u, v jeho vzdálenosti od přímek BC, AC. Pak rozdíl au — bv, kde a, b znamenají délky stran trojúhelníka ABC, má tutéž hodnotu pro všecky body X, je totiž roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABC.

Důkaz se dále provádí podobně jako v případě 1 a přenecháváme jej čtenáři. •

Za povšimnutí stojí zvláštní případy těchto g. m., kdy buď $a = b = 1$, nebo $a = 1$, $b = -1$, nebo $a = -1$, $b = 1$. Tu jde o g. m. bodů, které mají od dvou různoběžek stálý součet, resp. rozdíl vzdáleností. Projde-li si čtenář odvození v těchto zvláštních případech, snadno nahlédne, že příslušná g. m. jsou buď obvod pravoúhlého rovnoběžníka nebo čtveřina polopřímek, které vzniknou prodloužením jeho stran.

Cvičení.

Ke kapitolám 1, 2.

1. Je dána kružnice k a na ní bod A. Rozhodněte, zda jsou totožné tyto dvě množiny bodů: 1° přímka AS, 2° množina středů kružnic, které se dotýkají kružnice k v bodě A.

2. Je dán a) čtverec $ABCD$, b) libolný vypuklý pětiúhelník $ABCDE$. $X \neq A$ je bod jeho obvodu. Co je g. m. středů úseček AX, probíhá-li bod X obvod daného obrazce?

3. Dokažte, že g. m. středů stejně dlouhých tětiv dané kružnice k je kružnice soustředná s k.

4. Určete g. m. bodů, z nichž lze vésti k dané kružnici tečny dané délky.

5. Je dána úsečka AB a přímka p. Na přímce p najděte bod, jehož vzdálenosti od bodů A, B mají co nejmenší součet čtverců. Proveďte diskusi úlohy vzhledem k různým možným vzájemným polohám přímky p a úsečky AB.

6. Je dán trojúhelník ABC, X je libovolný bod strany AB, V je průsečík jeho výšek. Označíme X' bod souměrně položený k bodu V podle přímky CX. Co je g. m. bodů X', probíhá-li bod X úsečku AB?

Ke kapitolám 3, 4.

7. AB, CD jsou dva navzájem kolmé průměry kružnice se středem S, E, F jsou středy úseček AS, CS. Určete vzdálenost polokružnice ACB a úsečky a) DE, b) EF.

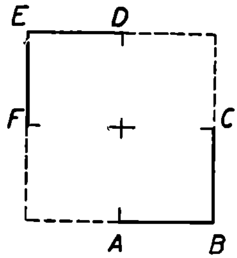
8. Uvnitř kružnice narýsujte trojúhelník a určete jeho vzdálenost od kružnice.

9. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník a uvnitř něho kružnici. Určete vzdálenost trojúhelníka od kružnice.

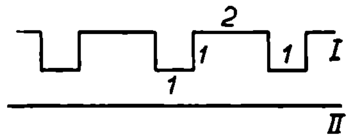
10. Je dán bod S a dvě délky a, v. Určete g. m. středů úseček délky a, které mají od bodu S vzdálenost v.

11. Jsou dány tři různoběžky a, b, c, které neprocházejí jedním bodem. Určete body stejně vzdálené od všech tří přímek.

12. Obr. 38. Jsou dány dvě lomené čáry ABC, DEF ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = d$). Určete g. m. bodů, které mají vzdálenost v od obou lomených čar. Při diskusi uvažte případy: 1. $v < \frac{d}{\sqrt{2}}$, 2. $v = \frac{d}{\sqrt{2}}$, 3. $\frac{d}{\sqrt{2}} < v < d$, 4. $v = d$, 5. $v > d$.



Obr. 38.



Obr. 39.

13. Na obr. 39 je narýsována lomená čára I a přímka II. Čísla 1, 2 značí délky úseček v cm. Určete g. m. bodů,

a) které mají od lomené čáry I vzdálenost rovnou 1;

b) které mají od čar I, II stejné vzdálenosti.

Ke kapitolám 5, 6, 7.

