Kosoúhlé promítání

Část II. Způsoby kosoúhlého promítání

In: Ferdinand Veselý (author): Kosoúhlé promítání. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1950. pp. 37–70.

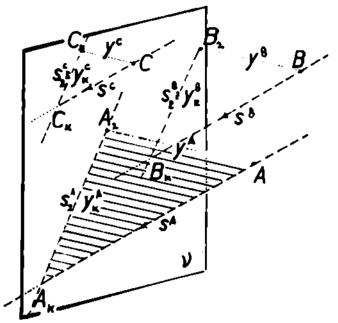
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402919

ČÁST II.

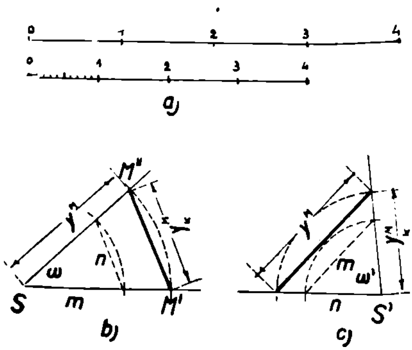
ZPŮSOBY KOSOÚHLÉHO PROMÍTÁNÍ

I. Kosoúhlé promítání na nárysnu.

Za nárysnu považujeme svislou průčelnou rovinu a učiňme ji také nákresnou. Poloha určitého bodu A vůči nárysně jest určena jeho kolmým průmětem A_2 a jeho vzdáleností od nárysny, t. zv. souřadnicí y^A bodu A. Vedeme-li bodem A kosoúhlý paprsek s^A, protne nárysnu v bodě A_k, kosoúhlém to průmětu bodu A. Vznikne pravoúhlý trojúhelník AA_2A_k s vrcholem pravého úhlu v bodě A_2; i můžeme odvěsnu $\overline{A_2A_k}$ považovati buď za kolmý průmět s_2^A kosoúhlého paprsku s^A nebo za kosoúhlý průmět y_k^A souřadnice y^A bodu A. Nazveme-li poměr délek $\overline{A_2A} : \overline{A_2A_k} = y^A : y_k^A = 1/q$ spádem kosoúhlého paprsku, vidíme z obr. 28, že spád kosoúhlých paprsků s^A, s^B, $c^C, \ldots$ všech bodů A, B, $C, \ldots$, ležících mimo nárysnu je stejný, neboť trojúhelníky AA_2A_k, BB_2B_k, $CC_2C_k, \ldots$, jsou si podobné a jejich strany jsou úměrné.



Obr. 28.



Obr. 29.

Spád $1/q$ určuje, jak se zkrátí (nebo prodlouží) kosoúhlý průmět y_k^M souřadnice y^M nějakého bodu M proti této souřadnici skutečné, a nazýváme q pak zcela oprávněně *zkrácením* kosoúhlého promítání.

Orientovaným směrem $\vec{s}_2$ (nárysem kosoúhlého paprsku) *a zkrácením q je kosoúhlé promítání na nárysnu určeno.*

Abychom sestrojili kosoúhlý průmět M_k nějakého bodu M, sestrojíme nejprve nárys M_2 bodu M (t. j. kolmý průmět na nárysnu), vedeme jím nárys $s_2^M \| \vec{s_2}$ kosoúhlého paprsku s^M bodu M, zkrátíme souřadnici y^M bodu M v poměru spádu q a zkrácenou y_k^M vyneseme na s_2^M od bodu M_2 ve směru orientace paprsku s_2^M. Koncový bod je hledaný kosoúhlý průmět M_k bodu M.

Směr $\vec{s_2}$ se udává zpravidla ramenem úhlu ω s vodorovnou přímkou v nákresně, t. zv. základnicí x, a nazývá se krátce *zkosením*. Úhel ω uvažujeme ve smyslu ruč. hodinových od základnice x jdoucí zleva doprava.

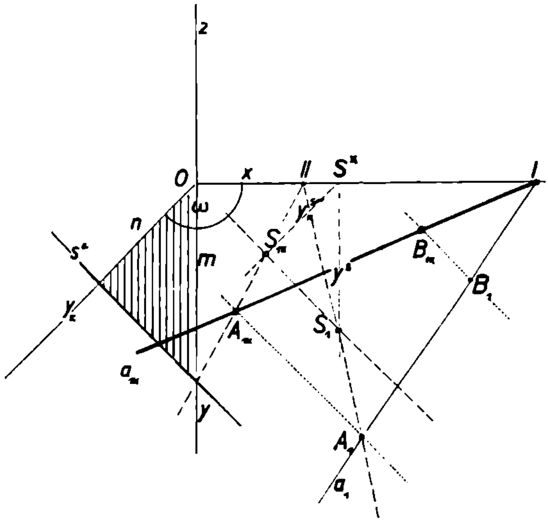
Zkrácení souřadnice y^M pro dané zkrácení q provedeme několikerým způsobem:

1. T. zv. *redukčním měřítkem*. Jest to nové měřítko, které si pořídíme z měřítka základního tak, že za jednotku měřítka redukčního považujeme $q$tou část jednotky měřítka základního. Na obr. 29a je sestrojeno pro poměr $q = \frac{3}{4}$.

2. Jiný způsob sestrojení zkrácené úsečky y_k^M je užitím *redukčního úhlu*. Jestliže spád $q = \frac{n}{m}$, sestrojíme úhel ω v kružnici o poloměru m příslušný k její tětivě délky n (obr. 29b). Ramena tohoto úhlu protne kružnice o poloměru y^M v bodech M' a M'' a tětiva $\overline{M'M''}$ se rovná zkrácené délce y_k^M. Také jest na obr. sestrojen pro poměr $q = \frac{3}{4}$. Někdy si sestrojíme i t. zv. *reciproký redukční úhel* pro poměr $q' = \frac{m}{n}$ pro převádění zkrácených souřadnic y_k^M na skutečné y^M (obr. 29c).

3. Často použijeme i t. zv. *redukčního trojúhelníka* pro spád $q = \frac{n}{m}$. Jest to obecný trojúhelník s jedním vrcholem O na základnici x, jednou stranou délky m na kolmici y ku základnici a druhou stranou délky n na přímce y_k jdoucí vrcholem O rovnoběžně se směrem $\vec{s_2}$. Úhel $\widehat{xs_2} = \widehat{xy_k} = \omega$. Každý jiný trojúhelník, jehož strany budou se stranami redukčního trojúhelníka rovnoběžné, je mu podobný a poměr jeho stran y^s a y_k^s rovnoběžných s y a y_k je dané zkrácení q (obr. 30). Třetí stranu tohoto trojúhelníka nazýváme pak také *zkrácením*.

Pro určité kosoúhlé promítání musí býti tedy napřed určeno zkosení ω a zkrácení q. Tak na př. ($\omega = 120°$, $q = \frac{1}{2}$). Jestliže $\omega = 135°$, $q = \sqrt{2} : 1$, mluvíme o *technickém kosoúhlém promítání*, neboť lze při



Obr. 30.

jeho zobrazování výhodně pracovati s rovnoramenným pravoúhlým trojúhelníkovým pravítkem, jímž můžeme jednou odvěsnou rýsovati zkosení a druhou zkrácení, posunujíce trojúhelník přeponou po vodorovné hraně příložníku.

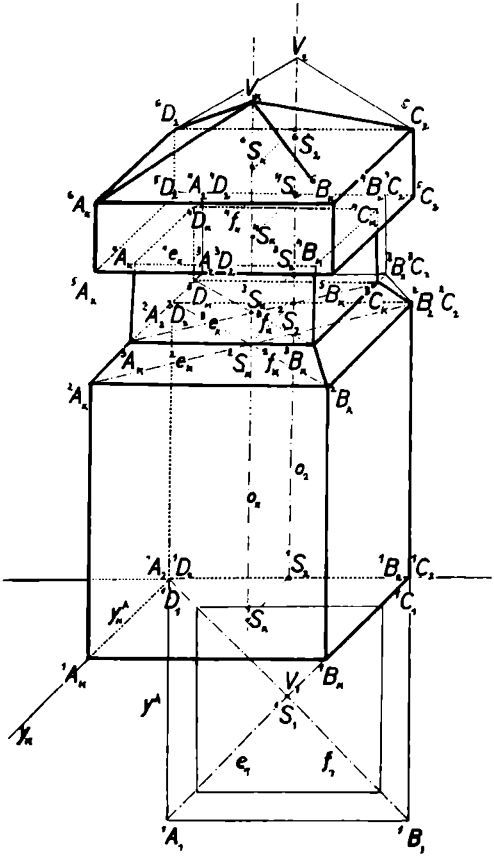
Kosoúhlé promítání na nárysnu poskytuje názorné obrázky, když je pozorujeme z větší vzdálenosti a ze strany, proto se také nazývá *rovnoběžnou perspektivou**). Volíme-li zkosení $\omega < 180°$, mluvíme o *nadhledu*, obrázky jsou pozorovány shora, je-li $\omega > 180°$, pak jde o *podhled*, obrázky pozorujeme zdola.

1. Příklad: *Podle půdorysu a nárysu narýsovaného v obr. 31 sestrojte kosoúhlý průmět hraničního kamene pro* $\omega = 135°$ a $q = \frac{1}{2}$!

Protože těleso je dosti složité, rozdělíme je na tělesa základní (hranoly, jehlany). Nejprve zobrazíme kosoúhlý průmět kvádru I.

*) Aby se obrázky příliš neskreslovaly, volíme $q \gtreqless \frac{1}{2}$. Pak úhel φ promítacích paprsků s průmětnou je větší než 60°.

Jeho nárysem je obdélník o vrcholech ${}^1A_2 \equiv {}^1D_2$, ${}^1B_2 \equiv {}^1C_2$, ${}^2A_2 \equiv {}^2D_2$, ${}^2B_2 \equiv {}^2C_2$. Protože podle půdorysu zjistíme, že vrcholy ${}^1D$, ${}^1C$, ${}^2D$, ${}^2C$ kvádru leží v nárysně, jsou jejich kosoúhlé průměty totožné s ${}^1D_2$, ${}^1C_2$, ${}^2D_2$ a ${}^2C_2$. Kosoúhlé průměty vrcholů ${}^1A$, ${}^1B$, ${}^2A$ a ${}^2B$ získáme tak, že na př. bodem ${}^1A_2 \equiv {}^1D_2$ vedeme rovnoběžku se zkosením, t. j. přímku, která se základnicí x svírá úhel $\omega = 135°$, a vyneseme na ní od bodu ${}^1A_2$ *polovinu* ($q = \frac{1}{2}$) vzdálenosti $y^{{}^1A}$ bodu ${}^1A$, kterou máme ve skutečné velikosti v půdoryse kvádru I jako vzdálenost bodu ${}^1A_1$ od základnice. Stejným způsobem stanovíme i body ${}^1B_k$, ${}^2A_k$ a ${}^2B_k$. Spojnice bodů ${}^1A_k$, ${}^1B_k$, ${}^2A_k$ a ${}^2B_k$ poskytnou kosoúhlý průmět obdélníka ${}^1A{}^1B{}^2A{}^2B$; vidíme, že je shodný, neboť leží v rovině s kosoúhlou průmětnou (nárysnou) rovnoběžnou. Spojnice $\overline{{}^1A_k{}^1D_k}$ a $\overline{{}^1B_k{}^1C_k}$, $\overline{{}^2A_k{}^2D_k}$ a $\overline{{}^2B_k{}^2C_k}$ jsou kosoúhlé průměty hran kvádru I, které jsou k nárysně kolmé.



Obr. 31.

Stejným způsobem bychom získali kosoúhlý průmět komolého jehlanu II, jehož nárysem je rovnoramenný lichoběžník o vrcholech ${}^2A_2 \equiv {}^2D_2$, ${}^2B_2 \equiv {}^2C_2$, ${}^3A_2 \equiv {}^3D_2$, ${}^3B_2 \equiv {}^3C_2$. Kosoúhlé průměty vrcholů ${}^2A$, ${}^2B$, ${}^2C$ a ${}^2D$ jsme již sestrojili, průměty ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$ lze získati i takto: Kvádr *I* a komolec *II* jsou souosé. Lze tedy snadno stanoviti kosoúhlý průmět ${}^3S_k$ středu ${}^3S$ horní podstavy komolce. Stanovíme kosoúhlý průmět $o_k \equiv {}^1S_k{}^2S_k$ osy tělesa o, vyneseme na ní od ${}^2S_k$ délku $\overline{{}^2S^3S}$, výšku komolce, a koncový bod je kosoúhlý průmět ${}^3S_k$ středu ${}^3S$, neboť osa o je rovnoběžná s kosoúhlou průmětnou (nárysnou) a všechny délky na ní ležící mají stejné kosoúhlé průměty. Sestrojíme dále kosoúhlé průměty obou úhlopříček ${}^2e$ a ${}^2f$ podstavy ${}^2A{}^2B{}^2C{}^2D$ a kosoúhlé průměty ${}^3e_k$ a ${}^3f_k$ úhlopříček ${}^3e$ a ${}^3f$ podstavy ${}^3A{}^3B{}^3C{}^3D$ jsou s ${}^2e_k$ a ${}^2f_k$ rovnoběžné. Vedeme-li tedy body ${}^3A_2 \equiv \equiv {}^3D_2$ a ${}^3B_2 \equiv {}^3C_2$ zkosení, protnou tyto dvě rovnoběžky kosoúhlé průměty ${}^3e_k$ a ${}^3f_k$ v kosoúhlých průmětech ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$.

