Neurčité rovnice

3. Neurčité rovnice 1. stupně o 3 neznámých

In: Jan Vyšín (author): Neurčité rovnice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 15–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402868

3. NEURČITÉ ROVNICE I. STUPNĚ O 3 NEZNÁMÝCH

Neurčitou lineární rovnici o 3 neznámých napíšeme v tvaru:

$$ax + by + cz = d \tag{3,1}$$

a předpokládáme, že a, b, c, d jsou čísla celá, a, b, c různá od nuly (proč?). Jako v kap. 2 budeme rozlišovati úlohu, najíti podmínku řešitelnosti rovnice (3,1) od úlohy, rozřešiti tuto rovnici.

a) Rovnici (3,1) si upravíme:

$$ax + by = d - cz. \tag{3,2}$$

Považujeme-li rovnici (3,2) za neurčitou rovnici pro neznámé x, y, pak podle kap. 2 je nutná a postačující podmínka její řešitelnosti, aby největší společný dělitel δ čísel a, b byl dělitelem čísla $d - cz$. Jinak řečeno: podmínkou řešitelnosti rovnice (3,2) je, aby existovalo celé číslo t tak, že

$$\delta t = d - cz.$$

Poslední rovnici upravíme:

$$cz + \delta t = d. \tag{3,3}$$

Rovnice (3,3) je neurčitá rovnice pro neznámé z, t. Můžeme tedy říci: rovnice (3,1), resp. (3,2) je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li řešitelná rovnice (3,3). Podle kap. 2 však víme, že podmínka řešitelnosti rovnice (3,3) je, aby největší společný dělitel ε koeficientů c, δ byl dělitelem čísla d. Podle kap. 1 je ε zároveň největším společným dělitelem čísel a, b, c. Máme tedy tento konečný výsledek:

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti rovnice (3,1) je, aby největší společný dělitel čísel a, b, c byl dělitelem čísla d.

b) Řešení rovnice (3,1) provedeme analogickým způsobem jako při rovnici o dvou neznámých. Budiž dána na př. rovnice

$$18x - 12y + 15z = 6.$$

Podle předchozí věty je tato rovnice řešitelná. Krátíme třemi a osamostatníme člen s koeficientem nejmenší absolutní hodnoty.

$$4y = 6x + 5z - 2. \tag{3,4}$$

Přičtením vhodných násobků čtyř dostaneme

$$4u = 2x + z - 2,$$

čili

$$z = 4u - 2x + 2.$$

Po dosazení za z do rovnice (3,4) vyjde

$$y = -x + 5u + 2.$$

Celočíselná řešení dané rovnice jsou tedy dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -x + 5u + 2, \\ z &= -2x + 4u + 2, \end{aligned} \tag{3,5}$$

do nichž dosazujeme za x, u všechna celá čísla.

Požadujme ještě od řešení dané rovnice, aby splňovalo nějakou další podmínku. Hledejme na př. v předchozím příkladě taková celočíselná řešení x, y, z, v nichž y je číslo dělitelné sedmi. Přihlédneme-li k druhé z rovnic (3,5), znamená tato podmínka, že existuje celé číslo v tak, že platí

$$7v = -x + 5u + 2.$$

Z této rovnice dostaneme

$$x = 5u - 7v + 2$$

a po dosazení do rovnic (3,5) vyjde

$$\begin{aligned} y &= 7v, \\ z &= -6u + 14v - 2. \end{aligned}$$

Další podmínka může být dána další lineární rovnicí mezi neznámými x, y, z. Tak dostaneme *neurčitou soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých*, t. j. soustavu, která má nekonečně mnoho řešení. Hledáme opět její celočíselná řešení. Nebudeme odvozovati obecnou podmínku řešitelnosti, která je v tomto případě již poněkud složitější. Ukážeme jen na číselném příkladě, jak se taková soustava řeší.

