly na požadavcích, jichž splnění bylo verifikováno jen praktickou zkušeností a nikoli teoreticky zdůvodněno. Takovým požadavkem bylo na příkl., že dvě přímky nemohou míti více než jeden bod společný. Požadavky tyto byly tak evidentní prvým geometrům, že nejen se nesnažili jejich bezespornost dokázati, nýbrž ani výslovně jich neuváděli. Postupem času teoretická záliba doplňovala obsah geometrie poučkami, které snad neměly přímého praktického významu. Důkazy těchto pouček spočívaly opět na poučkách, které již dříve byly dokázány. Rovněž důkazy těchto pouček musely spočívati na poučkách dříve dokázaných atd. Poslední článek tohoto řetězce důkazů a pouček tvořily zmíněné požadavky. Ty byly poznány jako nedokazatelné (ale nikoli hned a nikoli všechny) na rozdíl od pouček, které na jejich základě bylo lze vždy dokázati. Jakmile tedy exaktní teoretické badání nabývalo vrchu, bylo nutno z důvodů logických a didaktických ony nedokazatelné požadavky, jež tvořily základnu studia, výslovně uvésti. Tak učinil *Euklid.* Ten počíná prvou knihu svých „Elementů" 23 definicemi (vysvětlivkami), 5 postuláty (požadavky) a 9 axiomy (základními větami).[1])

Jeho postuláty jsou:

I) Dva body lze vždy spojiti (jedinou) přímkou.

II) Přímou čáru omezenou lze vždy prodloužiti.

III) Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti kružnici.

IV) Všechny pravé úhly jsou mezi sebou ekvivalentní.

V) Protíná-li příčka dvě přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly o součtu menším, než dva pravé (180^0), tyto dvě přímky — v případě nutnosti prodlouženy — protínají se na téže straně příčky, kde je součet zmíněných úhlů vnitřních menší než dva pravé.

Těchto pět postulátů je základem geometrie, které se říká **geometrie euklidovská.** Je to též geometrie praktického měření a proto se zavedla do škol. (Uvedené postuláty netvoří ucelený základ. Dneska víme, že geometrie euklidovská spočívá na větším počtu postulátů, než kolik jich uvedl *Euklid.* Tento při důkazech některých pouček mlčky předpokládal více splněných požadavků. Neuváděl jich výslovně, ježto asi nevěděl, že lze sestrojiti geometrii [t. j. řadu pouček], kde splněny nejsou. Uvedeme v nejbližších řádcích jeden z takových mlčky předpokládaných postulátů.)

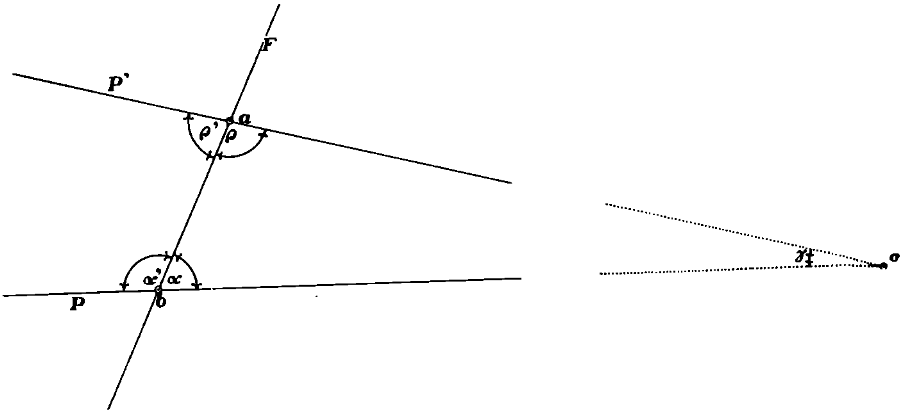
V. postulát se zřejmě liší od prvých čtyř svoji složitostí. Je pro naše studium nejdůležitější. Praví toto (obr. 1):

Je-li $\alpha + \beta < 180^0$, přímky P a P' se protínají (v bodě c). Důležitost jeho seznáme, pokusíme-li se zodpověděti otázku: Co nastane, je-li $\alpha + \beta = 180^0$? Tato otázka je ekvivalentní s otázkou: Co nastane, je-li $\alpha = \beta'$ [2])? Na tuto otázku odpovídá *Euklid:* Je-li $\alpha = \beta'$, přímky P a P' — byť i prodlouženy — se neprotínají (prop. XXVII). Kdyby se protínaly, třeba v nějakém bodě c, byl by vnější úhel β'