Kosoúhlý průmět horní podstavy ${}^4A{}^4B{}^4C{}^4D$ hranolu *III* najdeme tak, že vedeme body ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$ rovnoběžky se přímkou o_k, jsou to kosoúhlé průměty pobočných hran hranolu *III*, vyneseme na ně délky hran $\overline{{}^3A{}^4A} = \overline{{}^3B{}^4B} = \overline{{}^3C{}^4C} = \overline{{}^3D{}^4D}$, neboť i ony jsou s kosoúhlou průmětnou rovnoběžné. Stačilo také určiti ${}^4S_k$ na o_k a jím vésti kosoúhlé průměty ${}^4e_k$, ${}^4f_k$ úhlopříček podstavy ${}^4A{}^4B{}^4C{}^4D$.

Na ${}^4e_k$ a ${}^4f_k$ a na prodloužených kosoúhlých průmětech pobočných hran ${}^1A{}^2A \parallel {}^1B{}^2B \parallel {}^1C{}^2C \parallel {}^1D{}^2D$ jsou ${}^5A_k$, ${}^5B_k$, ${}^5C_k$, ${}^5D_k$ a z nich snadno sestrojíme ${}^6A_k$, ${}^6B_k$, ${}^6C_k$, ${}^6D_k$ a ${}^6S_k$.

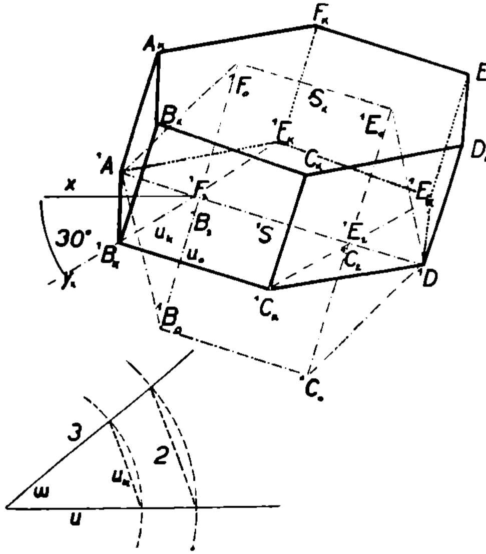
Nakonec stanovíme i kosoúhlý průmět jehlanu *V*. Stačí sestrojiti známým už způsobem kosoúhlý průmět V_k vrcholu jehlanu *V* tak, že na o_k vyneseme od ${}^6S_k$ výšku v jehlanu *V*.

Podle orientace s_2 stanovíme viditelnost kosoúhlých průmětů vrcholů hraničního kamene, při čemž se řídíme větou, že viditelnými budou ty, které jsou vzdálenější od průmětny. Obrysové vrcholy jsou viditelné všechny, z vnitřních jsou to ${}^2B_k$, ${}^3B_k$, ${}^5B_k$, ${}^6B_k$. Vrcholy ${}^4A_k$, ${}^4B_k$, ${}^4C_k$ ${}^4D_k$ jsou všechny neviditelné. Proč?

Po spojení příslušných viditelných vrcholů úsečkami silnými, jež jsou kosoúhlými průměty viditelných hran kamene, a neviditelných čarami čárkovanými získáváme kosoúhlý průmět kamene.

2. Příklad. *Užitím pomocného průmětu stanovte kosoúhlý průmět pro* $\omega = 150°$ a $q = \frac{2}{3}$ *pravidelné šestiboké desky o hraně* $a = 3$ *a výšce* $v = 2$, *jehož podstava je v rovině kolmé k nárysně* (obr. 32)!

Jednu úhlopříčku $\overline{{}^1A{}^1D}$ položíme do nárysny a bude také nárysem prvé podstavy, jíž sklopíme okolo ${}^1A{}^1D$ do nárysny. Sestrojíme totiž nad $\overline{{}^1A{}^1D}$ jako úhlopříčkou pravidelný šestiúhelník ${}^1A{}^1B_0{}^1C_0{}^1D{}^1E_0{}^1F_0$. Kratší úhlopříčky ${}^1B{}^1F$ a ${}^1C{}^1E$ jsou kolmé ku v, jejich nárysy jsou body ${}^1B_2$ a ${}^1C_2$ na $\overline{{}^1A{}^1D}$. Jimi vedeme zkosení pro úhel $\omega = 150°$ a na toto od ${}^1B_2$ resp. ${}^1C_2$ vyneseme zkrácené poloviny úhlopříček $\overline{{}^1B_0{}^1F_0}$ a $\overline{{}^1C_0{}^1E_0}$ užitím redukčního úhlu φ pro poměr $q = \frac{2}{3}$. Kosoúhlými průměty ${}^1A$, ${}^1B_k$, ${}^1C_k$, ${}^1D$, ${}^1E_k$ a ${}^1F$ vedeme kolmice ku ${}^1A{}^1D$ a vyneseme na ně od ${}^1A$, ${}^1B_k \dots$ výšky $v = 2$. Získáme tak kosoúhlý průmět druhé podstavy, neboť pobočné hrany desky jsou s nárysnou rovnoběžné. Nakonec určíme viditelnost průmětu.



Obr. 32.

2. Kosoúhlý půdorys.

Jest výhodné zobrazovati těleso v poloze průčelné, t. j. tak, aby jeho délka a výška byly rovnoběžné s průmětnou a zobrazovaly se na ní kosoúhle ve skutečné velikosti. Pak se zkosí a zkrátí jen šířka tělesa. Proto si obyčejně napřed zobrazíme t. zv. rozměrový čili osový kříž (obr. 30), vodorovnou (délkovou) osu označíme písmenem x, k ní je kolmá svislá osa (výšková) z, a k nim přidáme zkosenou osu šířek $y_k \equiv s_2$, aby úhel $\widehat{xy_k} = \omega$. Připojíme ještě redukční trojúhelník tak, že na prodlouženou osu výšek z pod základnicí vyneseme podle daného zkrácení $q = \dfrac{n}{m}$ délku m a na osu šířek y_k délku n. Třetí stranu tohoto trojúhelníka označíme s^a.

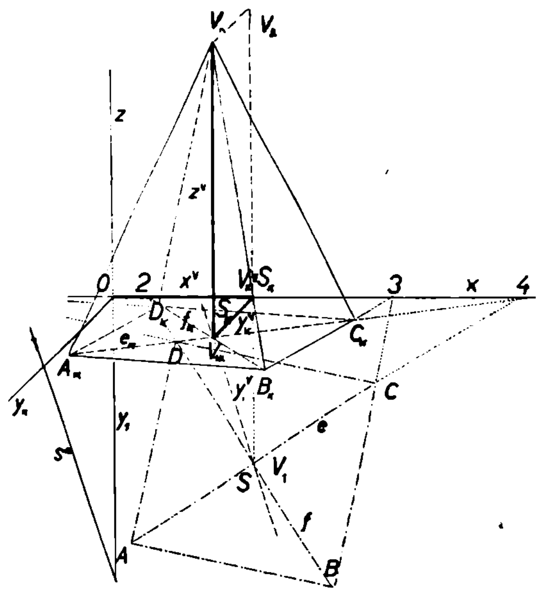
Uvažujme nyní v půdorysně určené osami x, y nějaký obrazec $\mathfrak{A}$. Jestliže jej kosoúhle promítneme do nárysny, bude perspektivně afinní se svým kosoúhlým průmětem $\mathfrak{A}_k$ s osou afinity v ose x a směrem afinity v kosoúhle promítacím paprsku. Otáčíme-li však obrazec $\mathfrak{A}$ okolo osy x do nárysny do polohy $\mathfrak{A}_1$, budou také obrazce $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{A}_k$ perspektivně afinní (ve dvojité rovině), kde jejich osou afinity bude opět osa x a směrem afinity právě ta třetí strana redukčního trojúhelníka s^a (zkrácení).

Za obrazec $\mathfrak{A}$ ležící v půdorysně lze považovati půdorys P_1 každého tělesa. Jeho kosoúhlý průmět $\mathfrak{A}_k$ nazývejme *kosoúhlým půdorysem* a značme P_{1k}. Sestrojíme jej tak, že nejdřív stanovíme kolmý půdorys sklopený okolo základnice x do nárysny a pak pracujeme perspektivní afinitou s osou x jako osou afinity a zkrácením s^a jako směrem afinity. K jejímu úplnému určení jest ovšem třeba k jednomu bodu sklopeného půdorysu (nejčastěji to bývá střed S_1 obrazce) stanoviti kosoúhlý půdorys (S_{1k}), což provedeme na př. redukčním trojúhelníkem (obr. 30). Ostatní body, na př. A_{1k}, B_{1k}, a přímky, na př. a_{1k}, kosoúhlého půdorysu vyvodíme ze sklopeného půdorysu (A_1, B_1, a_1) už jen perspektivní afinitou.

Příklad: *Zobrazte kosoúhlý průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavě v půdorysně s podstavnou hranou* $a = 5$ *svírající s osou* x *úhel* $\varphi = 15°$ a *výšce* $v = 7$, *jestliže* $\omega = 135°$ a $q = \frac{1}{3}$! (Obr. 33.)

Sestrojíme si osový kříž pro $\omega = 135°$ a redukční trojúhelník se stranou s^a pro $q = \frac{1}{3}$. Ve sklopeném půdoryse zobrazíme čtverec $ABCD$, aby jeho jedna strana na př. $\overline{AB}$ svírala s osou x úhel $\varphi = 30°$ a úhlopříčkami e a f určíme jeho střed S. Bodem S vedeme rovnoběžku se stranou y_1 redukčního trojúhelníka a jejím průsečíkem S_x s osou x rovnoběžku s y_k (zkosení). Tu protneme v bodě S_k rovnoběžkou se stranou s^a jdoucí bodem S (zkrácení). Perspektivní afinita je určena. Stanovíme průsečíky *2* a *4* úhlopříček e a f s osou afinity x a spojnice $S_k2 \equiv e_k$ a $S_k4 \equiv f_k$ jsou kosoúhlé půdorysy úhlopříček e a f čtverce. Dále vedeme body A, B, C a D paprsky afinity rovnoběžně se směrem s^a a určíme jejich průsečíky A_k, B_k, C_k a D_k s e_k a f_k. Rovnoběžník $A_{1k}B_{1k}C_{1k}D_{1k}$ s úhlopříčkami e_k a f_k je kosoúhlý půdorys jehlanu, neboť bod $S \equiv V_1$ a také $S_k \equiv V_{1k}$. Výška v jehlanu je rovnoběžná s v a jde středem S podstavy, její kosoúhlý průmět rovná se tedy její skutečné velikosti $v = 7$ a jde bodem V_{1k} rovnoběžně s osou z. Koncový bod V_k spojíme kosoúhlými průměty pobočných hran jehlanu s A_k, B_k, C_k a D_k a rozhodneme o viditelnosti celého průmětu. A platí věta:

Vzdáleností od půdorysny a půdorysem jest kosoúhlý průmět bodu při daném osovém kříži a poměru zkrácení určen.



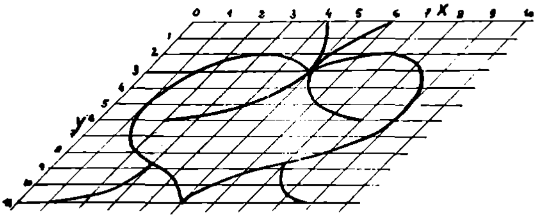
Obr. 33.

