2. Lineární rovnice o dvou neznámých

2. LINEÁRNÍ ROVNICE O 2 NEZNÁMÝCH

Obrátíme se nyní k vlastnímu úkolu, t. j. k řešení neurčitých rovnic. *Neurčitou čili diofantickou rovnicí* budeme rozuměti algebraickou rovnici, která má nekonečně mnoho řešení. Taková rovnice má jistě aspoň dvě neznámé, ale ne každá rovnice o dvou neznámých je neurčitá. Na př. rovnice $(x^2 - 1)(y + 1) = 0$ není neurčitá (proč?).

Řešením neurčité rovnice budeme rozuměti v dalším toto: *vyhledati všechna celá čísla, která dané rovnici vyhovují.*

V této kapitole si rozřešíme lineární rovnici o dvou neznámých. Napíšeme ji v tvaru

$$ax + by = c; \tag{2,1}$$

při tom budeme předpokládati, že a, b, c jsou čísla celá.

Má-li rovnice (2,1) vůbec nějaké celočíselné řešení x, y, pak největší společný dělitel čísel a, b je dělitelem čísla c. Tato podmínka je tedy *nutná* pro řešitelnost rovnice (2,1); to znamená: není-li splněna, není rovnice (2,1) řešitelná. Na př. rovnice $2x + 4y = 5$ je neřešitelná.

Ale uvedená podmínka také *stačí* k tomu, aby rovnice (2,1) byla řešitelná. Platí totiž: je-li největší společný dělitel δ čísel a, b dělitelem čísla c, má rovnice (2,1) řešení.

Abychom to dokázali, uvážíme, že $\frac{a}{\delta}$, $\frac{b}{\delta}$ jsou čísla nesoudělná. Podle kap. 1 lze určiti celá čísla α, β tak, že

$$\frac{a}{\delta}\,\alpha + \frac{b}{\delta}\,.\,\beta = 1. \tag{2,2}$$

Celá čísla $x = \alpha\,.\,\frac{c}{\delta}$, $y = \beta\,.\,\frac{c}{\delta}$ jsou pak řešením rovnice (2,1), což nahlédneme, znásobíme-li rovnici (2,2) číslem c.

Můžeme tedy vysloviti tento souhrnný výsledek: *nutná a postačující podmínka, aby rovnice* (2,1) (kde a, b, c jsou celá čísla) *byla řešitelná celými čísly, je, aby největší společný dělitel čísel a, b byl dělitelem čísla c.*

Jinak vysloveno: *rovnice* (2,1) *má celočíselné řešení tehdy a jen tehdy, je-li největší společný dělitel čísel a, b dělitelem čísla c.*

Je-li rovnice (2,1) řešitelná, pak nemá jediné řešení, nýbrž — jak uvidíme — nekonečně mnoho řešení. Určíme-li jedno z nich jakýmkoli způsobem (Euklidovým algoritmem nebo zkusmo), dostaneme snadno všechna ostatní. Proberem si zase nejprve číselný příklad. Rovnice

$$9x - 42y = 15 \tag{2,3}$$

je podle předchozího řešitelná, neboť největší společný dělitel čísel 9, 42, totiž 3, je dělitelem čísla 15. Zkrátíme rovnici (2,3) třemi: vyjde

$$3x - 14y = 5. \tag{2,4}$$

Tato rovnice má zřejmě táž řešení jako (2,3). Jedno řešení rovnice (2,4) je $x = 11$, $y = 2$ (určeno zkusmo). Platí totiž

$$3 \,.\, 11 - 14 \,.\, 2 = 5.$$

Odečteme tuto rovnici od rovnice (2,4): dostaneme

$$3(x - 11) - 14(y - 2) = 0,$$

čili

$$3(x - 11) = 14(y - 2). \tag{2,5}$$

Čísla 3, 14 jsou nesoudělná: 3 je dělitelem součinu $14(y - 2)$; podle kap. 1 je tedy 3 dělitelem čísla $y - 2$. Lze tudíž určiti celé číslo t tak, že $y - 2 = 3t$. Dosadíme-li do rovnice (2,5) za $y - 2$ a krátíme třemi, vyjde $x - 11 = 14t$. Každé celočíselné řešení rovnice (2,4) lze tedy napsati v tvaru:

$$\begin{aligned} x &= 11 + 14t, \\ y &= 2 + 3t, \end{aligned} \tag{2,6}$$

kde t je *nějaké* celé číslo. Zvolíme-li za t v těchto dvou rovnicích *libovolné* celé číslo, jsou příslušná x, y celočíselným řešením rovnice (2,4), jak se přesvědčíme dosazením. Rovnice (2,6) nám tedy dávají právě všechna řešení rovnice (2,4).