[1]) Přidržuji se kritického vydání *Heibergova*, citovaného v literárních poznámkách. Ve starších vydáních bylo poněkud jiné uspořádání: 34 definicí, 3 postuláty a 14 axiomů. (Poslední dva z pěti zde uvedených postulátů byly počítány za axiomy.) Citovaná práce nepochází asi celá od *Euklida.* Pravděpodobně jest autorem páté „knihy" *Eudoxus*, autorem čtrnácté *Hypsikles* a patnácté *Damaskios.*

[2]) Ježto vždy $\beta + \beta' = 180$ a dle předpokladu $\alpha = \beta'$, je i $\alpha + \beta = 180^0$.

trojúhelníka *abc* roven vnitřnímu úhlu α. Ale je dokázáno, (prop. XVI), že vnější úhel (β') v trojúhelníku je vždy větší, než libovolný z jeho úhlů protějších (α nebo γ). Přímky P a P' se tedy nemohou protínati v c. Zcela obdobně by se dokázalo, že takové dvě přímky se nemohou protínati ani v jiném bodě, který je na rameni úhlu α' na P. (Tento



Obr. 1.

důkaz spočívá více méně na prop. XVI. Ta má však smysl jen tenkráte, připustíme-li, že je splněn požadavek: „Přímka rozděluje rovinu na dvě části; libovolný bod — pokud neleží na oné přímce — náleží buď jedné, nebo druhé.“ Není-li tomu tak, může se státi, že úhel β' nebo β je současně vnitřním i vnějším úhlem v trojúhelníku. Poznáme geometrie, kde vytčený požadavek není splněn (VI). *Euklid* si asi nebyl vědom, že tento bezesporný požadavek je nutno výslovně formulovati, neboť neznal ještě geometrie, na kterou jsme právě poukázali.) Přímky v rovině, které prodlouženy jsouce nikdy se neprotínají, nazývá *Euklid* rovnoběžkami (přímkami rovnoběžnými, def. 23).

Je-li konečně $\alpha + \beta > 180^0$, musí $\alpha' + \beta' < 180^0$ a přímky P a P' se opět protínají dle V. postulátu. (Na straně, kde jsou úhly α', β'.) Máme tedy celkem jen tyto tři možnosti:

a) buď $\alpha + \beta < 180^0$; podle V. postulátu se přímky P a P' protínají, nebo

b) $\alpha+\beta=180^0$; podle dokázané věty jsou P a P' rovnoběžny, nebo

c) $\alpha+\beta>180^0$; podle V. postulátu se přímky protínají.

Jiných možností není. Lze tedy bodem *(a)* mimo přímku *(P)* ležícím vésti k této jen jedinou rovnoběžku *(P')*, neboť jen v jediném případě je $\alpha+\beta=180^0$. Kdyby kromě rovnoběžky zmíněné existovaly ještě jiné rovnoběžky (vedené bodem *a* k přímce *P*), muselo by nutně pro ně býti buď $\alpha+\beta<180^0$, nebo $\alpha+\beta>180^0$.[2a]) Ale v tomto případě V. postulát požaduje, aby se přímky protínaly (ale nedokazuje, že tomu tak jest!).

Význam pátého Euklidova postulátu spočívá v tom, že **bez důkazu** omezuje na **jednu** počet rovnoběžek, které lze daným bodem mimo přímku položeným k této vésti!

Tím je osvětlen význam V. postulátu, jehož si byl i *Euklid* vědom, neboť pokud možno neodvozoval z něho důsledků. Uvedeme-li nyní, že téměř po dvě tisíciletí se matematikové marně snažili dokázati tento postulát, pochopíme, co bylo hybnou silou, která je k tomu poháněla. Šlo v základě o to, ukázati, kolik rovnoběžek lze bodem mimo přímku položeným k této vésti! *Euklid* sám se asi o důkaz nepokusil. Alespoň nemáme takový pokus dochovaný.

Pokus o důkaz V. postulátu znamená v základě již skepsi o něm. Zdá se na prvý pohled, že tato skepse není oprávněná, neboť V. postulát je verifikován skutečností. Leč právě to je oprávněním skepse, jak uvedeme v § 4 této kapitoly názorným příkladem.

V následujícím paragrafu zmíníme se o některých větách euklidovské geometrie, jichž později budeme potřebovati k lepšímu porozumění geometrie neeuklidovské.

[2a]) Předpokládáme ovšem, ze je splněn t. zv. axiom Archimedův, neboť jinak by existovala možnost geometrie, ve které je nekonečně mnoho rovnoběžek daným bodem k dané přímce a přec v ní platí věty geometrie euklidovské. Zmíněný axiom Archimedův zní:

„Budiž b_1 libovolný bod na přímce mezi jejími dvěma libovolnými body b_0, b v konečnu a buďtež body b_i, ($i=1, 2, \ldots$) takové, že platí $b_0b_1=b_1b_2=b_2b_3=\ldots$, při čemž pro každé i je bod b_i mezi body b_{i-1}, b_{i+1}. Je možno vždy nalézti takové číslo n, aby bod b byl mezi body b_{n-1}, b_{n+1}."