Důkaz vyplývá z konstrukce bodu V_k. Lze snadno dokázati i větu obrácenou:

Kosoúhlým půdorysem a vzdáleností od půdorysny (tedy kosoúhlým průmětem) *jest bod v prostoru při daném osovém kříži a poměru zkrácení určen.*

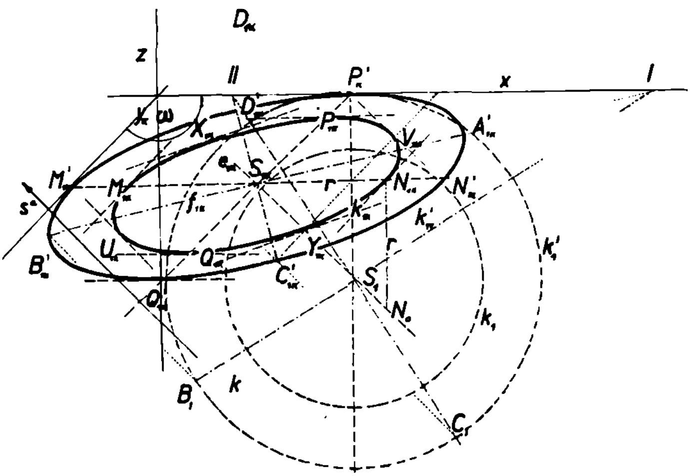
Veďme bodem V_{1k} rovnoběžku s y_k a stanovme její průsečík V_x se základnicí x. Tím veďme dále rovnoběžku s y_1 a protněme ji v bodě V_1 rovnoběžkou se směrem s^a jdoucí bodem V_{1k}. Bod V_1 je sklopený půdorys bodu V. Nárys V_2 je na kolmici ku ose x v bodě V_x a je od V_x vzdálený o danou vzdálenost bodu V od půdorysny, t. j. o délku $z^v = \overline{V_k V_{1k}}$. Půdorysem V_1 a nárysem V_2 je bod V určen.

Při složitějších půdorysech neodvozujeme ze sklopeného půdorysu kosoúhlý půdorys bod za bodem, ale sestrojíme si ve sklopeném půdoryse *čtvercovou síť*, vyvodíme si její kosoúhlý průmět jako síť rovnoběžníkovou a do ní vyrýsujeme kosoúhlý půdorys obrazce (obr. 34).



Obr. 34.

Kosoúhlý průmět kružnice ležící v půdorysně sestrojíme tak, že nejdříve sklopíme danou kružnici okolo osy x do nárysny, do polohy k_1 k jejímu středu S_1 vyhledáme užitím redukčního trojúhelníka jeho kosoúhlý průmět S_k a perspektivní afinitou stanovíme známým způsobem osy elipsy k_k, nebo zvolíme v kružnici dva na sebe kolmé průměry (nejlépe, aby jeden byl s osou x rovnoběžný a druhý k ní kolmý), stanovíme jejich kosoúhlé průměty užitím jejich samodružných bodů

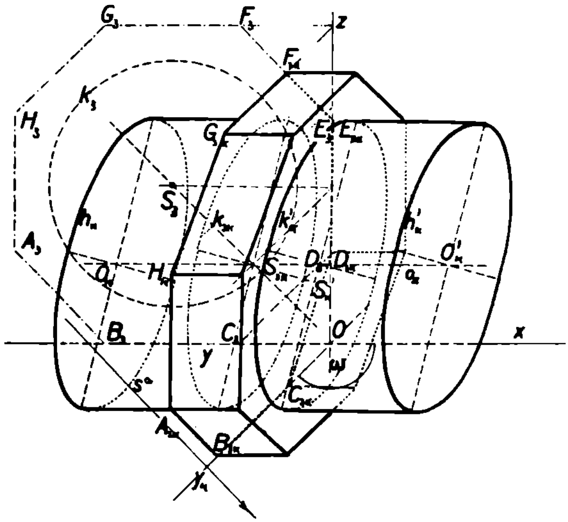


Obr. 35.

na ose x a paprsků afinity jdoucích sklopenými půdorysy jejich koncových bodů. Známou osmitečnovou konstrukcí sestrojíme pak ze sdružených průměrů elipsu k_k. Na obr. 35 bylo takto zobrazeno mezikruží ležící v půdorysně. Vnější elipsa sestrojena byla z os, vnitřní z osmi tečen.

3. Kosoúhlý stranorys.

Také obrazec $\mathfrak{B}$ v stranorysně je se svým kosoúhlým průmětem $\mathfrak{B}_k$ perspektivně afinní s osou z jako osou afinity a směrem kosoúhlého promítání s jako směrem afinity. Sklopíme-li opět stranorysnu okolo osy z do nárysny, budou také sklopený bokorys $\mathfrak{B}_3$ a kosoúhlý průmět $\mathfrak{B}_{3k}$ perspektivně afinní s osou afinity v ose z a směrem afinity ve směru s^a (obr. 36). Ten je třetí stranou redukčního trojúhelníka pro $q = \frac{n}{m}$ tentokrát tak sestrojeného, že na prodlouženou osu x byla od počátku

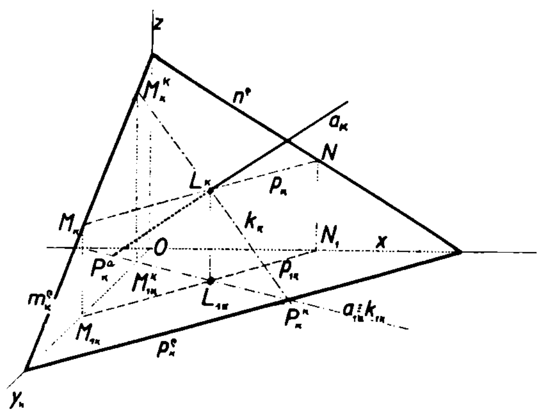


Obr. 36.

O vynesena délka m a na kosoúhlý průmět y_k délka n a jejich koncové body spojeny paprskem s^a. Na tomto obrázku byla tak sestrojena rovnoběžná perspektiva pravidelné osmiboké desky o poloměru opsané kružnice $r = 3,5$ a výšce $v = 1,5$ s podstavou ve stranorysně. Ta byla provrtána souosým rotačním válcem o poloměru $r' = 2,5$ a výšce $v' = 5$. Byl sestrojen sklopený bokorys S_3 středu S osmiúhelníka, sklopený osmiúhelník, dále redukčním trojúhelníkem kosoúhlý bokorys S_{3k}, jak patrno z obr., a perspektivní afinitou kosoúhlý průmět jedné (levé) podstavy hranolku. Jeho vrcholy a středem byly dále vedeny rovnoběžně s osou x kosoúhlé průměty pobočných hran a osy o, vyneseny na ně jejich délky ve skutečné velikosti (proč?) a sestrojen kosoúhlý průmět druhé podstavy. Okolo S_3 byla opsána dále kružnice k_3 o poloměru $r' = 2,5$, k ní sestrojena perspektivně afinní elipsa k_{3k} o středu S_{3k}, druhá s ní shodná a s rovnoběžnými osami elipsa k_k' o středu S_k a nalevo i napravo ve vzdálenostech $v = 2,5$ kosoúhlé průměty obou podstav h a h' válce jako shodné a shodně položené elipsy h_k a h_k' s elipsou k_{3k} o středech O_k a O_k' na o_k.

4. Úlohy deskriptivní geometrie v kosoúhlém promítání.

S kosoúhlým půdorysem resp. i stranorysem pracujeme i při zobrazování řešení úloh deskriptivní geometrie. Tak na obr. 37 jest zobrazena rovina ϱ kosoúhlými průměty stop p^ϱ, n^ϱ a m^ϱ v hlavních

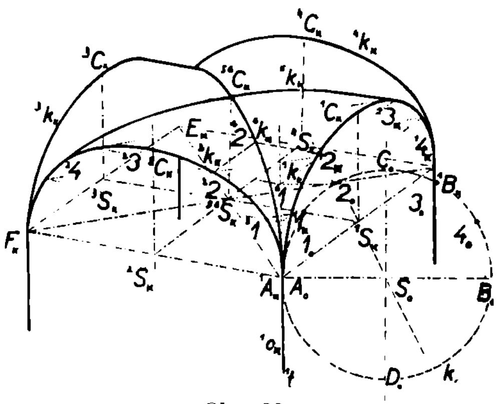


Obr. 37.

průmětnách, v ní zobrazena hlavní přímka p, která je rovnoběžná s půdorysnou, svým kosoúhlým průmětem p_k a kosoúhlým půdorysem p_{1k}, na přímce p a tedy i v rovině ležící bod L svým L_k a L_{1k} a řešena úloha průsečíku přímky a určené kosoúhlým průmětem a_k a kosoúhlým půdorysem a_{1k} s rovinou užitím krycí přímky k ležící v rovině ϱ a mající s přímkou m společný půdorys: $a_1 \equiv k_1$ a tedy také $a_{1k} \equiv k_{1k}$.

Příklad: *V kosoúhlém promítání na v zobrazte klášterní klenbu v poloze nárožní postavenou nad čtvercovým půdorysem* $^1A^1BEF$! (Obr. 38.)

Elipsa ^1k_k byla sestrojena ze dvou sdružených průměrů $\overline{^1S_k{}^1A_k}$ a $\overline{^1C_k{}^1S_k}$, z nichž $\overline{^1S_k{}^1A}$ je rovnoběžný s π a $\overline{^1S^1C}$ s osou z, perspektivní afinitou z kružnice k_0 o poloměru $\overline{^1S_k{}^1C_k}$, která se dotýká v bodě $^1A_k \equiv A_0$ tečny $^1o_k \| z$ elipsy ^1k_k a je vlastně okolo ^1o otočená kružnice ^1k do roviny rovnoběžné s nárysnou ν. Osou afinity je tečna ^1o_k a směrem afinity spojnice $S_0{}^1S_k$. Kružnice k_0 byla rozdělena na 12 stejných dílů a k bodům $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$ sestrojeny přiřazené body $^11_k, {}^12_k, {}^13_k, {}^14_k$ elipsy ^1k_k způsobem patrným z obr. pro bod ^12_k. Také elipsa ^2k_k je s k_0 perspektivně afinní se směrem $S_0{}^2S_k$ a osou ^1o_k afinity. K jejímu sestrojení bylo opět užito bodů $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$ kružnice k_0. Elipsy ^3k_k a $^4k_4$ získáme posunutím z elips ^1k_k a $^2k_1$ o délku $^1S_k{}^3S_k$ resp. $^2S_k{}^4S_k$ v těchto směrech; jsou to kosoúhlé průměty druhých podstav



Obr. 38.

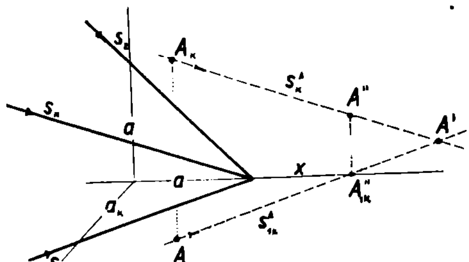
obou rotačních válců. Průnikem obou ploch válcových, jak se v deskr. geometrii dokazuje, jsou dvě elipsy ^5k a ^6k, jichž jednotlivé body, na př. ^{62} sestrojíme, vedeme-li bodem ^{12} povrchovou přímku jedné plochy, bodem ^{22} povrchovou přímku druhé plochy a jejich průsečíkem je právě bod ^{62} na ^6k. Konstrukci provedeme v kosoúhlém průmětu. Elipsy ^5k_k a ^6k_k lze ovšem sestrojiti také ze sdružených průměrů, na př. $k_k{}^5$ z průměru $\overline{^{5,6}S_kF_k}$ a $\overline{^{5,6}S_k{}^{5,6}C_k}$, kde $^{5,6}C_k$ je průsečík kosoúhlých průmětů nejvyšších povrchových přímek obou ploch válcových. Na obr. byly sestrojeny jen půlelipsy.

5. Rovnoběžné osvětlení.

Buďtež kosoúhle promítací paprsky světelnými paprsky. Vedeme-li nějakým bodem A rovnoběžku s^A se směrem těchto paprsků a stanovíme-li její stopník A' s půdorysnou a její stopník A'' s nárysnou, říkáme, že jsme strojili vržené stíny bodu A na π resp. ν při rovnoběžném osvětlení daného směru s. Považujeme-li však průmětny za neprůhledné, jest ihned patrné, že z obou bodů A' a A'' má praktický význam jen ten, který je k bodu A bližší (t. j. A''). Jest tedy rovnoběžné osvětlení útvarů vlastně kosoúhlým promítáním buď na π nebo ν.

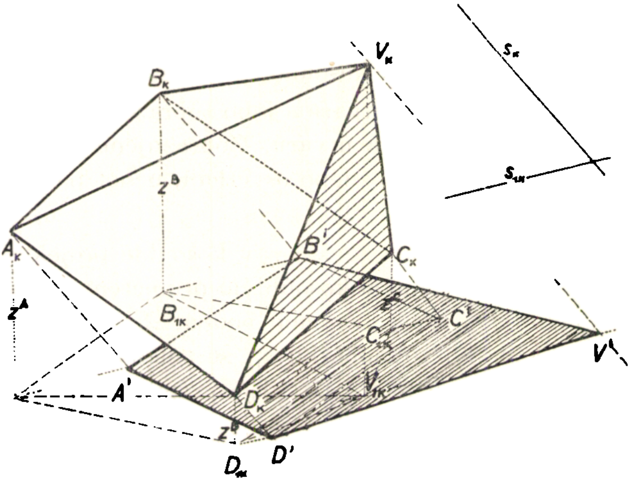
Rovnoběžného osvětlení útvarů a jeho zobrazení užíváme ke zvýšení názornosti zobrazovaných útvarů. Zobrazujeme tedy i v kosoúhlém promítání jevy rovnoběžného osvětlení, neboť názornost takových obrázků více vynikne.