Podobného postupu užijeme obecně. Rovnici (2,1) krátíme největším společným dělitelem čísel a, b (který musí být dělitelem čísla c). Je-li x_0, y_0 jedno řešení rovnice (2,1), dostaneme všechna ostatní ve tvaru:

$$x = x_0 + \frac{b}{\delta} \cdot t,$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\delta} \cdot t,$$

kde t probíhá všecka celá čísla. Odvoďte si podrobně sami!

Nejjednodušším případem neurčité lineární rovnice o dvou neznámých je t. zv. *homogenní rovnice* (s nulovým absolutním členem)

$$ax + by = 0.$$

Tato rovnice je vždy řešitelná (proč?). Napište sami její obecné řešení!

Protože určení jednoho řešení rovnice (2,1) pomocí Euklidova algoritmu nebo zkusmo je někdy zdlouhavé, užíváme v praxi tohoto způsobu:

Rovnici, jejíž řešitelnost jsme zjistili, na př.

$$-17x + 91y = 24,$$

upravíme na tvar

$$17x = -24 + 91y, \tag{2,7}$$

t. j. osamostatníme člen s tou neznámou, jejíž koeficient má menší absolutní hodnotu. Rovnice (2,7) vyjadřuje, že $-24 + 91y$ je číslo dělitelné sedmnácti. To znamená, přičteme-li ke každému členu na pravé straně rovnice (2,7) libovolný násobek sedmnácti, zůstane výsledek dělitelný sedmnácti. Násobky zvolíme tak, aby se absolutní hodnota čísel co nejvíce zmenšila. Přičteme tedy k prvnímu členu -24 číslo $1 \cdot 17$, k druhému $-5 \cdot 17y$. Vyjde $-7 + 6y$, což je jistý násobek sedmnácti: existuje tedy celé číslo u tak, že platí

$$17u = -7 + 6y,$$

čili

$$6y = 7 + 17u. \tag{2,8}$$

Na rovnici (2,8) užijeme téhož postupu jako dříve. Dostaneme:

$$6v = 1 - u,$$

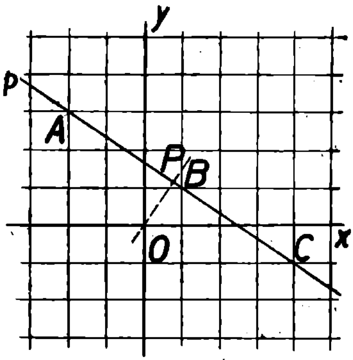
čili $u = -6v + 1$. Za u dosadíme do (2,8), vyjde po úpravě $y = 4 - 17v$. Za y dosadíme do (2,7): vyjde po úpravě $x = -91v + 20$. Každé řešení dané rovnice lze tedy napsati ve tvaru

$$x = -91v + 20,$$
$$y = 4 - 17v, \qquad (2,9)$$

kde v je celé číslo.

Obráceně rovnice (2,9) dávají pro každé celé číslo v celočíselné řešení dané rovnice, jak se přesvědčíme dosazením. Žádáme-li na př. jen kladná řešení, dostaneme z nerovností $x > 0$, $y > 0$ podmínky $v < \frac{20}{91}$, $v < \frac{4}{17}$, t. j. $v = 0, -1, -2, \ldots$.

Promluvíme si ještě o jednoduchém geometrickém významu řešení neurčité lineární rovnice. Jistě víte, jak si graficky znázorňujeme rovnice o dvou proměnných x, y. Vycházíme ze soustavy pravoúhlých souřadnic: poloha bodu v rovině je dána dvojicí reálných čísel x, y — jeho souřadnic. Jsou-li obě souřadnice x, y celá čísla, dostaneme bod, kterému říkáme *mřížový bod* roviny. Všecky mřížové body dostaneme jako průsečíky rovnoběžek s osami souřadnic, vedenými ve vzdálenostech $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (obr. 1).



Obr. 1.