§ 3. Některé poučky.

1. Postuláty s V. *Euklidovým* rovnocenné. Na střední škole dokazuje se mnoho vět, které jsou správné jen tehdy, je-li splněn V. postulát. Některé z těchto vět jsou s ním přímo rovnocenné. To znamená, že kdybychom tento postulát nahradili jednou takovou větou, pak jej z ní můžeme dokázati. To se dělo téměř po dvě tisíciletí! Dnes víme, že to ovšem není důkazem! Víme to proto, ježto je nám známo, které věty jsou s tímto postulátem rovnocenné, jinými slovy, které věty můžeme místo V. postulátu za postulát prohlásiti. Tak tomu však nebylo dříve, a proto se stále opakovala historie nepodařeného důkazu. Uvedeme alespoň některé takové věty, které si různí badatelé učinili východiskem svých úvah, nevědouce, že vlastně chtějí dokázati to, co předpokládali. Historicky zajímavé jsou zvláště tyto věty:

V*a)* Existují trojúhelníky podobné, nebo přesněji

V*a')* Existují trojúhelníky o stejných úhlech, ale nestejných obsazích.

V*b)* Bodem *p* mimo přímku *P* možno k této vésti jen jednu rovnoběžku.

V*c)* Součet úhlů v trojúhelníku je 180^0.

Každá z těchto vět plyne z V. postulátu a obráceně z těchto vět se V. postulát za jistých předpokladů dá dokázati.

2. Úkol geometrie euklidovské. Úkolem geometrie, které jsme se učili na střední škole, je studium útvarů, resp. jejich vlastností. Máme-li nějaký útvar studovati, můžeme tak učiniti v zásadě dvojím způsobem. Buď studujeme onen útvar přímo, nebo odvozujeme jeho vlastnosti analyticky. Prvý způsob byl vlastně způsobem matematiky řecké, druhý způsob spočívá v tom, že daný útvar analyticky vyjádříme pomocí nějakých souřadnic a hledáme ty jeho vlastnosti, které nejsou závislé na volbě takových souřadnic. Objasníme to na příkladě: Předpokládejme, že máme změřiti délku rovné tyče *ab*, která svým koncem *a* stojí kolmo na zemi. Přímý způsob měření byl by zde zřejmě nejjednodušší. Spočívá v tom, že stanovíme určitou jednotku míry (v níž chceme délku tyče vyjádřiti) a obvyklým způsobem touto jednotkou tyč změříme. — Druhý způsob, nepřímý, je sice zdlouhavější, ale často jedině

možný. Spočívá na tomto základě: Změříme výšku φ slunce nad obzorem a stanovíme na zemi stín b' bodu b. Označíme-li vzdálenost $ab' = r$, je hledaná délka tyče rovna $r \operatorname{tg} \varphi$. Je tedy délka tyče vyjádřena dvěma údaji r, φ, kterým můžeme říkati souřadnice. Tyto souřadnice se každým okamžikem mění, ale výraz $r \operatorname{tg} \varphi$ pro délku tyče je vždy stejný, nechť hodnota těchto souřadnic je jakákoliv. Délka tyče je tedy nezávislá na volbě souřadnic.

Ve třetím odstavci zavedeme obvyklé souřadnice pravoúhlé a najdeme několik výrazů, které jsou nezávislé na jejich volbě. To se nám podaří tím způsobem, že si odvodíme vzorce, udávající přechod od jednoho systému pravoúhlých souřadnic k jinému systému pravoúhlých souřadnic.

3. Analytické vyjádření úkolu. Buďtež X, Y osy pravoúhlého systému souřadného, jejich průsečík, bod o, počátkem soustavy souřadné. Chceme-li vyznačiti, že nějaký bod b má v tomto systému souřadnice x, y, píšeme pro tento bod $b\ (x, y)$.

Od původního systému souřadného můžeme přejíti k jinému téhož druhu tímto pochodem (obr. 2):

Posuneme systém souřadný X, Y rovnoběžně do bodu $'o\ (\mathring{x}, \mathring{y})$. V tomto novém systému má každý bod $b\ (x, y)$ nové souřadnice $'x, 'y$, které jsou s původními vázány vztahem

1) $$'x = x - \mathring{x}, \qquad 'y = y - \mathring{y}$$

Nyní otočíme systém souřadný $'X, 'Y$ o úhel φ, kol nového počátku $'o$ do polohy $''X, ''Y$. Bod $b\ ('x, 'y)$ má v této nové soustavě souřadnice $''x, ''y$, které se souřadnicemi $'x, 'y$ jsou vázány vztahy