Nechť bod A i paprsek s je určen v kosoúhlé projekci o daném osovém kříži a poměru q svým kosoúhlým průmětem A_k a s_k a kosoúhlým půdorysem A_{1k} a s_{1k}. Vedeme bodem A_k rovnoběžku s_k^A se směrem s_k a bodem A_{1k} rovnoběžku s_{1k}^A se směrem s_{1k}. Jejich průsečík A' (správně bychom měli psáti A_k') je kosoúhlý průmět půdorysného stopníku přímky s^A, tedy kosoúhlý průmět vrženého stínu A' bodu A na půdorysnu. Kosoúhlý půdorys s_{1k}^A protne osu x v bodě A_{1x} a na kolmici k ose x v něm vztyčené a na s_k^A leží A'' nárysný stopník přímky s^A,. t. j. vržený stín bodu A na nárysnu. Čím je vlastně tato kolmice? (Obr. 39.)



Obr. 39.

Jedná-li se o sestrojení kosoúhlých průmětů vržených stínů soustavy bodů $A, B, \ldots$, jest výhodné toto stanovení bodů $A', B' \ldots$ a $A'', B'' \ldots$ (obr. 40). Všechny trojúhelníky $\triangle A_k A_{1k} A'$, $\triangle B_k B_{1k} B' \ldots$ jsou podobné a jejich strany tudíž úměrné. Pak platí: $z^A : \overline{A_k A'} = z_h^B : \overline{B_k B'} = z : s_k = \ldots$ Sestrojíme-li pro $z : s_k$ redukční úhel, kde z je vzdálenost nějakého bodu M od půdorysny a s_k vzdálenost kosoúhlého průmětu M_k od kosoúhlého průmětu stínu M' bodu M na π, lze z úhlu získávati přímo vzdálenosti $\overline{A_kA'}$, $\overline{B_kB'}$, ... přetnutím úhlu vzdálenostmi z^A, z^B, ... Pak rýsujeme jen rovnoběžky s_k^A, s_k^B a na ně vynášíme od A_k, B_k, ... úsečky $\overline{A_kA'}$, $\overline{B_kB'}$, ..., jichž koncové body A', B', ..., jsou vržené stíny bodů A, B, ... na π. Na obr. 40 sestrojeno takto osvětlení čtyrbokého jehlanu s rovnoběžníkovou podstavou na půdorysnu. Byly dány vrcholy jehlanu A, B, C, V svými



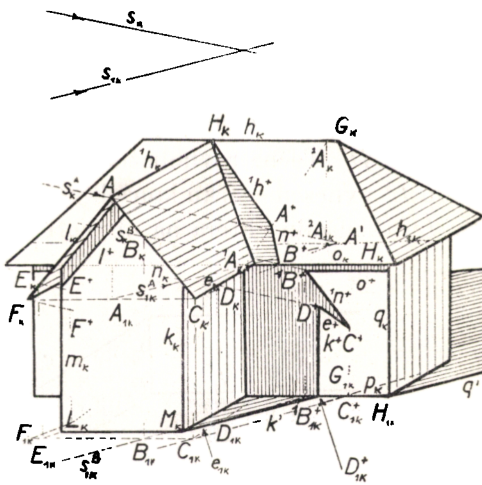
Obr. 40.

kosoúhlými průměty a kosoúhlými půdorysy a taktéž směr osvětlení s. Když byly podle redukčního úhlu, který v obr. nebyl rýsován, sestrojeny kosoúhlé průměty vržených stínů všech vrcholů jehlanu na π, byl sestrojen obrys celého obrazce, t. zv. *mez stínu vrženého* jehlanu. Vyznačíme-li na kosoúhlém průmětu jehlanu kosoúhlé průměty hran, které vrhají stíny do stran meze stínu vrženého, obdržíme tak kosoúhlý průmět prostorového mnohoúhelníka na tělese, t. zv. *meze stínu vlastního*. Ta odděluje na mnohostěnu osvětlené stěny od zastíněných.

1. Příklad. *V kosoúhlém promítání sestrojte rovnoběžné osvětlení hospodářského stavení o půdorysu tvaru písmene T!* (Obr. 41.)

Byl sestrojen kosoúhlý průmět stavení a zvolen směr osvětlení kosoúhlým průmětem s_k a kosoúhlým půdorysem s_{1k}. K vrcholu A nalezen jeho půdorys A_1 na rovinu okapů, bodem A veden paprsek $s^A \| s$ a bodem

A_1 paprsek $s_1^A \| s_1$ a stanoven jejich průsečík A' jako vržený stín bodu A na rovinu okapu. Paprsek s_1^A protne půdorys h_1 hřebene h na okapovou rovinu v bodě ${}^2A_1$. Světelná rovina, t. j. rovina proložená paprskem s^A a kolmá ku rovině okapu protne hřeben h v bodě ${}^2A$, jehož půdorysem je bod ${}^2A_1$ a okap o v bodě ${}^1A \equiv (s_1^A \,.\, o)$. Spojnice ${}^1A\,{}^2A$ jest průsečnice světelné roviny se střešní rovinou (ho). Průsečík A^+ světelného paprsku s^A s průsečnicí ${}^1A\,{}^2A$ je vržený stín bodu A na střešní rovinu (ho). Spojnice ${}^1h^+ \equiv \overline{HA^+}$ je vržený stín hřebene ${}^1h$ na rovinu (ho). Vržený stín $\overline{CA'}$ hrany $\overline{CA}$ na rovinu okapu protne okap o v bodě B^+, jest to vržený stín bodu B hrany $\overline{CA}$, který leží s B^+ na jednom světelném paprsku s^B.



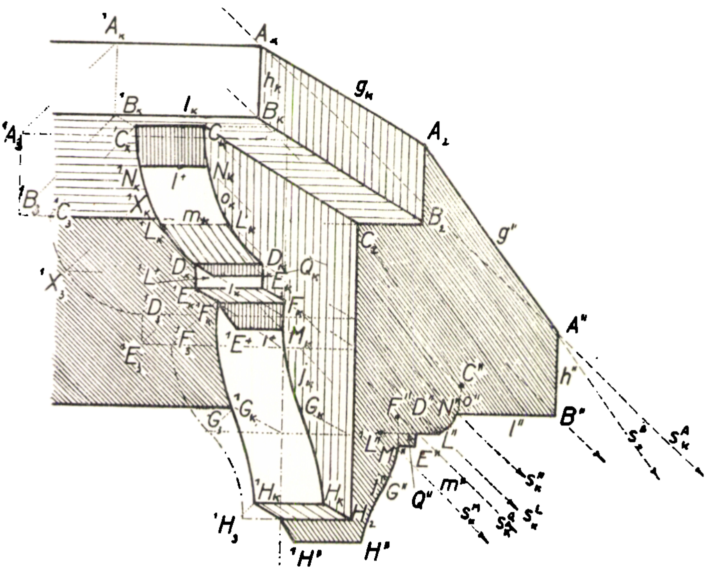
Obr. 41.

Tento paprsek protne dále průčelnou stěnu budovy nad přímkou p se zdvíhající v bodě ${}^1B^+$. Získáme jej, že sestrojíme B_1 na π, vedeme jím $s_1{}^B$ a stanovíme jeho průsečík ${}^1B_1^+$ s hranou p. Bodem ${}^1B_1{}^+$ vedeme kolmici ku p a v jejím průsečíku s s^B je ${}^1B^+$. Stejným způsobem získán i C^+ jako vržený stín bodu C. Vržený stín k' hrany k na π protne půdorys e_1 okapu e v bodě D_1 a světelná rovina hranou k proložená a kolmá ku π protne okap e v bodě D. Vržený stín D^+ na průčelnou stěnu je na $s^D \| s$ a na k^+ vrženém to stínu části hrany k na průčelnou stěnu, který prochází bodem $D_{1k}^+ \equiv (k' \,.\, p)$. Bodem ${}^1B^+$ vedená rovnoběžka o^+ s okapem o je vržený stín okapu o na průčelnou stěnu (p). Vržený stín l^+ hrany l sestrojen jako rovnoběžka s l jdoucí bodem E^+, který je průsečíkem světelné roviny proložené hranou m s hranou l. Z obr. je dále patrné sestrojení meze stínu vlastního a části meze stínu vrženého na půdorysnu.

2. Příklad. *V kosoúhlém promítání (podhledu) stanovte rovnoběžné*

osvětlení na nárysnu konsolky připevněné k nárysně a na ní spočívající vodorovné desky! (Obr. 42.)

Užitím stranorysu $({}^1A_3{}^1B_3{}^1C_3{}^1D_3{}^1E_3{}^1F_3{}^1H_3)$ byla sestrojena rovnoběžná perspektiva konsolky s deskou. Vržený stín A'' bodu A na ν je průsečík paprsku s^A jdoucího bodem A s paprskem s_2^A, který prochází nárysem A_2 bodu A. Podobně sestrojen B''. Jím prochází přímka l'' vržený stín hrany l desky rovnoběžné s ν; je tedy $l \| l_k$. Byly ještě sestrojeny C'' a D'' a vržený stín čtvrtkružnice $\widehat{CD}$ jako oblouk o'' elipsy $\widehat{C''D''}$. Tečna rovnoběžná s l'' této elipsy, na níž od dotykového bodu L'' vyneseme šířku konsolky, je vrženým stínem povrchové přímky $\overline{L^1L}$ konsolky, která na ní tvoří část meze stínu vlastního. Bod L_k



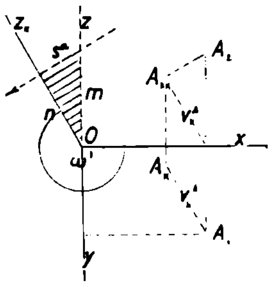
Obr. 42.

stanovíme jako průsečík světelného paprsku s^L jdoucího bodem L'' s obloukem $o \equiv \widehat{CD}$. Dále stanovíme stíny bodů E'', F'', G'' a H'', oblouku $\widehat{FH}$, jakož i ${}^1H''$. Vrženým stínem hrany $i \equiv {}^1\overline{EE}$ je ${}^1E''E'' \#$ $\#\ {}^1EE$. Ten protne vržený stín j'' oblouku j v bodě M''. Světelným paprskem s^M stanovíme na j bod M, jímž prochází vržený stín $i^+ \equiv$

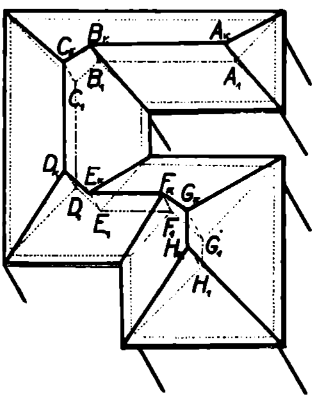
$\equiv \overline{{}^1E^+E^+}$ hrany i na plochu ${}^1FF^1HH$. Na světelném paprsku ${}^1s^E$ a na i^+ je ${}^1E^+$. Oblouk ${}^1\widehat{F^1E^+}$ je vržený stín hrany $\overline{{}^1F^1E}$ na plochu ${}^1FF^1HH$. Podobně ale užitím bodu $Q'' \equiv ({}^1L''L'' \,.\, D''E'')$ stanovíme vržený stín povrchové přímky $m \equiv \overline{{}^1LL}$ tvořící na ploše ${}^1CC^1DD$ mez stínu vlastního na plochu ${}^1DD^1EE$ a také vržený stín ${}^1L^+$ a užitím bodu $N'' \equiv \equiv (l'' \,.\, o'')$ vržený stín l^+ hrany l na plochu ${}^1CC^1DD$. Osvětlení bude dokončeno, když podle meze stínu vrženého na ν určíme mez vlastního stínu konsolky.