Mějme tedy na př. soustavu:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 3, \\ 3x + y + 2z &= 1. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Vybereme si tu neznámou, která se vyskytuje v obou rovnicích, v našem příkladě třeba y. (Co by znamenal případ, kdyby se žádná neznámá nevyskytovala v obou rovnicích?) Tuto neznámou vyloučíme z rovnic (3,6) obvyklým způsobem. Není-li levá strana jedné rovnice násobkem levé strany druhé rovnice, nevyloučí se *všechny* neznámé a vyjde neurčitá rovnice pro x, z. V našem případě:

$$-5x - 7z = 1. \tag{3,7}$$

Je-li tato rovnice řešitelná, jako je tomu s rovnicí (3,7), rozřešíme ji známým způsobem. V našem případě vyjde

$$\begin{aligned} x &= -7v - 3, \\ z &= 5v + 2. \end{aligned} \tag{3,8}$$

Z rovnic (3,8) dosadíme do jedné z rovnic (3,6), třeba do druhé: dostaneme neurčitou rovnici pro y, v:

$$-11v + y = 6. \tag{3,9}$$

Je-li rovnice (3,9) řešitelná, jak je tomu v našem případě, rozřešíme ji. Ve zvoleném příkladě dostaneme ihned

$$y = 11v + 6,$$

což dává spolu s rovnicemi (3,8) řešení soustavy (3,6). Je-li některá z rovnic (3,7) nebo (3,9) neřešitelná, je ovšem také soustava (3,6) neřešitelná.

Nejjednodušší, vždy řešitelný případ neurčité lineární rovnice o třech neznámých je *homogenní rovnice* (proč?). Také soustava dvou takových rovnic je řešitelná, a to má řešení různé od triviálního řešení $x = y = z = 0$, jak vyplývá z následující úvahy.

Předem vyloučíme soustavy, kde jedna z rovnic je násobkem druhé (proč?). Soustavu, na př.

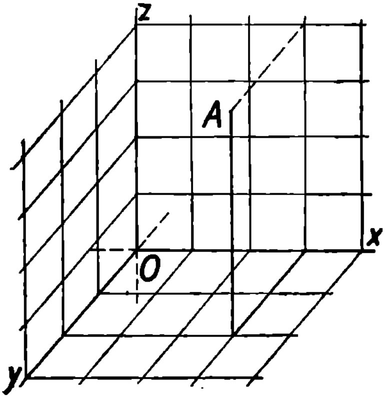
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0, \\ 4x + 2y + 3z &= 0, \end{aligned} \tag{3,10}$$

upravíme tak, že osamostatníme na pravé straně členy s jednou neznámou: tuto neznámou zvolíme tak, aby levé strany výsledných rovnic nebyly jedna násobkem druhé. Taková volba je vždy možná vzhledem k případu, který jsme předem vyloučili. (Soustavu $2x - 3y + z = 0$, $4x - 6y + 3z = 0$ bychom upravili takto: $2x + z = 3y$, $4x + 3z = 6y$.) Soustavu (3,10) upravíme třeba takto:

$$2x - 3y = - \ z,$$
$$4x + 2y = - \ 3z.$$

Tuto soustávu rozřešíme obvyklým způsobem. Vyjde $x = - \frac{11}{16}z$, $y = - \frac{1}{8}z$, čili $x : y : z = 11 : 2 : (-16)$. Soustava (3,10) neurčuje jednoznačně neznámé, nýbrž jen jejich poměr. Celočíselná řešení můžeme napsati v tvaru

$$x = 11u, \ y = 2u, \ z = - \ 16u,$$



Obr. 2.

kde u probíhá všecka celá čísla. Jaké je řešení soustavy uvedené v závorkách?

Všimneme si ještě jednoduchého geometrického významu celočíselného řešení rovnic o třech neznámých.

Jako v kap. 2 vyjdeme ze soustavy pravoúhlých souřadnic, tentokráte ovšem v prostoru, jak ji znáte z deskriptivní geometrie. Zde máme tři osy, po dvou k sobě kolmé, trojice celých čísel, na př. $(-4; 3; 1)$ jsou souřadnice t. zv. *mřížových bodů v prostoru* (obr. 2). Lineární rovnice

$$ax + by + cz = d,$$

kde a, b, c nejsou čísla vesměs rovná nule, je splněna pro nekonečně mnoho trojic čísel x, y, z. Dokazuje se, že příslušné body vyplňují rovinu, která je grafickým znázorněním dané rovnice. Probrané aritmetické úlohy znamenají geometricky: nalézti mřížové body, které leží v dané rovině nebo ve dvou rovinách. Dvě roviny jsou buď rovnoběžné nebo se protínají v přímce. Rovnoběžnost se pozná z jejich rovnic podle toho, že levá strana jedné rovnice je násobkem levé strany druhé. Tento případ jsme však při řešení soustavy vyloučili. Úloha, nalézti celočíselná řešení dvou lineárních rovnic o třech neznámých znamená tedy geometricky: určiti mřížové body, které leží na dané přímce v prostoru.