2) $$''x = {'x} \cos \varphi + {'y} \sin \varphi, \qquad ''y = - {'x} \sin \varphi + {'y} \cos \varphi$$

Vzhledem k předposlednímu systému rovnic 1) obdržíme

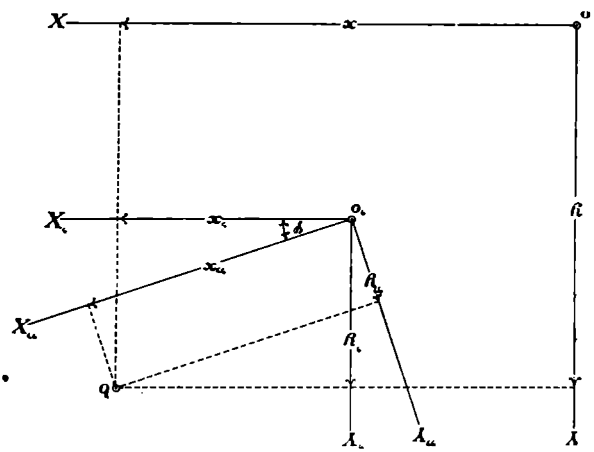
3 a) $$\begin{aligned} ''x &= (x - \mathring{x}) \cos \varphi + (y - \mathring{y}) \sin \varphi \\ ''y &= -(x - \mathring{x}) \sin \varphi + (y - \mathring{y}) \cos \varphi \end{aligned}$$

Obráceně, souřadnice x, y jsou se souřadnicemi $''x, ''y$ vázány rovnicemi

3 b) $$\begin{aligned} x &= {''x} \cos \varphi - {''y} \sin \varphi + \mathring{x} \\ y &= {''x} \sin \varphi + {''y} \cos \varphi + \mathring{y} \end{aligned}$$

Podle toho, co jsme uvedli v předcházejícím odstavci, je úkol geometrie v rovině též definován jako studium těch výrazů, které se transformací 3) nemění. Takové výrazy budou míti nějaký geometrický význam. Říkáme jim invarianty transformace 3) (nebo též invarianty vzhledem k 3)).

Uveďme příklad jednoho takového invariantu! Je to analytické vyjádření obsahu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou $b_1(x_1, y_1)$, $b_2(x_2, y_2)$, $b_3(x_3, y_3)$.



Obr. 2.

Obsah tohoto trojúhelníka je dán determinantem

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\right]$$

Čtenář se snadno přesvědčí sám dosazením z rovnic 3), že tento determinant je invariantem vzhledem k 3), neboť skutečně platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ''x_1 & ''y_1 & 1 \\ ''x_2 & ''y_2 & 1 \\ ''x_3 & ''y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Rovnice 3) mohli bychom interpretovati ještě jinak. Místo abychom pohybovali souřadným systémem z X, Y do $''X, ''Y$ a bod b nechali pevným, můžeme bodem b pohybovati v témž souřadném systému X, Y do polohy $''b\,(''x, ''y)$. Při tom souřadnice bodů b a $''b$ jsou vázány podmínkou 3). Pohyb ten se skládá z posunutí 1) a otáčení 2). (Není-li výslovně jinak podotčeno, rozumíme pohybem též každou změnu místa — vzhledem k nějaké pevné soustavě souřadné — bez ohledu na vykonanou dráhu.) Při této interpretaci mohli bychom říci, že obsah trojúhelníka jest invariantní vzhledem k pohybu, danému rovnicí 3). Takový obsah není však invariantním jen vzhledem k jednomu pohybu určenému třemi údaji (třeba $\varphi = 30^0$, $\mathring{x} = 3$, $\mathring{y} = 4$), nýbrž vzhledem ke **všem** pohybům tohoto druhu, nechť za φ, $\mathring{x}$, $\mathring{y}$ dosadíme jakékoliv reálné, konečné hodnoty. Všechny tyto pohyby sdružujeme v pojem **grupy** pohybu. (Přesnou definici grupy transformací viz v VIII, 5.) Proto říkáme, že obsah trojúhelníka jest invariantní vzhledem ke grupě pohybu, jinými slovy, analytické vyjádření obsahu trojúhelníka je invariantem pohybové grupy. Obecně pak úkol geometrie euklidovské v rovině je definován jako studium invariantů pohybové grupy. Při tom ovšem předpokládáme, že pohyb je dán transformacemi 3). — Takové invarianty mohou býti různé. Jeden jsme uvedli. V následujícím uvedeme jiný invariant, zásadní důležitosti pro geometrii euklidovskou v rovině.

