huje sečnu s kongruence určené prvou přímkou. Involuce na s určené zborcenou involucí a přímkou q jsou identické.

c) Protínají-li se dvě imaginární přímky druhého druhu p, q, protínají se i přímky sdružené p', q'. Společný bod $X = (p, q)$ a sdružený $X' = (p', q')$ leží na paprsku x společném oběma kongruencím (p, p'), (q, q'). Právě tak roviny (p, q), (p', q') jsou imaginární sdružené a protínají se v druhé reálné přímce společné oběma kongruencím.

3. Nechť v rovnicích (1') (str. 57) jest $k = 1$. Ukažte, je-li přímka p v kongruenci, že jsou v ní všechny přímky, které z ní povstanou rotací kolem osy z (rotační kongruence). Tyto přímky vyplní rotační hyperboloid. Je tedy v kongruenci celý svazek rotačních hyperboloidů.

4. Dány jsou v prostoru čtyři reálné mimoběžky p, q, r, s. Sestrojte příčky, které protínají všechny čtyři. Jsou buď reálné různé, reálné splývající, nebo imaginární druhého druhu. [p, q, r určí hyperboloid, s jej protíná ve dvou bodech X, Y a přímky druhé soustavy hyperboloidu jdoucí těmito body jsou hledané příčky.]

5. Sestrojte rovinu danou: a) Reálným bodem A a dvěma imaginárními B, C, jež jsou dány involucemi na nositelkách b, c; poslední dvě přímky jsou mimoběžné. [Roviny (Ab), (Ac) se protínají v přímce m, jež dává M' na b, M'' na c; nahraďte obě involuce harmonickými čtveřinami s bodem M', příp. s M''.] b) Třemi imaginárními body A, B, C, jichž nositelky a, b, c jsou mimoběžné.

6. Sestrojte průsečík tří rovin α, β, γ, je-li a) α reálné, β, γ imaginární (nesdružené); b) všechny tři imaginární.

12. Jiné imaginární útvary v prostoru.

a) Minimální neboli isotropické přímky.

Každá plocha druhého stupně protíná nevlastní rovinu v kuželosečce. Abychom našli průsek kulové plochy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{1}$$

s nevlastní rovinou, zaveďme homogenní souřadnice, píšíce $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ místo x, y, z. Dostaneme

$$(x - x_0t)^2 + (y - y_0t)^2 + (z - z_0t)^2 = r^2t^2. \tag{1'}$$

Body nevlastní přísluší hodnotě $t = 0$; dostaneme tedy pro nevlastní body kulové plochy rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \ t = 0. \tag{2}$$

To jsou rovnice kuželosečky, ve které protínají nevlastní rovinu všechny kulové plochy, neboť její rovnice nezávisí ani na souřadnicích středu x_0, y_0, z_0, ani na poloměru r. Říkáme jí **absolutní kružnice** nebo **kružnice v nekonečnu**. Všechny kulové plochy procházejí absolutní kružnicí.

Prvá rovnice (2) se může považovati za rovnici koule o středu $O\,(0; 0; 0)$ a poloměru $r = 0$, nebo za rovnici kužele s vrcholem O, který prochází absolutní kružnicí. Pošineme-li vrchol do bodu $S\,(x_0; y_0; z_0)$, zní rovnice tohoto kužele

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0. \tag{3}$$

Přímky protínající absolutní kružnici slují **minimální**, nebo **isotropické přímky**. Rovnice (3) vyjadřuje jejich vlastnost: **Vzdálenost dvou bodů na minimální přímce se rovná nule.**

Bodem v prostoru jde kužel minimálních přímek. Je-li ϱ proměnný parametr, lze napsati rovnice minimální přímky bodem $(x_0; y_0; z_0)$ ve tvaru

$$x = x_0 + \varrho \,.\, a, \ y = y_0 + \varrho \,.\, b, \ z = z_0 + \varrho \,.\, c, \tag{4}$$

při čemž musí býti

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Podobně jako kuželosečka v rovině určuje polární soustavu, pro kterou je řídicí křivkou, definuje kužel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ určitý polární systém. Bodu $S\,(x_0; y_0; z_0)$ patří polární rovina

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0, \tag{5}$$

jež je kolmá k přímce OS. Můžeme také říci, že (5) je polára nevlastního bodu přímky OS k absolutní kružnici. Kolmost se jeví tedy jako polarita k absolutní kružnici. **Přímka a rovina jsou kolmé, jsou-li nevlastní jejich prvky pól a polára absolutní kružnice.** Dvě přímky jsou kolmé, když jejich nevlastní body jsou polárně podle ní sdruženy (jeden leží na poláře druhého).