Na konci kapitoly ještě dvě *poznámky*:

a) Způsob, jak se řeší lineární rovnice o třech neznámých, se velmi snadno rozšíří na lineární rovnici o libovolném počtu neznámých. Také výsledná podmínka je obdobná: řešitelnost takové rovnice závisí na tom, zda největší společný dělitel koeficientů při neznámých je dělitelem absolutního členu či nikoli.

Také soustavy lineárních rovnic o větším počtu neznámých se řeší obdobně jako soustava dvou rovnic o třech neznámých, totiž vylučováním neznámých a snižováním počtu rovnic.

b) Co bylo řečeno o celočíselných řešeních lineárních rovnic s celočíselnými koeficienty, platí i o rovnicích s koeficienty, které jsou racionální čísla (t. j. zlomky obyčejné). Na př. rovnice

$$1{,}7x - \tfrac{3}{2}y = \tfrac{2}{3} \qquad (3{,}11)$$

se převede znásobením třiceti na rovnici s celočíselnými koeficienty

$$51x - 45y = 20. \qquad (3{,}12)$$

Rovnice (3,11) a (3,12) mají táž řešení: rozřešíme tedy rovnici (3,12) a tak dostaneme celočíselná řešení rovnice (3,11).

Cvičení 14. Rozdíl obrácených čísel dvouciferných (trojciferných) je dělitelný sedmi. Najděte je!

15. Řešte rovnici $5x + 6y - 8z = 92$ celými čísly tak, aby řešení x, y, z byla čísla navzájem co nejbližší.

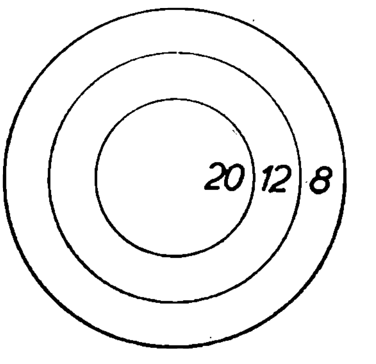
16. Najděte v rovině $3x + 4y - 7z = 1$ mřížový bod, jehož souřadnice jsou si navzájem co nejbližší.

17. K balení kusového zboží jsou k disposici tři druhy beden, které pojmou po 60, 80 a 150 kusech. Kolik beden každého druhu je třeba k zabalení 10 000 kusů, má-li být středních beden co nejméně?

18. Řešte soustavu:

$$2x - 3y + 5z = 4,$$
$$6x + 5y - 7z = 1.$$

19. Chlapci — bylo jich méně než sto — nastoupili do osmistupu a zbyli tři: když nastoupili do pětistupu, zbyli dva, v šestistupu zbyl jen jeden. Kolik jich bylo?



Obr. 3.

20. Bylo vystřeleno několik ran do terče s třemi soustřednými kruhy, označenými čísly 8, 12, 20 (obr. 3). Každá rána byla zásahem a celkový počet bodů byl 168. V středním kruhu bylo tolik zásahů jako v obou ostatních dohromady. Kolik bylo zásahů v jednotlivých kruzích?

21. Řešte soustavu

$$x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{2}z - 2u = 1,$$
$$3x + 2y - \tfrac{3}{4}z + \tfrac{1}{3}u = \tfrac{5}{2}.$$

22. Elektrické články s napětím 0,8 V, 1,2 V, 1,5 V, 2 V se mají spojiti za sebou v baterii o napětí 30 V. Nechť je článků všech druhů přibližně týž počet. Kolik je kterých?

23. Je možné naplniti jedním hektolitrem oleje 15 nádob o objemu 5, 6, 8 litrů?