4. **Body isotropické.** Vzdálenost dvou bodů $b_1 (x_1, y_1)$, $b_2 (x_2, y_2)$ je v euklidovské rovině dána výrazem, jehož čtverec jest

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Tento výraz je pohybovým invariantem, neboť platí

$$({}''x_2 - {}''x_1)^2 + ({}''y_2 - {}''y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Že se délka úsečky nemění pohybem, víme ze střední školy, kde se tomu učíme již na nižším stupni. Poslední rovnice je však toho analytickým důkazem. Z invariantu $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ můžeme odvoditi jednu charakteristickou vlastnost pohybu. Nechť bod $b_2 (x, y)$ je plynulým bodem. Ježto výraz $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ je pohybovým invariantem, nemění se transformacemi 3) ani rovnice

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0.$$

Tuto však můžeme psáti v tvaru

$$[(y - y_1) + i (x - x_1)] [(y - y_1) - i (x - x_1)] = 0, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

z kterého je zřejmo, že je to rovnice dvojice přímek

$$y - y_1 = - i (x - x_1), \qquad y - y_1 = i (x - x_1)$$

bodem b_1. Tato dvojice se tedy pohybem nemění. Říkáme, že se pohybem reprodukuje, nebo též, že ji grupa pohybová reprodukuje.

Každým bodem b_1 v rovině prochází taková dvojice přímek, které jsou imaginárné sdružené. Jak je zřejmo z rovnice těchto přímek, jejich směry nejsou závislé na volbě bodu b_1. Nechť jej zvolíme kdekoli v konečnu, vždy jedna přímka z oné dvojice má směrnici $+i$, druhá $-i$. — Ze střední školy je známo, že (reálné) přímky o stejných (reálných) směrnicích jsou rovnoběžny. O rovnoběžných přímkách říkáme, že se protínají v nějakém bodě přímky nevlastní.[3]) Řídíce se analogií o přímkách reálných, zavádíme obdobné definice pro přímky imaginárné. Říkáme, že dvě přímky imaginárné jsou rovnoběžny, mají-li stejnou (imaginární) směrnici. Bod nevlastní přímky, ve kterém se imaginárné rovnoběžky protínají, je také imaginárný. Jsou tedy všechny imaginárné přímky o směrnici $+i$ spolu rovnoběžny a protínají se v imaginárném bodě přímky nevlastní. To platí i o imaginárných přímkách, které mají směrnici $-i$. Dvojici přímek o směrnicích $+i$, $-i$ říkáme dvojice přímek **isotropických**, dvojici příslušných bodů na přímce nevlastní říkáme dvojice bodů **isotropických**. — Můžeme tedy říci, že pohybová grupa v rovině obecně reprodukuje dvojici bodů isotropických. To je jedním z charakteristických znaků pohybu, který nazýváme euklidovský. Reprodukuje-li se tato dvojice tak, že každý z obou bodů podrží své místo, příslušný pohyb je složen z posunutí a otáčení. Vymění-li však oba body svoji polohu, příslušný pohyb je složen ze zrcadlení, posunutí a otáčení.

Po této malé exkursi do geometrie euklidovské pokusím se na příkladě ukázati, jak asi se může dospěti k přesvědčení, že je dovolena skepse o V. postulátu Euklidově.

§ 4. Skepse o V. postulátu.

Předpokládejme, že nějaké nebeské těleso je koulí v přesně geometrickém významu slova. Na této kouli nechť žijí bytosti dvojrozměrné. (Čtenář může si představiti třeba oživené stíny lidí na této „Zemi".) O těchto bytostech učiníme následující předpoklady:

Jsou schopny chápati jen dvojrozměrně a nikoli trojrozměrně.

Přesnost jejich měření nepřesahuje přesnost našeho měření.

Jejich životní podmínky jsou tak utvářeny, že nemohou se libovolně vzdáliti z okolí nějakého bodu (který nazveme třeba pólem).[4])

[3]) Nevlastní přímka euklidovské roviny je jediná její přímka v nekonečnu.

[4]) Sleduji zde analogii s naším trojrozměrným životem. My se také nemůžeme přemístiti do libovolného bodu prostoru a chápeme jen úkazy trojrozměrné.

Je-li jejich „Země“ tak veliká vzhledem k nim a jejich možnosti měření, že se prakticky v okolí pólu nemohou přesvědčiti o jejím zakřivení, pak geometrie vzniklá z popudu praktického bude rovněž založena na postulátech Euklidových. Při tom ovšem pod slovem přímka budou rozuměti nejkratší spojnici dvou bodů, o níž my víme, že je to tak zvaná hlavní kružnice na kouli. (Její střed leží právě ve středu koule.) Tyto bytosti v prvním stadiu svého vývoje jistě tedy nebudou pochybovati o tom, že žijí v „prostoru“, kterému my říkáme rovina, a představa koule bude jim cizí, nemohou-li chápati trojrozměrně.