6. Kosoúhlé promítání na půdorysnu.

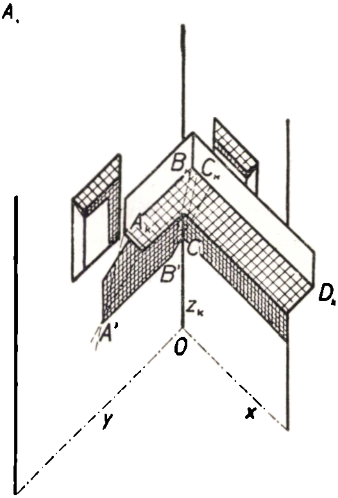
Ve stavitelství se užívá kosoúhlého promítání na půdorysnu, při čemž se mluví o t. zv. *kavalírní perspektivě*, neboť se v ní již v římském stavitelství zobrazovaly t. zv. kavalíry v pevnostech. Průmětnou je



Obr. 43.



Obr. 44.



Obr. 45.

zde půdorysna. Kosoúhlý průmět se tu vynáší přímo z kolmého půdorysu. Osa x a osa y svírají v tomto promítání pravý úhel, osa z (výšek) se zobrazí jako „zkosená“ a „zkrácená“. Jest tedy toto promítání shodné s předešlým, jen se zamění význam a označení osy y a osy z. Na obr. 43 jest zobrazen takto bod A, jestliže je dán opět úhel ω' (zkosení osy z) a zkrácení $q' = \frac{n}{m}$ (její zkrácení). Bodem A_1 vedeno zkosení $\overline{A_1A_k} \| z_k$ a vynesena od A_1 na ně redukovaná v_k^A výška v^A bodu A nad půdorysnou. Redukce provedena užitím redukčního trojúhelníka.

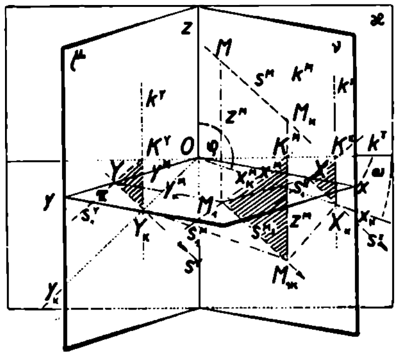
Na obr. 44 byla tímto způsobem zobrazena střecha domu o stejném spádu střešních rovin s okapem na stejné úrovni nad daným vyřešeným půdorysem střechy, při čemž za půdorysnu zvolena rovina okapů. Získání bodů A_k, B_k … z A_1, B_1 … je patrné z obrázku.

V praxi se pracuje se zkosením $\omega' = 225°$ a zkrácením $q' = 1$, takže výšky v se vynášejí ve skutečné velikosti. Je-li $q' < 1$ mluvíme o *zploštění obrazu*, pro $q' > 1$ o jeho *převýšení*. Převýšení se užívá v praxi zpravidla $q' = 2$.

Někdy se chybně nazývá kavalírní perspektiva ptačí perspektivou, t. j. staršího označení nadhledu. I v kavalírní perspektivě se však pracuje s podhledem, v němž je, na př. v obr. 45, zobrazen detail budovy s balkonem a provedeno osvětlení rovnoběžnými paprsky. Konstrukci nechť si popíše čtenář sám!

7. Kosoúhlé promítání na svislou rovinu.

Osou z kolmou k půdorysně a ležící v nárysně proložme svislou rovinu $\varkappa$, aby s nárysnou svírala úhel $\omega = \widehat{xk^\varkappa}$, a sestrojme její průsečnici $k^\varkappa$ s půdorysnou. Osa $k^\varkappa$ bude kolmá k ose z (obr. 46). Zvolme nyní na ose x, v níž se protnou půdorysna s nárysnou, bod X a přiřaďme k němu bod X_k v rovině $\varkappa$. I bude rovina $\varkappa$ kosoúhlou průmětnou a spojnice $s^x \equiv XX_k$ kosoúhle promítacím paprskem bodu X na rovinu $\varkappa$. Kosoúhlé promítání je tím určeno. Osa x se pak kosoúhle promítne jako přímka $x_k \equiv OX_k$ svírající s osou $k^\varkappa$ úhel φ^x. Veďme ještě bodem X rovinu σ^x rovnoběžnou s osou z, aby obsahovala paprsek s^x, a stanovme její průsečnici s_1^x s půdorysnou, její průsečnici k^x rovnoběžnou s osou z s průmětnou $\varkappa$ a průsečík $K^x \equiv (s_1^x \,.\, k^x)$. Pak můžeme ke každdému bodu M_1 půdorysny stanoviti známým způsobem jeho kosoúhlý průmět M_{1k}, když sestrojíme spojnici $m_1 \equiv M_1X$ ležící v π, její průsečík M^k s osou k^π, jím vedeme přímku $m_{1k} \equiv M^kX_k$, dále bodem M_1 rovnoběžný paprsek s_1^M s paprskem s_1^x, jeho průsečíkem $K^M \equiv (s_1^M \,.\, k^\pi)$ s osou k^π rovnoběžku k^M s k^x a stanovíme průsečík M_{1k} přímek $k^M \,.\, m_{1k}$. Jsou totiž opět půdorysna a kosoúhlá průmětna $\varkappa$ perspektivně afinní s osou afinity v přímce k^π a směrem afinity s^x.



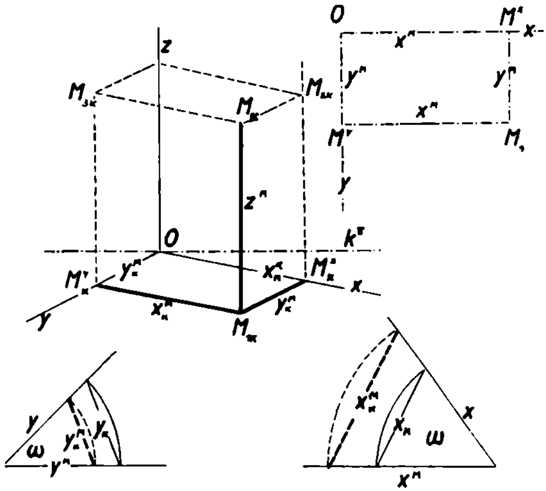
Obr. 46.

A sklopíme-li dále půdorysnu π do průmětny $\varkappa$ okolo osy k^π, budou také sklopený půdorys $(\pi)_0$ nějakého útvaru (π) a jeho kosoúhlý průmět $(\pi)_k$ útvary perspektivně afinními ve dvojité rovině $(\varkappa)$ s osou afinity k^π a směrem afinity $s_0^x \equiv X_0X_k$. V praxi však této příbuznosti mezi sklopenou půdorysnou a kosoúhlou průmětnou nepoužíváme, třebaže z ní lze vyvoditi theoreticky četné zajímavé úkoly.

Sestrojme si však ještě kosoúhlý průmět osy y. Obdržíme jej, když kosoúhle promítneme jeden její bod Y a jeho kosoúhlý průmět Y_k spojíme přímkou y_k s počátkem O. Úhel $\widehat{x_k y_k}$ bude obecně kosý. Přímky z, x_k, y_k tvoří t. zv. osový kříž. Úsečky na ose z a všechny jiné, které leží na přímkách s ní rovnoběžných, t. j. všechny vzdálenosti od půdorysny, se promítají v této projekci ve skutečné velikosti. Délky na osách x a y a přímkách s nimi rovnoběžných se tímto promítáním zkracují (prodlužují) v poměrech $q^x = \dfrac{\overline{OX_k}}{\overline{OX}}$ a $q^y = \dfrac{\overline{OY_k}}{\overline{OY}}$. Dá se dokázati, že osovým křížem a poměry q^x a q^y je toto kosoúhlé promítání jednoznačně určeno. Od důkazu pro malý rozsah tohoto tisku však upouštíme.

V praxi zobrazíme si pravoúhlý půdorys $(\pi)_1$ nějakého útvaru a připojíme jej (obr. 47) zcela volně k danému osovému kříži do nákresny. K daným poměrům q^x a q^y si pořídíme redukční úhly ω^x a ω^y

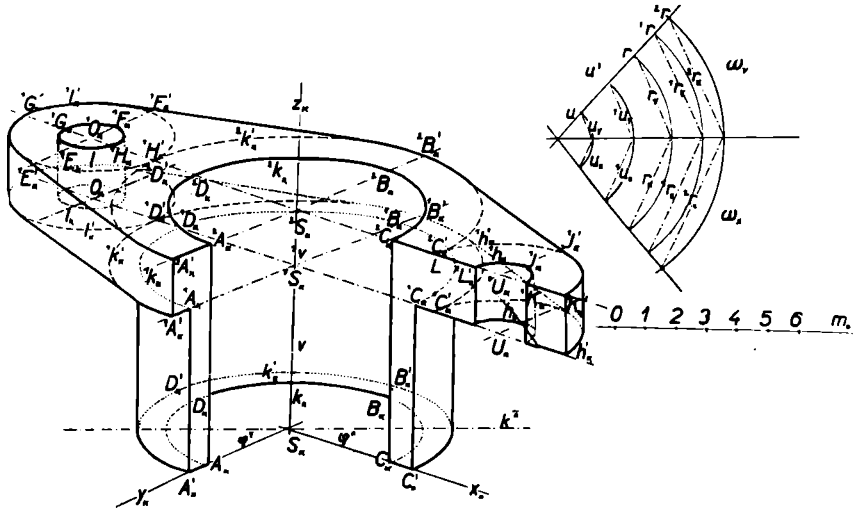
po případě i redukční úhly reciproké. Tento pravoúhlý půdorys zobrazíme i s osami x a y třeba i v zmenšeném nebo jakémkoliv jiném měřítku, než je průmět kosoúhlý. Pro jednoduchost předpokládejme měřítko v obou průmětech stejné. Půdorysem M_1 bodu M vedeme pak



Obr. 47.

obě rovnoběžky x^M a y^M s osami x a y a stanovíme jejich průsečíky M^x a M^y s těmito osami x a y. Podle redukčních úhlů ω^x a λ^y zredukujeme úsečky $\overline{OM^x}$ a $\overline{OM^y}$ na úsečky $\overline{OM^x_k}$ a $\overline{PM^y_k}$ a takto zredukované vyneseme do osového kříže na x_k a y_k, útvar doplníme na rovnoběžník $OM^x_kM_{1k}M^y_k$ a čtvrtý vrchol jeho je kosoúhlý půdorys M_{1k} bodu M. Jím vedeme rovnoběžku s osou z, vyneseme na ni od M_{1k} vzdálenost bodu M od π ve skutečné velikosti a koncový bod M_k je kosoúhlý průmět bodu M.

Kosoúhlého promítání na svislou rovinu se užívá při zhotovování náčrtů strojních součástek, neboť při kosoúhlém promítání na nárysnu se kružnice ležící v půdorysně nebo rovinách s půdorysnou rovnoběžných dost skreslují. Na obr. 48 je v něm zobrazena příruba rourová (tři čtvrtiny) podle polovičního půdorysu a nárysu, který v obr. nebyl rýsován. Redukované délky podle redukčních úhlů ω^x a ω^y před vnášením do kosoúhlého průmětu dvakrát zvětšíme. Na kosoúhlé průměty x_k a y_k os x a y byly vyneseny dvojnásobné redukované délky $\overline{S_k A_k}$ a $\overline{S_k C_k}$, z nich sestrojena jako ze sdružených průměrů elipsa k_k. Po-



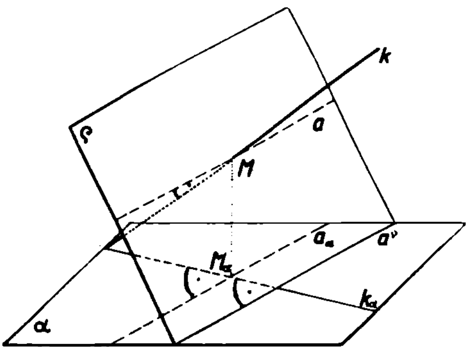
Obr. 48.

dobně sestrojena byla i soustředná elipsa k_k'. Také elipsy o_k o středu O_k a μ_k o středu U_k byly sestrojeny stejným způsobem po stanovení jejich středů O_k a U_k, které získány vynesením dvojnásobné redukované délky $\overline{O_k S_k} = \overline{S_k U_k}$ podle ω^x na osu x_k. Konstrukce ostatních elips o středech ${}^1S_k$, ${}^1O_k$, ${}^1U_k$ resp. ${}^2S_k$ je zřejmá z obrázku. Délky $\overline{S_k {}^1S_k}$ a $\overline{O_k {}^1O_k} = \overline{U_k {}^1U_k} = \overline{{}^1S_k {}^2S_k}$ jsou ovšem vyneseny jako dvojnásobky příslušných délek přímo z nárysu.