Rovnici $ax + by = c$ vyhovuje nekonečně mnoho dvojic čísel x, y; jejich geometrickým znázorněním je nekonečně mnoho bodů. Tyto body vyplňují přímku a říkáme, že rovnice $ax + by = c$ je její rovnicí. Najíti všecka celočíselná řešení této rovnice znamená tedy geometricky: nalézti na dané přímce všecky mřížové body.

Na obr. 1 je znázorněna přímka p o rovnici $2x + 3y = 5$. Její celočíselná řešení dostaneme známým způsobem ve tvaru

$$x = 4 - 3u,$$
$$y = 2u - 1, \qquad (2,10)$$

dosazujeme-li za u čísla celá. Tím jsou dány i mřížové body na přímce p. Na obr. 1 jsou vyznačeny body $(-2; 3)$, $(1; 1)$, $(4; -1)$, které dostaneme z rovnic (2,10) postupně pro $u = 2, 1, 0$.

Všimněme si ještě, že dosadíme-li do rovnic (2,10) *libovolné* (nikoli celé) číslo za u, dostaneme souřadnice x, y, které vyhovují rovnici

$2x + 3y = 5$ přímky p. Rovnicemi (2,10) jsou tedy vyjádřeny souřadnice všech bodů přímky p pomocí nové proměnné u, t. z. *parametru*: proto se rovnice (2,10) nazývají *parametrické rovnice přímky* p. Čtenáři, kteří se trochu vyznají v základech analytické geometrie, vědí, jak početně určíme bod přímky p nejbližší počátku: je to pata P kolmice vedené počátkem k přímce p. Rovnice této kolmice je — jak známo z analytické geometrie —

$$3x - 2y = 0. \tag{2,11}$$

Parametr u_0 bodu P dostaneme, dosadíme-li za x, y do rovnice (2,11) z rovnic (2,10) a vypočteme u: vyjde $u_0 = \frac{14}{13}$. Mřížový bod přímky p nejbližší počátku tedy určíme, najdeme-li celé číslo u nejbližší hodnotě $u_0 = \frac{14}{13}$. Tím číslem je $u = 1$ a nejbližší mřížový bod je proto (1; 1) v souhlase s obr. 1.

Cvičení 6. Rozřešte úlohu z úvodu.

7. Věk muže a ženy jsou obrácená*) (dvouciferná) čísla a jejich rozdíl je pětina věku ženina. Určete je.

8. Vypočtěte na desítky dkg váhu dvou druhů konserv; menší konserva je lehčí než 1 kg a podařilo se vyvážiti 11 menších konserv šesti většími a kilogramovým závažím.

9. 19 bodů v rovině, z nichž žádné tři nejsou v přímce, spojujeme tak, aby vznikaly trojúhelníky a čtyrúhelníky. Kolik narýsujeme trojúhelníků a kolik čtyrúhelníků, je-li každý bod vrcholem jediného obrazce?

10. Na přímce $5x + 3y = 11$ najděte mřížový bod nejbližší ose x.

11. Několik osob je účastno stejnými podíly na společné koupi. Vzroste-li počet účastníků o 3, klesne velikost podílu o 4 tisíce Kčs. Kolik bylo původně osob a jaký byl podíl?

12. Dopravní podniky mají k disposici pro dopravení 12 000 osob dva druhy souprav: souprava A pojme 90 osob, souprava B 150 osob. Kolik kterých souprav je třeba, aby byl jejich celkový počet co nejmenší. [*Návod*: je-li x počet souprav A, y počet souprav B, sestavíme rovnici a rozřešíme ji: pak vyjádříme $x + y$ pomocí veličiny u a u zvolíme tak, aby $x + y$ bylo minimální.]

13. Sněmovna cizího státu má 253 poslance, kteří náležejí třem stranám: vládní, neutrální a oposici. Vládní strana je největší, ale nemá absolutní většinu: k jejímu dosažení potřebuje právě 28% hlasů strany neutrální. Obě neoposiční strany mají dohromady víc než dvoutřetinovou většinu. Kolik poslanců mají jednotlivé strany? [*Návod*: označte x počet hlasů strany vládní, y počet hlasů strany neutrální: pro řešení užijte omezení $x > y$, $x + y \geq 169$.]

---

*) Obrácená čísla jsou na př. 2374 a 4732.