Na jistém stupni svého vývoje budou se snažiti dokázati V. postulát. Jejich pokusy ovšem budou marné. To my víme proto, ježto jsme si vědomi, že žijí na kouli, kde právě onen postulát neplatí. Oni to však věděti nemohou. Bude se tedy opakovati přibližně stejná historie jako u nás. Místo důkazu bude objevena spousta vět s oním postulátem rovnocenných. Konečně přijde nějaký matematik, který z úctyhodné řady nepodařených pokusů bude veden k domněnce, že onen postulát je vůbec nedokazatelný, jinými slovy, že je libovolně volený. Prvý důsledek této domněnky bude tedy snaha sestrojiti takovou geometrii, kde by onoho postulátu nebylo, po případě nahraditi jej jiným, stejně libovolným, který s ním není ekvivalentní. Pokusí se o to, ale dojde k výsledkům, které jsou tak rozdílné od běžného názoru, že svoje úvahy ani neuveřejní. Snad jim ani sám nevěří. Bude hleděti tedy nějakým způsobem se přesvědčiti, zdali přece praktickým měřením se nedá V. postulát verifikovati. K tomu cíli musí ovšem zvoliti větu, která je s ním rovnocenná, ale neoperuje s výrazy, které případně jsou mimo dosah jeho měření. (Což by mohlo nastati při prodlužování přímek, o nichž je v V. postulátu řeč.) Za takovou větu zvolí třeba tu, která vyjadřuje, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Stanoví tedy praktickým, ale vědecky přesným způsobem součet úhlů v nějakém dostatečně velikém trojúhelníku. Po mnoha měřeních sezná, že součet úhlů není 180°. To je výsledek, který nás nepřekvapí. My víme dokonce, že při teoreticky přesném měření musel by shledati součet úhlů větší než 180°, neboť měřený trojúhelník je sférickým trojúhelníkem a v takovém je vždy součet úhlů větší než 180°. Pro něj to jest ovšem překvapující výsledek. Ve snaze vysvětliti jej dospěje k těmto alternativám:

1. Buď neplatí V. postulát Euklidův, nebo

2. odchylka od 180° je způsobena nepřesností praktického měření.

Alternativa prvá jest asi pro něj s teoretického stanoviska lákavější. Aby se jí mohl přidržeti, musí dokázati, že odchylka od 180°, způsobená jen eventuelní nepřesností praktického měření, je menší než odchylka, kterou naměřil. (Jinými slovy: Musel by dokázati, že naměřená odchylka přesahuje dovolenou hranici pozorovacích chyb, vzniklých z nemožnosti měřiti s naprostou přesností.) Metodami aplikované matematiky dospěl by ke vzorcům, které mu udají dovolené hranice, v nichž se jeho pozorování může odchylovati od teoretických výsledků. Ježto předpokládáme jeho „Zemi“ tak velikou, že je mu nemožno v okolí pólu se přesvědčiti o jejím zakřivení (t. j., že není prakticky možno se přesvědčiti, zda měřený trojúhelník je sférický, či rovinný), můžeme připustiti, že pozorovaná odchylka nepřesahuje ony hranice pozorovacích chyb. Praktický důsledek toho je, že onen dvojrozměrný matematik se nemůže s jistotou rozhodnouti, která z obou alternativ je správná. Proto asi řekne: „Pro praktické účely platí geometrie Euklidova. Není však vyloučeno, že při naprosté teoretické přesnosti platí geometrie jiná. My však prozatím nemáme možnosti rozhodnouti o tom, která geometrie vskutku platí.“

Uvědomí-li si čtenář, že ona hypotetická, dvojrozměrná bytost žije na kouli, pozná teprve, jak krajně opatrně a zároveň přesně se vyjadřovala. — V uvedené větě je již obsažena skepse o V. postulátu. Leč nyní je nutno z ní činiti důsledky. Prvý důsledek by asi byl tento: „Platí-li jiná geometrie než euklidovská, pak musí to býti taková, která v dostatečně malých rozměrech vede opět jen ke geometrii euklidovské.“ Neboť měřením se zkonstatovalo, že odchylka součtu úhlů od 180° může býti v mezích pozorovacích chyb.

Tento důsledek konsekventně provedený by vedl asi ke stavbě geometrií, v nichž součet úhlů v trojúhelníku by byl buď větší nebo menší než 180° a takové geometrie by byly nazvány neeuklidovskými. Při tom by v obou geometriích vystupovala jistá konstanta (v geometrii, kde by byl součet větší než 180°, byla by tato konstanta v souvislosti s poloměrem koule, na které ony bytosti žijí), která by byla prozatím teoreticky neurčitelná. Vhodnou její volbou by se dospělo ke geometrii euklidovské.