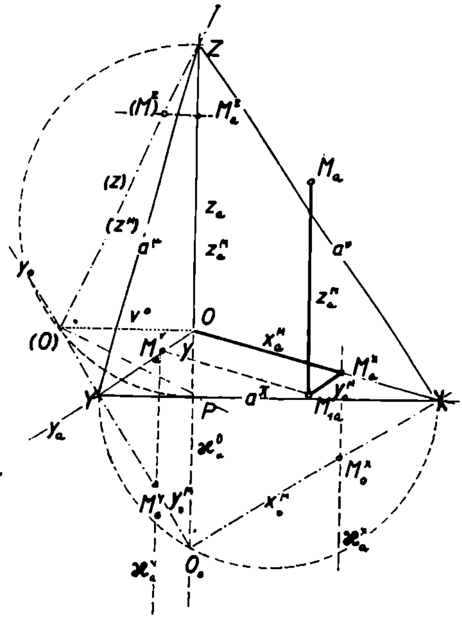
8. Kosoúhlé promítání na obecnou rovinu.

Na obr. 49 je zobrazena nějaká průmětna α a rovina ϱ k ní nakloněná, která ji (průmětnu α) protne ve stopě a^ϱ. Sestrojme v bodě M roviny ϱ k ní kolmici k. Ta je kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, tedy také k hlavní přímce a roviny ϱ jdoucí bodem M. Jest nám známo, že pravý úhel $\widehat{ka}$, jehož aspoň jedno rameno a je rovnoběžné s průmětnou, se kolmo do této promítá opět jako úhel pravý $\widehat{k_a a_a}$ a protože průmět a^α přímky a je rovnoběžný se stopou a^ϱ, je průmět k_α kolmý ku a^ϱ.

Uvažujme nyní tři základní průmětny, půdorysnu π, nárysnu ν a bokorysnu μ, jež se protnou ve třech osách x, y, z o společném počátku O a zvolme si libovolnou rovinu α ke všem osám nakloněnou (obr. 50).



Obr. 49.



Obr. 50.

Ta protne tyto průmětny ve třech přímkách a^π, a^ν, a^μ, stopách rovin π, ν, μ. Tyto stopy tvoří ostroúhlý trojúhelník, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky os x, y, z s rovinou α. Kdybychom nyní promítli kolmo osu z na rovinu α, je zřejmé, že její průmět z_a je kolmý ku a^π, neboť osa z je kolmá ku půdorysně π. Stejně tak i x_a je kolmá ku a^μ a y_a ku a^ν. Jsou tedy kolmé průměty všech os výškami trojúhelníka XYZ a kolmý průmět O_a počátku O průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka.

Trojúhelník XOY je pravoúhlý s vrcholem pravého úhlu v počátku O, jeho kolmý průmět XO_aY na rovinu α je trojúhelník tupoúhlý.

Otočme nyní trojúhelník XOY okolo stopy $a^\pi \equiv XY$ do roviny α. Při tomto otáčení se bude bod O otáčeti v rovině $\varkappa^o$ kolmé ku přímce a^π a tedy i k rovině α, a její kolmý průmět na rovinu α bude přímka $\varkappa^o_a$ jdoucí bodem O_a kolmo ku a^π, tedy prodloužená z_a. Stačí nad úsečkou $\overline{XY}$ sestrojiti kružnici jako nad průměrem (je to souhrn vrcholů pravých úhlů, jichž ramena jdou body X a Y) a v jejím průsečíku s $\varkappa^o_a \equiv z_a$ je otočený počátek O_o. Spojnice $x_o \equiv XO_o$ a $y_o \equiv YO_o$ jsou otočené osy x a y a na nich ležící úsečky jsou zde zobrazeny ve skutečné velikosti.

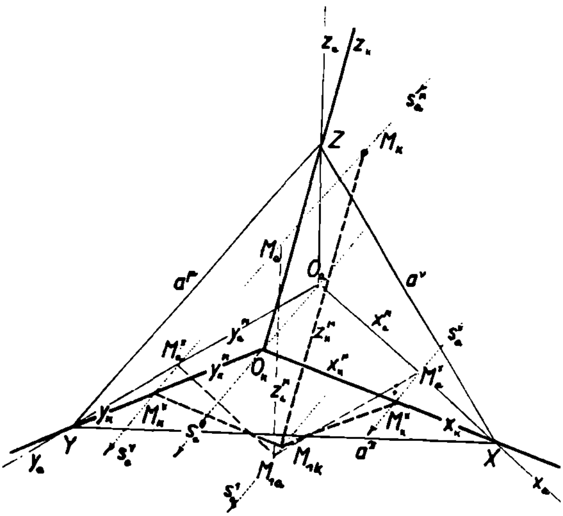
V rovině $\varkappa^o$ leží pravoúhlý trojúhelník ZOP s vrcholem pravého úhlu při O, jehož přepona $\overline{ZP}$ je v průmětně α a jehož jedna odvěsna $\overline{ZO}$ jest osa z. Sklopme opět tento trojúhelník okolo přepony $\overline{ZP}$ do roviny α. Počátek O se otočí do bodu (O), který je na kružnici opsané nad $\overline{ZP}$ jako nad průměrem a na kolmici ku ZP vztyčené v bodě O_a. Spojnice $Z(O)$ je sklopená osa (z) a úsečky na ní ležící jsou zde ve skutečné velikosti. Současně jsme získali ve výšce $\overline{O_a(O)}$ trojúhelníka $Z(O)P$ vzdálenost v^o počátku od roviny α.

Vynesme nyní na otočenou osu x_o délku x^M a na y_o délku y^M od bodu O_o. Koncové body M^X_o a M^Y_o otočme dále zpět na osy x a y a sestrojme jejich kolmé průměty M^X_a a M^Y_a na x_a a y_a. Jest zřejmé, že body M^X_a a M^X_o resp. M^Y_a a M^Y_o se nalézají v rovinách $\varkappa^x$ a $\varkappa^y$ kolmých ku $a^\pi \equiv XY$, jichž kolmým průmětem na rovinu α budou kolmice $\varkappa^x_a$ a $\varkappa^x_a$ ku a^π jdoucí body M^X_o resp. M^Y_o. Jsou tedy $M^X_a \equiv (x_a \,.\, \varkappa^x_a)$ a $M^Y_a \equiv$ $\equiv (y_a \,.\, \varkappa^y_a)$. Sestrojíme-li nyní kosodélník $OM^x_aM_{1a}M^y_a$, je jeho čtvrtý vrchol M_{1a} kolmým průmětem na rovinu α nějakého bodu M_1 ležícího v půdorysně a majícího od os x a y vzdálenosti x^M a y^M.

Mysleme si dále nad půdorysnou π, a to právě nad bodem M_1, ve vzdálenosti $z^M \equiv \overline{M_1M}$ bod M. Tato vzdálenost je rovnoběžná s osou z a její kolmý průmět z^M_a na rovinu α je rovnoběžka z^M_a s přímkou z_a, která prochází bodem M_{1a}. Kdybychom z^M vynesli na sklopenou osu (z) od bodu (O) a koncový bod (M^z) otočili zpět na z_a do bodu M^z_a na z_a, jest úsečka $\overline{O_aM^z_a}$ kolmý průmět z^M_a délky z^M na rovinu α. Vyneseme tedy od M_{1a} na z^M_a délku z^M_a a její koncový bod M_a je kolmý průmět na rovinu α bodu M určeného vzdálenostmi x^M, y^M a z^M od průměten π, ν, μ.

Jest tedy kolmý průmět M_a bodu M na rovinu α určen, známe-li trojúhelník XYZ, v němž rovina α je rovinami π, ν a μ proťata, a vzdálenosti x^M, y^M, z^M bodu M od těchto rovin *(kolmá axonometrie)*.

Mysleme si nyní v rovině α bod O_k (obr. 51) a považujme jej za kosoúhlý průmět počátku O na rovinu α. Spojnice O_aO_k je kolmý průmět s_a^O kosoúhle promítacího paprsku s^O jdoucího bodem O na kosoúhlou průmětnu α. Spojnice $x_k \equiv XO_k$, $y_k \equiv YO_k$ a $z_k \equiv ZO_k$ jsou kosoúhlé průměty os x, y a z na rovinu α. Kosoúhlý průmět bodů M^x a M^y obdržíme, že vedeme body M_a^X a M_a^Y kolmé průměty s_a^x a s_a^y koso-



Obr. 51.

úhlé promítacích paprsků jdoucích body M^x a M^y a stanovíme jejich průsečíky M_k^Y a M_k^X s přímkami x_k a y_k. Doplníme-li body M_k^Y, O_k, M_k^X na rovnoběžník $M_k^Y O_k M_k^X M_{1k}$, je čtvrtý vrchol M_{1k} kosoúhlým půdorysem bodu M, a jestliže ještě vedeme bodem M_{1k} rovnoběžku z_k^M s přímkou z_k je průsečík M_k této rovnoběžky z_k^M s kolmým průmětem s_a^M kosoúhle promítacího paprsku s^M jdoucího bodem M kosoúhlým průmětem M_k bodu M na rovinu α.

Protože známe také vzdálenost v^o a úsečku $\overline{O_aO_k}$, jest poloha kosoúhlého paprsku s^O přesně určena, zcela obdobně, jak jsme již viděli při kosoúhlém promítání, na př. na nárysnu. Jest dále jisté, že poměry $q^x = \frac{x_k^M}{x^M}$, $q^y = \frac{y_k^M}{y^M}$ a $q^z = \frac{z_k^M}{z^M}$ zůstanou konstantní, nechť jde o jakýkoliv bod M.

Kdybychom si tedy v nákresně a průmětně α narýsovali tři úsečky x_k, y_k a z_k, vycházející z jednoho bodu O_k a učinili $x^M = y^M = z^M$, potom platí věta:

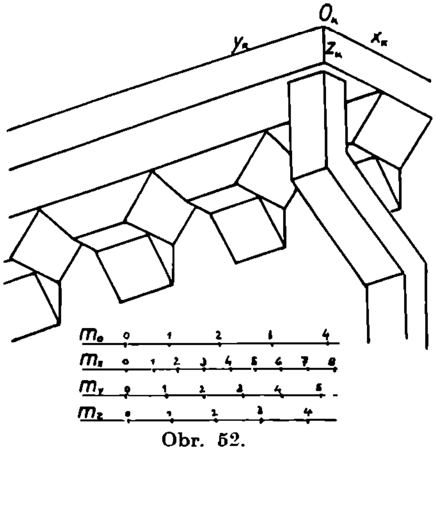
Tři libovolné úsečky ležící v jedné rovině a vycházející z jednoho bodu, jež všechny nejsou v téže přímce, z nichž alespoň dvě jsou nenulové a žádná není nekonečně velká, lze považovati za kosoúhlý průmět tří vzájemně kolmých a stejných úseček z jednoho bodu v prostoru vycházejících.

Jest to t. zv. *věta Pohlkeova*, jejíž důkaz najde čtenář v každé učebnici deskriptivní geometrie.

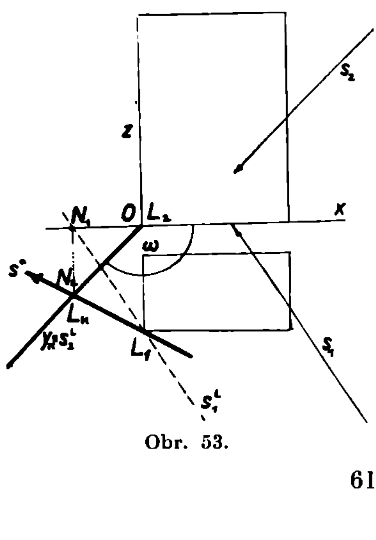
V praxi volíme tři poměry zkrácení q^x, q^y, q^z a osový kříž tak, aby z_k byla svislá a druhé dvě osy x_k a y_k svíraly s ní úhly α a β, pro něž platí

$$100° < \alpha < 110° \text{ a } 110° < \beta < 120°,$$

aby obrázky takto vznikající příliš neskreslovaly skutečnost. K poměrům q^x, q^y, q^z si sestrojíme redukční měřítka, úhly nebo trojúhelníky a pak z daného půdorysu a nárysu, případně i bokorysu vyneseme redukované délky ve směrech x, y, z do délek x_k, y_k a z_k. Na obr. 52 byla takto podle redukčních měřítek zobrazena část střešního okapu s pozednicí a odtokovou rourou. Řešení je z obr. patrné.



Obr. 52.

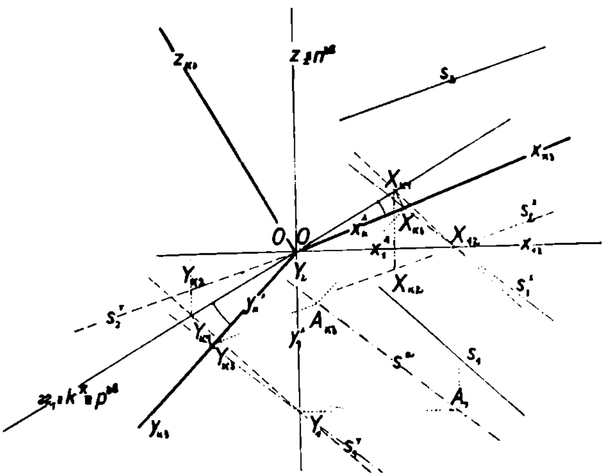


Obr. 53.