Že přímky OS a OP, kde $P\,(x;\,y;\,z)$ je libovolný bod, jsou kolmé, vyjádříme větou Pythagorovou $\overline{PS}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OP}^2$, nebo v souřadnicích

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2;$$

tato rovnice po úpravě dává hořejší podmínku (5):

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0.$$

Podle toho isotropická přímka, povrchová přímka isotropického kužele, je kolmá sama k sobě. Tečná rovina tohoto kužele je kolmá k příslušné povrchové přímce, která v ní leží. Tyto tečné roviny slují **roviny isotropické** (také **minimální**). Isotropická rovina, která jde počátkem, má rovnici

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde platí

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Zde se jeví začátečníku jistě trochu paradoxní: Přímka sama k sobě kolmá a o délce nula! Ve starší literatuře (S. **Lie**) setkáváme se proto s názvem „verrückte Geraden“ (bláznivé přímky); u téhož autora se však také již objevuje název minimální přímky, který má své odůvodnění v teorii ploch. U francouzských autorů se ujal název isotropické přímky, který chce vyjádřiti, že při otáčení kolem bodu v rovině dvě z těchto přímek (právě ty, které leží v rovině a jdou středem otáčení) zůstávají nehybné.

Je zásluhou francouzské školy, že do geometrie zavedla kruhové body v rovině a absolutní kružnici v prostoru, že ukázala, že lze s nimi pracovati jako s reálnými útvary. Skutečně nám dovoluje jejich použití dosíci krásných geometrických výsledků velmi lehce, výsledků velmi obecných, z kterých rázem dostaneme četné věty speciální.

Pro vzájemný vztah metrické a projektivní geometrie a pro pochopení geometrie neeuklidovské mají tyto poznatky význam fundamentální.

b) Reálná kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ obsahuje dvě soustavy přímek. Píšeme-li její rovnici ve tvaru

$$(x + iy)(x - iy) = (r + z)(r - z), \tag{1}$$

jeví se nám jako výsledek vyloučení veličiny α z rovnic

$$x + iy = \alpha(r - z), \quad \alpha(x - iy) = r + z, \tag{2}$$

nebo jako výsledek vyloučení veličiny $-\beta$ z rovnic

$$-\beta(x - iy) = r - z, \quad x + iy = -\beta(r + z). \tag{3}$$

Při konstantním α znamenají rovnice (2) dvě roviny, tedy přímku, při proměnném α značí soustavu přímek. Právě tak rovnice (3) vyjadřuje při proměnném β druhý systém přímek. Přímky téže osnovy (parametry α_1, α_2) jsou vždy mimoběžné, jedna přímka prvé osnovy a jedna druhé osnovy se vždy protínají v reálném bodě plochy.

Ostatně z hořejších rovnic plyne

$$x = r \cdot \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = r\,\frac{i(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}, \quad z = r\,\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}; \tag{4}$$

souřadnice bodu na ploše jsou vyjádřeny jako funkce dvou parametrů α, β. Je-li α konstantní, jsou x, y, z lineární funkce jednoho parametru a tedy bod proběhne přímku jedné osnovy; podobně při konstantním β proběhne bod přímku druhé osnovy. Aby bod byl reálný, musí být α a $-\dfrac{1}{\beta}$ komplexní sdružené. Skutečně při $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = -\dfrac{1}{\alpha_1 - i\alpha_2}$ dají (4) reálné hodnoty. Přímky na reálné kulové ploše jsou vesměs imaginární prvého druhu. Ostatně se snadno přesvědčíme, že průsek tečné roviny s plochou jsou