Existovaly by tedy vedle sebe tři rovnoprávné geometrie a obyvatelé by se pravoplatně nemohli rozhodnouti, která z nich je skutečná, a které mají jen teoretický význam. (My ovšem víme, že by to pro ně byla geometrie sférická, kde součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180°. Víme to proto, že můžeme chápati trojrozměrně a můžeme tedy činiti rozdíl mezi rovinou a koulí, což pro ně není možno. Ovšem logicky by si asi onu představu získali. To má své matematické zdůvodnění, které zde nemůžeme prováděti.)

To, co jsme zde líčili, byla více méně přesná analogie s úvahami, které prováděli naši matematikové. V celém onom líčení by bylo nutno jen zaměniti slovo „koule“ se slovem „trojrozměrný prostor“. Takto však, jak jsme historii skepse o V. postulátu uvedli, je jistě přístupnější. Proto jsme právě tento postup volili.

Poznámka. Líčení, které jsme uvedli, vztahovalo se jen k pokusům provedeným v době minulé. Chtěli-li bychom je rozšířiti i na dobu přítomnou, museli bychom postupovati asi takto: Místo V. postulátu nastoupí definice rovnoběžnosti směrů (nikoliv přímek, t. j. hlavních kružnic, které rovnoběžny nejsou). Tato definice bude nejdříve zcela libovolná. Matematici, vedeni teoretickou zálibou, udají třeba několik definicí rovnoběžných směrů, z nichž každá povede k jinému pojmu rovnoběžnosti. (To není nikterak překvapující. Vždyť i my pod pojmem rovnoběžnosti na zemi shrnujeme bezděky zcela různé pojmy. Na příklad výrok, že směry kolejí dráhy v koncových bodech téhož pražce jsou rovnoběžné, znamená zcela jiný pojem rovnoběžnosti, než výrok: Směry stínů dvou (k zemi kolmých) tyčí jsou rovnoběžné! Teprve možnost představy trojrozměrného prostoru, v němž předpokládáme splněn V. Euklidův postulát, dovoluje nám s jistotou říci, že rovnoběžnost definovaná druhým výrokem není nikdy rovnoběžností v „obvyklém“ (euklidovském) slova smyslu. Takového korektivu však ony hypotetické, dvojrozměrné bytosti nemají!) Teprve později se sezná, že mezi všemi takovými možnými definicemi je jedna účelná a sice ta, která plyne ze zákonů fysikálních. Tím by se geometrie a fysika nerozlučně spialy a tak by byla získána možnost rozhodnouti jinou cestou o tvaru „Země“. (Einsteinova teorie!)

§ 5. Cesty k neeuklidovské geometrii.

1. Stanovisko axiomatické. V předcházejícím paragrafu jsem se snažil ukázati, jak se dospělo ke skepsi o V. postulátě. Jakmile se tato skepse objevila, bylo nasnadě očekávati, že matematici pokusí se sestrojiti geometrie bez tohoto postulátu. Tak se také stalo. Hned na počátku se však cesty badatelů rozdělily. Jedni nahradili V. postulát jiným a dospěli tak ke geometriím, kterým dnes říkame geometrie neeuklidovské. Druzí místo V. postulátu nezvolili žádný jiný a dospěli tak ke geometriím, o nichž dnes říkáme, že nejsou euklidovské. My se budeme zabývati

jen geometriemi neeuklidovskými. Cestou, kterou jsem právě naznačil k jejich dosažení, brala se většina matematiků a zvláště ti, kteří se dnes pokládají za objevitele neeuklidovské geometrie, t. j. *Lobačevský* a *Bolyai*. Tak na příklad *Lobačevský* vycházel z požadavku: „Bodem a mimo přímku P položeným možno vésti vždy dvě rovnoběžky.“ Touto cestou vybudoval úplně geometrii, ve které je součet úhlů v trojúhelníku menší než 180°. Ale historie nešťastných důkazů V. postulátu ukazuje, jak tato cesta je obtížná i pro matematiky a tudíž téměř zcela neschůdná pro laiky. Proto jí nebudeme užívati.

2. Stanovisko diferenciální. Mnohem snazší je cesta, kterou se bral *Riemann*, když prvý dokázal možnost, že v prostoru může součet úhlů v trojúhelníku býti i větší než 180°. Spočívá ve studiu prostoru v nekonečně malém (diferenciálním) okolí bodu. Tento postup je velmi instruktivní, ale je škoda používati ho jen k úvahám, kterými se budeme obírati, neboť zahrnuje v sobě i možnosti zcela jiných geometrií. To znamená, že jeho početní metody jsou jistě pro naše účely příliš složité. V určitých případech se však velmi zjednoduší; pak je na místě použíti ho i pro naše úvahy speciální.