9. Jiný způsob určení kosoúhlého promítání.

Někdy se zobrazí k danému půdorysu a nárysu objektu i průměty s_1 a s_2 směru s kosoúhlého promítání a zapíše se, že nárysna nebo půdorysna má býti kosoúhlou průmětnou. Tak na př. na obr. 53 je oběma průměty zobrazen kvádr v průčelné poloze, jsou připojeny oba průměty paprsku s a určena nárysna za kosoúhlou průmětnu. Je zřejmé, že nárys s_2 paprsku s jest totožný s kosoúhlým průmětem y_k osy y, tedy zkosením a že zkrácení q získáme, když si na přímce s zvolíme libovolný bod L (L_1 na s_1 a L_2 na s_2), stanovíme nárysný stopník $N^s \equiv$ $\equiv L_k$ přímky s a zkrácení $q = \dfrac{\overline{L_2L_k}}{\overline{L_2L_1}} = \dfrac{\overline{L_2L_k}}{\overline{L_1x}}$.

Jestliže průmětnou má býti svislá rovina $\varkappa$ (obr. 54), postupujeme takto: Nárysnou stopu $n^\varkappa$ roviny $\varkappa$ považujeme za osu z, základnici $x \equiv (\pi \,.\, \nu)$ za osu x, stopní bod $X^\varkappa$ roviny $\varkappa$ za počátek O a kolmici



Obr. 54

vztyčenou v počátku k nárysně za osu y. Potom zvolíme na osách x a y body X a Y tak, aby $\overline{OX} = \overline{OY}$, vedeme jimi paprsky s^x a s^y rovnoběžně s daným směrem s a stanovíme jejich průsečíky X_k a Y_k s rovinou $\varkappa$. Rovinu $\varkappa$ s osou z, počátkem O a body X_k a Y_k sklopíme do půdorysny okolo půdorysné stopy $p^\varkappa \equiv k^\pi$ roviny $\varkappa$, spojíme $x_{k3} \equiv \equiv OX_{k3}$ a $y_{k3} \equiv OY_{k3}$, čímž získáme osový kříž z_{k3}, y_{k3}, x_{k3}. Poměry zkrácení jsou

$$q^x = \frac{\overline{OX_k}}{\overline{OX}} \text{ a } q^y = \frac{\overline{OY_k}}{\overline{OY}}.$$

Kosoúhlé promítání na svislou rovinu je určeno pak známými podmínkami. Navíc však je tu možno užíti perspektivní afinity mezi skutečným půdorysem a sklopeným půdorysem kosoúhlým s osou afinity v přímce k^π a směrem afinity $\overline{A_1A}_{k3}$.

Popište sami, jak bychom určili kosoúhlé promítání na obecnou rovinu známými podmínkami, t. j. x_k, y_k, z_k a q^x, q^y a q^z, bude-li rovina α a směr promítání určen oběma sdruženými průměty (t. j. α_1 a α_2, s_1 a s_2)!

10. Volné kosoúhlé promítání.

Zatím co při čtení pravoúhlých průmětů nějakého objektu musíme dbáti vzájemné polohy originálu a průmětny, máme-li získati správnou představu (názor) o tvaru a poloze útvaru, nikterak k tomu nemusíme přihlížeti při pozorování průmětu kosoúhlého. Nestaráme se v tomto případě ani o průmětnu, ani o promítací paprsek, zvláště ne tenkrát, čteme-li obraz z patřičné vzdálenosti a správného směru. Také okolnost, že útvary se promítají kosoúhle vždy jako útvary stejného druhu, ať je promítáme jakýmkoliv paprskem na jakoukoliv rovinu, a skutečnost, že podmínky perspektivní afinity, jíž k originálu rovinnému přiřazujeme útvar v nákresně, jsou nezávislé na promítání, vedou nás k otázce, zda-li není zbytečné určovati průmětnu a kosoúhle promítací paprsky a zda možno bez nich zobraziti nějakým obrazem kosoúhlé průměty jistých útvarů zcela volně.

Všimněme si na př., že kosoúhlým průmětem trojúhelníka neležícího v promítací rovině je vždy opět trojúhelník. Narýsujeme-li tedy nějaký trojúhelník v nákresně, můžeme jej vždy považovati za kosoúhlý průmět určitého trojúhelníka v prostoru. Rovněž tak kosoúhlý průmět rovnoběžníka, trojhranu, čtyrstěnu, rovnoběžnostěnu atd. vyvolá vždy dojem originálu. Budou však také kosoúhlé průměty některých útvarů, na př. koule, které nebudou názorným zobrazením originálu, od narýsované elipsy o poloosách $a = 6$ a $b = 1$ těžko bychom očekávali, že vzbudí u někoho představu koule.

Jsou tedy útvary, jichž zcela volně a nezávisle na průmětně a směru promítání sestrojené obrazy, při nichž je dbáno všech vět odvozených při kosoúhlém promítání, při nichž užíváme i jiných zobrazovacích prostředků, jako jsou na př.: sepjetí útvarů, viditelnosti, osvětlení, pomocného průmětu, jeho průmětu kosoúhlého a pod., budou vždy odborníkem považovány za kosoúhlé průměty jistých útvarů v prostoru.

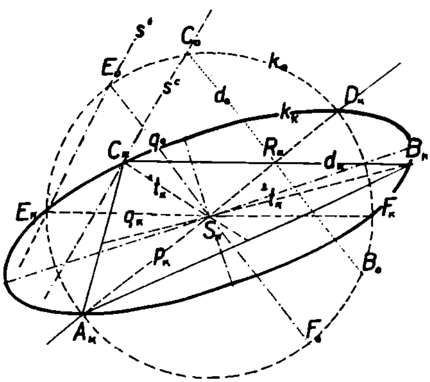
II. Volný průmět útvarů rovinných.

Při kosoúhlém promítání poznáváme často, že z určitých základních útvarů při dodržování pravidel o spojování, protínání, dělicím poměru a rovnoběžnosti je možné dokresliti kosoúhlé průměty útvarů jiných v téže rovině se nalézajících. Vzpomeňme jen, že ke třem vrcholům A_k, B_k, C_k stačí rovnoběžkami vrcholy B_k resp. C_k se stranami $\overline{A_kC_k}$ resp. $\overline{A_kB_k}$ stanoviti čtvrtý vrchol D_k rovnoběžníka $A_kB_kC_kD_k$, který je kosoúhlým průmětem rovnoběžníka $ABCD$, jehož tři vrcholy A, B, C jsme promítli do bodů A_k, B_k, C_k. Ukažme si v následujícím na několik podobných příkladů takového zobrazení nezávislého na promítání.

Příklady: 1. *Považujme nějaký trojúhelník $A_kB_kC_k$ ležící v nákresně za kosoúhlý průmět rovnostranného trojúhelníka ABC v prostoru a sestrojme v nákresně kosoúhlý průmět jemu opsané kružnice*! (Obr. 55.)

Těžnice trojúhelníka $A_kB_kC_k$ jsou kosoúhlé průměty těžnic, os stran i os úhlů trojúhelníka ABC. Jejich průsečík S_k je kosoúhlým průmětem středu S obou kružnic k^o i k^v, spojnice S_kA_k kosoúhlým průmětem jednoho průměru kružnice k^o, když druhý koncový bod D_k je v prodloužení $\overline{A_kS_k}$ tak, že $\overline{A_kS_k} = \overline{S_kD_k}$ a spojnice $\overline{B_kC_k}$ je k němu sdružená tětiva elipsy k_k, neboť je jím půlena. Elipsa k_k je tedy určena. Nad A_kD_k jako nad průměrem opíšeme afinní kružnici k_o, v bodech S_k a $R_k \equiv (A_kD_k \,.\, B_kC_k)$ vztyčíme ku A_kD_k kolmice S_kE_o a R_kC_o a stanovíme jejich průsečíky E_o a C_o s afinní kružnicí k_o. Rovnoběžně se směrem afinity $s^c \equiv C_kC_o$ vedeme bodem E_o paprsek

s^E a určíme jeho průsečík E_k s průměrem elipsy S_kE_k rovnoběžným s tětivou $\overline{B_kC_k}$. Sdruženými průměry $\overline{S_kA_k}$ a $\overline{S_kE_k}$ je elipsa k_k jako kosoúhlý průmět opsané kružnice k^o trojúhelníku ABC určena. Protože poloměr kružnice vepsané k^v je poloviční poloměr kružnice k, je jejím kosoúhlým průmětem elipsa k_k^v homothetická ku k_k o středu homothetie v bodě S_k a poměru 1 : 2. V obr. rýsována nebyla.



Obr. 55.

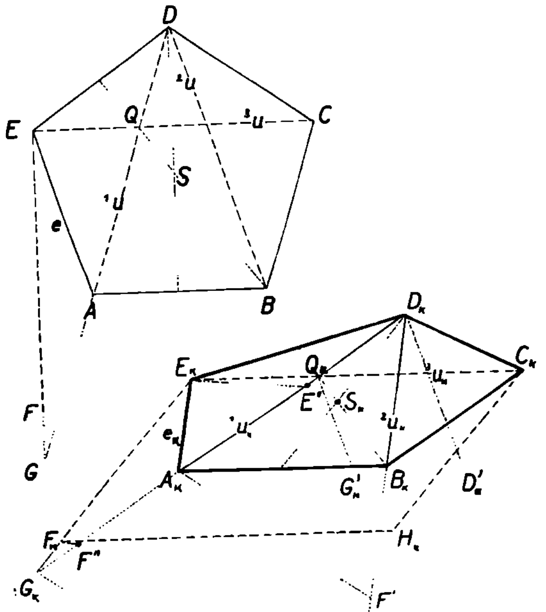
2. *Zobrazte v kosoúhlém promítání pravidelný šestiúhelník, jsou-li určeny kosoúhlé průměty vrcholů A_k, C_k, D_k.*

V pravidelném šestiúhelníku $AB \dots F$ tvoří vrcholy A, C, D, F obdélník, jehož strany AC a DF jsou úhlopříčkou $\overline{BE}$ půleny, při čemž také $\overline{SB}$ a $\overline{SE}$ jsou jimi půleny. Podle toho sestrojí si čtenář kosoúhlý průmět pravidelného šestiúhelníka $A_kB_kC_kD_kE_kF_k$ sám. Takový šestiúhelník $A_k \dots F_k$ vyvolá dojem pravidelného šestiúhelníka ležícího v nějaké rovině k nákresně nakloněné nebo kolmé.

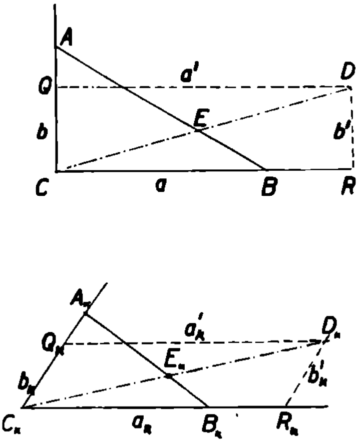
3. *Vrcholy A_k, B_k, D_k v nákresně jsou kosoúhlé průměty tří vrcholů pravidelného pětiúhelníka o straně AB. Dokreslete tento kosoúhlý průmět a zobrazte i kosoúhlý průmět čtverce, sestrojeného nad jednou úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka a v jeho rovině ležícího!* (Obr. 56.)

Zobrazíme-li pravidelný pětiúhelník, zjistíme, že dělicí poměr průsečíku Q dvou úhlopříček k vrcholům každé úhlopříčky je v každém pravidelném pětiúhelníku stejný a víme, že se kosoúhlým promítáním nemění. Stanovíme tedy na A_kD_k bod Q_k, aby $\dfrac{\overline{A_kQ_k}}{\overline{D_kQ_k}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$. Potom už vedeme bodem Q_k s přímkou A_kB_k rovnoběžku ${}^3\mu_k$ a bodem A_k rovnoběžku e_k s přímkou B_kD_k, jejich průsečík E_k je další vrchol kosoúhlého průmětu pravidelného pětiúhelníka. Podobně stanovíme C_k.

V pravidelném pětiúhelníku $A \dots E$ sestrojíme nad $\overline{EC}$ čtverec $ECFH$ a stanovíme průsečík G strany EF s úhlopříčkou ${}^1\mu \equiv AD$. Na ${}^3\mu_k$ určíme bod G_k, aby jeho dělicí poměr $(A_kD_kG_k) = (ADG)$ a na spojnici $\overline{E_kG_k}$ bod F_k, aby $(E_kG_kF_k) = (EGF)$. Rovnoběžník $E_kC_kH_k$ a F_k je kosoúhlým průmětem čtverce spjatého s prav. pětiúhelníkem.