14. Je dán pravoúhlý trojúhelník s úhly 30°, 60°. Určete g. m. bodů, z nichž je viděti tento trojúhelník pod úhlem α ležícím mezi 60° a 90°.

15. Je dána úsečka AB a přímka s ní rovnoběžná, která ji neobsahuje. Co je g. m. průsečíků výšek trojúhelníka ABX, probíhá-li bod X přímku p?

16. Rozřešte konstruktivně Pothenotovu úlohu: stanoviště S leží v polorovinách ABC, BCA a jsou známy délky $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 9$, úhly $\sphericalangle ASB = 45°$, $\sphericalangle BSC = 75°$.

17. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q. Určete g. m. bodů, jejichž vzdálenosti od přímek p, q mají podíl $\frac{2}{3}$.

18. Je dána přímka p a mimo ni bod S. Spojíme libovolný bod X na p s bodem S a na prodloužení úsečky XS za bod S naneseme k-násobek úsečky XS; dostaneme tak bod X'. Dokažte: probíhá-li bod X přímku p, probíhá bod bod X' jistou přímku $p' \parallel p$; její vzdálenost od bodu S je k-násobek vzdálenosti přímky p od bodu S. Návod: Dokažte a) s pomocí podobných trojúhelníků, že každý bod přímky p' je takovým bodem X'; b) že každý bod jiné rovnoběžky $p'' \parallel p$ nemůže být bodem X'.

19. Uvnitř dutého úhlu AVB je dán bod M. Sestrojte úsečku XY tak, aby obsahovala bod M, aby body X, Y ležely na ramenech VA, VB a aby platilo $\overline{XM} = 3 . \overline{YM}$.

20. Rozřešte konstruktivně Hansenovu úlohu: stanoviště S_1, S_2 leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB; je dáno $\overline{AB} = 8$, $\sphericalangle AS_1B = 30°$, $\sphericalangle AS_2B = 45°$, $\sphericalangle AS_1S_2 = 75°$, $\sphericalangle S_1S_2A = 60°$.

21. Jsou dány dvě přímky p, q a na nich dva body $A \neq B$ (A na p, B na q). Určete bod, jehož vzdálenosti od přímek p, q i od bodů A, B jsou v poměru 2 : 3.

22. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poměr jeho stran $a : b = \frac{2}{3}$, strana $c = 5$ a výška $v_c = 3{,}5$. Proveďte diskusi úlohy v obecném případě.

Ke kapitole 8.

23. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q o vzdálenosti v. Určete g. m. bodů, které mají od obou rovnoběžek stálý součet vzdáleností s. Proveďte diskusi ($v < s$, $v = s$, $v > s$).

24. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 6 cm. Určete bod, jehož vzdálenosti u, v, t od stran AB, BC, CA splňují rovnice: $u + v = 4$ cm, $v + t = 4{,}5$ cm.

25. Narýsujte rovnostranný trojúhelník o straně a a zvolte si úsečku délky $s < a$. Sestrojte tři g. m. bodů, jejichž součet vzdáleností vždy od dvou stran trojúhelníka je s. Jak musíme zvoliti s, aby všecka tři g. m. měla společný bod?

26. Je dán trojúhelník ABC o stranách $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CA} = 7$. Označíme u, v, t vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC, CA. Určete všecky body X, pro něž platí

$$\begin{aligned} 2u + 3v &= 12, \\ t - u &= 3. \end{aligned}$$

Přesvědčte se výpočtem i graficky, že nalezené body náležejí také g. m. bodů, pro něž $2t + 3v = 18$.

27. Písmena x, y značí pravoúhlé souřadnice bodu v rovině. Znázorněte graficky rovnice a) $|x| - |y| = 2$, b) $2|x| - 3|y| = 1$.

28. Rozřešte graficky soustavu rovnic:

a) $$\begin{aligned} |x| + 2|y| &= 7, \\ 3|x| - 4|y| &= 1; \end{aligned}$$ b) $$\begin{aligned} |x| - |y| &= 1, \\ 7|x| + 2|y| &= 1. \end{aligned}$$

Pokládejte x, y za pravoúhlé souřadnice bodu v rovině.