3. Stanovisko *Kleinovo*. Naším východiskem bude t. zv. princip *Kleinův*, který jsme vlastně již aplikovali v I, 3, odst. 3, když jsme analyticky vyjadřovali úkol geometrie euklidovské v rovině. Tam jsme dovodili, že geometrie euklidovská zabývá se studiem invariantů vzhledem k transformacím (které teď píšeme v poněkud jiné formě)

3c) $$'x = x \cos\varphi + y \sin\varphi + \mathring{x}, \qquad 'y = -x \sin\varphi + y \cos\varphi + \mathring{y}$$

Je nasnadě pojem geometrie v rovině zevšeobecniti tak, že místo těchto rovnic speciálních zavedeme rovnice obecnější

4) $$'x = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \qquad 'y = a_{21} x + a_{22} y + a_{23}$$

a řekneme, že úkolem geometrie neeuklidovské (resp. takové, která není euklidovská) je studium invariantů vzhledem k těmto transformacím. (Při tom předpokládáme, že konstantní koeficienty $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ jsou takové, že příslušné transformace tvoří grupu; VIII, 5.) Jak je volba podmínek pro koeficienty a důležitá pro různé druhy geometrií, poznáme na příkladě s obsahem trojúhelníka. Dejme tomu, že definujeme obsah trojúhelníka v těchto geometriích tak, jako v geometrii euklidovské (§ 3). Determinant, který jej vyjadřuje analyticky, transformuje se totiž dle rovnice

$$\begin{vmatrix} 'x_1 & 'y_1 & 1 \\ 'x_2 & 'y_2 & 1 \\ 'x_3 & 'y_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Z toho plyne, že obsah trojúhelníka je jen v takové geometrii neproměnný, jejímž základem jsou právě zmíněné transformace, při čemž koeficienty a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} jsou vázány podmínkou

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 1$$

Již z tohoto příkladu vidíme, jak různou volbou podmínek pro koeficienty a obdržíme zcela různé geometrie. Zvolíme-li speciálně

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi,$$

obdržíme geometrii euklidovskou. Nyní čtenář porozumí již významu principu *Kleinova*, který (ve formě pro naše účely upravené) zní:

Je dána rovina a v ní grupa transformací. Úkolem geometrie je studovati vztahy, které se transformacemi této grupy nemění.

Při tom je samozřejmě jedním z prvých úkolů stanovení takových neměnících se výrazů souřadnic dvou bodů (resp. dvou přímek), které je možno nazvati analytickým vyjádřením „vzdálenosti" dvou bodů (resp. „úhlu" dvou přímek). To není sice možno v každé geometrii, ale v geometriích neeuklidovských (a euklidovské) se nám to podaří.

V této práci zvolíme grupu transformací tak, aby součet „úhlů" v trojúhelníku byl buď roven π, nebo menší než π, nebo větší než π.

V prvém případě budeme vedeni ke geometriím, jichž speciálním případem je geometrie euklidovská. Budeme je dle *Kleina* nazývati geometriemi parabolickými. V druhém případě obdržíme geometrii, kterou zkonstruovali *Lobačevský* a *Bolyai*. Tuto geometrii budeme nazývati s *Kleinem* hyperbolickou. V třetím případě dojdeme ke geometrii, která je spojena se jménem *Riemannovým*. *Klein* pro ni zavedl jméno eliptická, kterého i my budeme používati.

Klein, který tímto způsobem studoval tyto typy geometrií, poznal, že existuje jiný, výhodnější způsob jejich rozeznávání, než onen, který jsme uvedli. Přidržíme se tohoto způsobu, jak čtenář pozná v kap. II—VII.

Poznámka: Chceme-li se říditi principem *Kleinovým*, je výhodné často zavésti jiné souřadnice, než cartézské. Místo abychom bod stanovili dvěma čísly, x, y, stanovíme jej poměrem tří čísel, třeba $z_1 : z_2 : z_3$. Pak říkáme, že z_1, z_2, z_3 jsou homogenní souřadnice bodu. Je zřejmo, že nejen čísla z_1, z_2, z_3 svým poměrem určují bod, ale i čísla $\varrho z_1, \varrho z_2, \varrho z_3$ tentýž bod svým poměrem určují, jen když libovolný koeficient ϱ je od nuly různý. V těchto souřadnicích jsou transformační rovnice, které odpovídají rovnicím 4), celkem tři a obecně je můžeme psáti

$$\begin{aligned}
\varrho' z_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\
\varrho' z_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\
\varrho' z_3 &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3
\end{aligned}$$

Jsou-li reálné koeficienty a takového druhu, že tyto transformace tvoří grupu, a je-li jich právě osm nezávislých, říkáme, že tato grupa je obecnou grupou projektivních transformací, nebo též obecnou grupou projektivní.