I. ÚVOD

Každý čtenář se jistě setkal na střední škole s pojmem geometrického místa bodů. Tato knížka je v podstatě sbírkou řešených příkladů, které prohlubují a rozšiřují tento pojem, ukazují některé zajímavé a důležité příklady geometrických míst i jejich použití pro konstrukce a poskytují výborný materiál pro výcvik v geometrickém myšlení. Protože rozsah knížky je velmi omezený, pojednáváme jen o geometrických místech bodů v rovině.

Velmi často si představujeme geometrický útvar složený z bodů. V matematice říkáme každému souhrnu určitých věcí m n o ž i n a. Je tedy geometrický útvar množina bodů. Rovinný útvar může být množina s konečným počtem bodů, na př. souhrn vrcholů trojúhelníka nebo čtverce (samotné vrcholy!); zpravidla má však nekonečně mnoho bodů, na př. úsečka s krajními body nebo bez nich, přímka, oblouk kružnice, obvod pětiúhelníka, polorovina, úhel (jako část roviny) a p.

Při řešení různých geometrických úloh se znovu a znovu setkáváme s dílčí úlohou, vyhledati v rovině všecky body mající určitou vlastnost. Tak na př. jsou dány dva různé body A, B a máme vyhledati všecky body v rovině, které jsou od bodů A, B stejně vzdáleny. Ze střední školy víte, že tyto body vyplňují přímku, která je kolmá k úsečce AB, prochází jejím středem a jmenuje se osa úsečky AB. Tento výsledek můžeme vysloviti větou: množina všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od dvou různých bodů A, B, je osa úsečky AB.

Vyslovená věta nám říká, že dvě množiny jsou totožné, a to předně množina všech bodů, které mají od obou bodů A, B stejné vzdálenosti, a za druhé přímka, zvaná osa úsečky AB. Na tomto místě je nutné si uvědomit, co znamená výrok, že dvě množiny jsou totožné, resp. jak takovou totožnost dokazujeme. V matematice užíváme téhož postupu, který je běžný i v denním životě. Uvedeme si příklad:

Podle jmenného seznamu máme zjistiti, zda ve schůzi jsou přítomny právě všecky osoby zapsané v seznamu: čili máme dokázati totožnost množiny S všech osob zapsaných v seznamu a množiny P všech přítomných osob. Jak to provedeme? Předčítáme jména podle seznamu a přítomní se hlásí; tím si ověříme, že každá osoba z množiny **S** je mezi osobami z **P**. Potom vyzveme přítomné, aby na př. podle pořádku, jak sedí, hlásili svá jména: při tom kontrolujeme, zda každé hlášené jméno je zapsáno v seznamu. Tak zjistíme, že každá osoba z množiny **P** je také v množině **S**.

Obyčejně však tuto druhou část zkoumání totožnosti množin **P**, **S** provádíme kratšeji. Zeptáme se, zda někdo z přítomných nebyl čten; nepřihlásí-li se nikdo, znamená to, že osoba nezapsaná v seznamu není mezi přítomnými, čili že osoba, která není z **S**, není také v **P**. To je ovšem podle pravidel logiky tvrzení shodné s tvrzením, že každá osoba z **P** je obsažena mezi osobami z **S**. Je tedy také tímto postupem prokázána totožnost obou množin.

Stejný smysl má totožnost dvou množin bodů. Řekneme-li: množina všech bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů A, B je osa úsečky AB, znamená to: 1) každý bod stejně vzdálený od obou bodů A, B je bodem osy úsečky AB; 2) každý bod osy úsečky AB je stejně vzdálen od obou bodů A, B, čili každý bod, jehož vzdálenosti od bodů A, B jsou různé, leží mimo osu úsečky AB.

Slovo množina bylo do matematiky zavedeno teprve v nedávné době. V geometrii se již dlouho předtím užívalo názvu geometrické místo*) bodů; proto i dnes užíváme v geometrii skoro výhradně tohoto staršího názvu. Říkáme tedy: geometrické místo bodů v rovině stejně vzdálených od dvou různých bodů A, B, je osa úsečky AB. Ovšem ať použijeme jednoho nebo druhého názvu, musíme si být stále vědomi, že vyslovená věta znamená totožnost dvou množin a že je tedy shrnutím dvou vět (v našem příkladě věty 1 a 2). Při odůvodňování musíme ovšem dokázati obě tyto věty.

2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ

Rozebereme si podrobně čtyři příklady g. m. bodů.

Příklad 1. *Jsou dány dva různé body A, B; máme najíti g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od bodů A, B mají za součet úsečku dané délky s.* Při diskusi g. m. zřejmě záleží na vzájemném vztahu délek $\overline{AB}$, s.

*) Slova „geometrické místo“ budeme dále důsledně zkracovati g. m.