Obr 56.



Obr. 57.

Ve všech uvedených příkladech je patrné, že útvary, které jsme dokreslovali, jsou spjaty s danými podle podmínek plynoucích z kosoúhlého promítání. Takové soustavy bodů a přímek ležící v nějaké rovině jsou schopné volného kosoúhlého zobrazování. A lze pracovati i úlohy metrické.

4. *Trojúhelník $A_kB_kC_k$ v nákresně je kosoúhlým průmětem pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $a = 5$ a $b = 3$. Stanovte kosoúhlý průmět bodu D, jenž má od jeho odvěsen vzdálenosti $\overline{Da} = 2$ a $\overline{Db} = 7$!* (Obr. 57.)

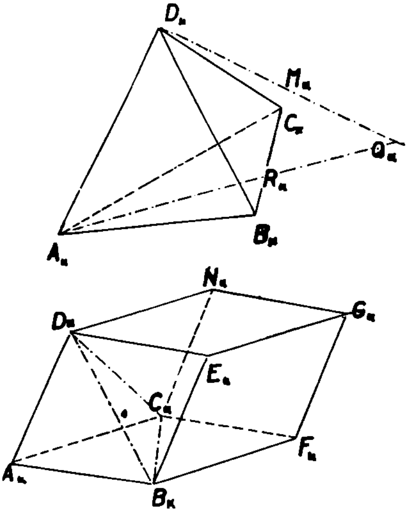
Sestrojíme opět pomocný pravoúhlý trojúhelník $a = 5$, $b = 3$ a v něm bod D. Jím vedeme rovnoběžky a' a b' s odvěsnami a a b a stanovíme dělicí poměry jejich průsečíků Q a R s prodlouženými odvěsnami b a a ke koncovým bodům odvěsen C a B resp. C a A. Jsou $\lambda_R = \frac{7}{2}$ a $\lambda_Q = -\frac{2}{1}$. Na C_kA_k stanovíme pak bod Q_k, aby $(C_kA_kQ_k) = -\frac{2}{1}$ a na C_kB_k bod R_k, aby $(C_kB_kR_k) = \frac{7}{2}$. Body Q_k a R_k vedeme rovnoběžky a_k' a b_k' s a_k a b_k a jejich průsečík je kosoúhlý průmět žádaného bodu D_k. Jak lze stanoviti bod D_k jinak? Bod D_k je jednoznačně určen, ať trojúhelník $A_kB_kC_k$ prodělává jakékoliv změny tvaru a velikosti.

12. Volný průmět útvarů prostorových.

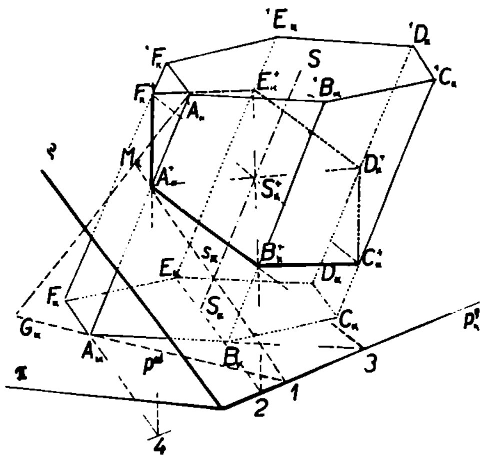
Nejjednodušším mnohostěnem jest čtyřstěn, jeho kosoúhlý průmět jest čtyřúhelník, jehož jednu úhlopříčku rýsujeme jako neviditelnou, čárkovaně. Změní-li se čtyřstěn, nebo promítací paprsek anebo průmětna, bude kosoúhlým průmětem čtyřstěnu opět čtyřúhelník se dvěma úhlopříčkami. Jest tedy i tato soustava čtyř bodů vhodná pro volné promítání, neboť čtyřúhelník v nákresně s oběma úhlopříčkami můžeme vždy považovati za kosoúhlý průmět nějakého čtyřstěnu. Z této soustavy lze odvoditi soustavy další. Zvolme na př. libovolný bod M mimo čtyřstěn (obr. 58a). Jeho sepětí se čtyřstěnem stanovíme na př. takto: Spojnice DM protne stěnu ABC v bodě Q a spojnice AQ hranu BC v bodě R. Dělicími poměry (BCR), (ARQ) a (DQM) je poloha bodu M ku čtyřstěnu určena. Zůstanou-li tyto dělicí poměry zachovány i ve volném průmětu, jest bod M_k věrným obrazem bodu M, ať čtyřúhelník $A_kB_kC_kD_k$ dozná jakýchkoliv změn.

V obr. 58b doplněny $\triangle A_kB_kD_k$, $\triangle A_kC_kD_k$ a $\triangle A_kB_kC_k$ na rovnoběžníky body E_k, F_k, N_k a $\triangle B_kE_kF_k$ bodem G_k na další a také tak $\triangle C_kN_kF_k$. Po vyrýsování stran $\overline{A_kC_k}$, $\overline{C_kF_k}$ a $\overline{H_kC_k}$ čárkovanými čarami lze považovati celou soustavu bodů a stran za kosoúhlý průmět rovnoběžnostěnu. Také tato nová soustava je schopná dalšího rozšiřování ve volném zobrazení.

Jest tedy možno volně zobrazovati útvary vzniklé spojováním bodů, protínáním přímek a vedením rovnoběžných rovin a přímek v prostoru. Při těchto konstrukcích v prostoru prokládáme vždy nejprve pomocnou rovinu, v ní vedeme pomocné přímky a řešíme spojování, protínání a rovnoběžnost. Jsou tedy i prostorové úlohy planimetrické, tak jako jsou jejich kosoúhlé průměty. Má-li býti pak kosoúhlý průmět těchto nových útvarů zcela určitý, je nutné v každém vyznačiti všechny pomocné roviny i přímky. Tak na př. v obr. 58a bod M není určen, nebude-li známá pomocná rovina σ a její průsečnice s s rovinou trojúhelníka ABC; rovina σ je určena přímkou AD a bodem M, průsečnice s body A a Q. Takto vyznačené kosoúhlé průměty pak nazýváme *úplnými* čili *spjatými*.



Obr. 58.



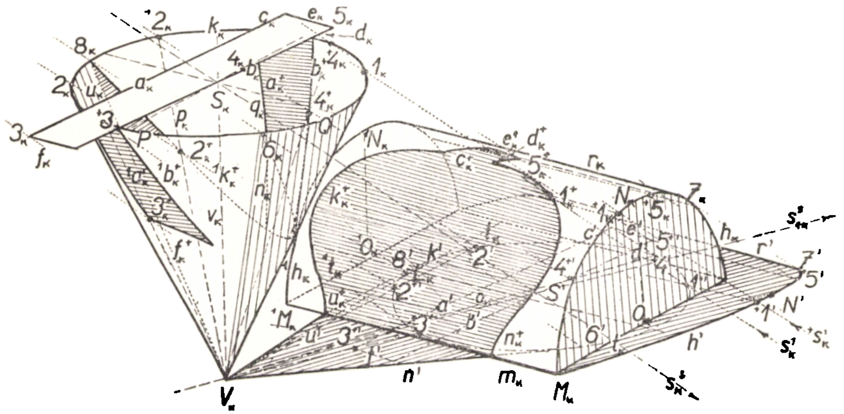
Obr. 59.

Poznámky: Při volném zobrazování pracujeme také průsečnici dvou rovin na základě věty, že průsečnice tří různých rovin jdou jedním bodem. K určení prostorových útvarů používáme také pomocných průmětů na nějakou rovinu, zpravidla půdorysnu a zobrazujeme vedle kosoúhlého průmětu i kosoúhlý půdorys.

Příklady: 1. *Ve volném promítání jest zobraziti průsek kosého hranolu rovinou!* (Obr. 59.)

Kosoúhlým průmětem hranolu jsou dva shodné mnohoúhelníky s rovnoběžnými stranami a n kosodélníků; získali bychom jej dokreslováním, jako jsme ze čtyřstěnu zobrazili rovnoběžnostěn. Kosoúhlým průmětem roviny bude stopa p_k^ϱ a bod M_k, který však musíme sepjati s hranolem, na př. tak, že jej položíme na přímku $\overline{{}^1AG}$, kde bod G je v podstavné rovině π, a je spjat s prvou podstavou a bod ${}^1A$ je vrchol druhé podstavy. Pak je s hranolem pevně spjata i celá rovina ϱ. Průsečíky A a G přímek A^1A a ${}^1AM$ s podstavnou rovinou π prochází stopa p^α roviny $\alpha \equiv ({}^1AAM)$ a body M a $1 \equiv (p^\alpha \,.\, p^\varrho)$ průsečnice s rovin ϱ a α. Přímka s protne hranu ${}^1AA$ v bodě A^+, v jednom vrcholu průsečného obrazce. Zbývající vrcholy určíme perspektivní afinitou mezi obrazci $AB \ldots$ a $A^+B^+ \ldots$, ježto známe osu afinity p^ϱ a dvojici přiřazených bodů A a A^+. Na konstrukci se nic nezmění, ať je podstavný obrazec jakýkoliv mnohoúhelník, zůstane v podstatě táž, bude-li i křivkou, na příklad kružnicí a hranol kruhovým válcem.

2. *Zobrazte skupinu: Dutý rotační kužel s podstavou v horizontální rovině o poloměru* $r = 3$ *a výšce* $v = 7$, *na jehož podstavě je položená destička šířky* $š = 1{,}3$ *tak, že jedna její hrana jde středem podstavy, a rotační půlválec s osou v horizontální rovině, která jde vrcholem kužele, ve vzdálenosti* $\mu = 6$ *od vrcholu, o poloměru podstavy* $\varrho = 3$ *a výšce* $w = 7$! *Skupinu osvětlete rovnoběžnými paprsky*! (Obr. 60.)



Obr. 60.

Sestrojíme si libovolnou elipsu k_k a v ní dva sdružené průměry p_k a q_k. Každý rozdělíme na tři díly a získáváme měřítka m_p a m_q v těchto směrech. Na svislé přímce v_k volíme bod V_k a vzdálenost

$\overline{S_k V_k}$ udává 7 dílků měřítka ve směru v_k. Kosoúhlým průmětem vrcholu V a řídicí kružnicí k_a je určen kosoúhlý průmět dutého rotačního kužele. Vrcholem V_k vedeme rovnoběžku l_k s p_k a od V_k vyneseme na ní vzdálenost $u = 6$ v jednotkách měřítka m_p. Koncovým bodem L_k jde kosoúhlý průmět o_k osy válce o rovnoběžně s q_k. Na něj vyneseme výšku $w = 7$ v jednotkách měřítka m_q, koncovými body O_k a ${}^1O_k$ vedeme přímky t_k a ${}^1t_k$ rovnoběžně s p_k a vyneseme na ně délky $\overline{O_k M_k}$ a $\overline{{}^1O_k {}^1M_k} = \varrho = 3$ v jednotkách m_p v obou směrech. Na rovnoběžky $O_k N_k$ a ${}^1O_k {}^1N_k$ v jednom směru délky $\overline{O_k N_k} = \overline{{}^1O_k {}^1N_k} = 3$ jednotky měřítka m_v. Ze sdružených průměrů $\overline{O_k M_k}$ a $\overline{O_k N_k}$ resp. $\overline{{}^1O_k {}^1M_k}$ a $\overline{{}^1O_k {}^1N_k}$ sestrojíme poloelipsy h_k a ${}^1h_k$ jako kosoúhlé průměty obou podstav válce. Kosoúhlý průmět válce je určen. Na podstavu kužele položíme destičku, jejíž hrana b_q jde středem kužele. Bodem V_k vedeme libovolnou přímku b_k, ke směru b_k stanovíme sdružený průměr g_k elipsy k_k, ten rozdělíme na tři díly, čímž získáme měřítko m_g. V tomto směru vyneseme 1,3 délky tohoto měřítka a koncovým bodem této délky vedeme rovnoběžku a_k s b_k. Strany c_k a f_k jsou rovnoběžné s g_k a skupina je zobrazena.

Osvětlení při volbě s_k^s a s_{1k}^s si provede podle obrázku laskavý čtenář sám.

3. Podobným způsobem, při němž bylo nutno různorodé útvary tak zobraziti, aby byly rovinami a přímkami mezi sebou spjaty, byly rýsovány všechny názorné obrázky celého tohoto pojednání. K zvýšení názornosti, byly roviny ohraničovány rovnoběžníky a často bylo dbáno i viditelnosti, jako by tyto ohraničené roviny byly neprůhledné.