2. Šest chlapců a šest dívek má vytvořiti kolo, v němž by se chlapec a dívka střídali. Kolik jest možno sestav, aby každý chlapec vedle každé dívky stál pouze jednou? (Naznačte si 6 chlapců jako šest vrcholů pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kruhu, na obvod soustředného kruhu o menším poloměru týmž způsobem naznačte si šest dívek, takže každá jest uprostřed mezi dvěma sousedními chlapci. To jest prvá skupina; druhou obdržíte otočením menšího kruhu o 120 stupňů; jak obdržíte třetí a poslední skupinu? Upravte tento postup pro pět párů!)

3. Úlohu 8 tohoto odstavce lze uvažovati i v prostoru; počet cest, jimiž se lze dostati z bodu (0; 0; 0) do bodu $(m; n; p)$ jest $\binom{m+n+p}{m+n}\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$. Ukažte, kolik jest možných cest z bodu (0; 0; 0) do bodu (4; 4; 4)! $\left[\binom{12}{4} = 495.\right]$

13.

ŘADY.

Řadou nazýváme posloupnost čísel vytvořených dle jistého výtvarného zákona a spojených znaménkem kladným nebo záporným; i o sledu těchto znamének budeme předpokládati, že se řídí dle jistého pravidla. Výtvarný zákon může býti dán dvojím způsobem; explicitně; na př. $a_n = 2n - 1$, všechny členy buďtež spojeny znaménkem kladným; pišme $n = 1; 2; \ldots; 10$, tak obdržíme řadu $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ $\ldots + 21$. Jiné explicitní předpisy jsou $a_n = \frac{1}{n}$, všechna znaménka buďtež kladná, nebo nechť se znaménko kladné střídá se znaménkem záporným: tak vznikají řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} + \ldots,$$

z nichž dříve uvedená se jmenuje harmonická. Předpis, jímž byla dána posloupnost čísel Fibonacciových $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(viz odst. 5) nazývá se rekurentním; již v uvedeném odstavci jsme se zabývali řadami z těchto čísel složenými.

Lidé velmi záhy se zabývali řadami buď objevujíce nové výsledky teoretické nebo řešíce některé zajímavé příklady: ty vlastně se stávají schránkou objevených teoretických výsledků. I my jsme již několikráte k řešení užili na př. řad geometrických (viz odst. 5, nebo v předchozím odst. př. 8).

1. Již Archimedes dovedl sečísti aritmetickou řadu $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$; tak vlastně dovedl již sečísti obecnou řadu aritmetickou:

$$a_1 + (a_1 + d) + \underline{a_1 + 2d} + \ldots + \overline{a_1 + n - 1d} =$$
$$= na_1 + \tfrac{1}{2}n(n - 1)\,d = \tfrac{1}{2}n[a_1 + a_1 + \overline{n - 1}d] = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

2. Rovněž znal již součet prvních n členů řady $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$; krátce dojdeme k cíli takto: Sečtěme těchto n rovnic:

$$(1 - 1)^3 = 0^3 = 1^3 - 3 \,.\, 1^2 + 3 \,.\, 1 - 1,$$
$$(2 - 1)^3 = 1^3 = 2^3 - 3 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 - 1,$$
$$(3 - 1)^3 = 2^3 = 3^3 - 3 \,.\, 3^2 + 3 \,.\, 3 - 1,$$
$$(n - 1)^3 = (n - 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1,$$

výsledek jest, značíme-li $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$:

$$0 = n^3 - 3S_n + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n,$$

odkudž snadno vypočteme

$$S_n = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

3. Součet třetích mocnin $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ znali již odvoditi geometrickou úvahou Arabové. Tento součet lze odvoditi takto: Všimněme si, že $1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$, $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$; i naskytá se otázka, neplatí-li obecně $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Připusťme, že tento vzorec jest správný pro n, pak

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{4}n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3 = \tfrac{1}{4}(n + 1)^2\,(n^2 + 4n + 4) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2;$$

ale to jest náš původní vzorec, v němž jsme místo n psali $n + 1$; platí-li tedy původní vzorec pro n, platí i pro $n + 1$. Ukázali jsme, že platí pro $n = 2; 3; 4$, platí tedy i pro $4 + 1 = 5$, poněvadž platí pro 5, platí i pro $5 + 1 = 6$, čili platí pro všechna celá, kladná n.

Uveďme některé příklady k uvedeným vzorcům.

4. Mám 200 K, první K prodám za 1 hal., 2. K za 2 hal., 3. K za 3 hal., ..., 200. K za 200 hal. — získám či prodělám při tomto obchodě? Celkem obdržím $1 + 2 + 3 + \ldots + 200 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$ hal. $= 201$ K.

Jaký jest stav při podobném obchodě se 199 K?

5. (Stará německá úloha.) Na nejvyšší příčce žebříku sedí 1 holub, na druhé 2 holubi, až na nejnižší 50. příčce sedí 50 holubů, kolik jest jich celkem? (1275.)

6. Kolik jest všech možných čtverců na šachovnici? Čtverců o straně 1 jest v první řadě 8, ve všech ostatních rovněž po 8, tedy všech těchto čtverců jest 8^2. Čtverců o straně 2 jest v první řadě 7, čtverců o téže základně v druhé řadě rovněž 7 atd., celkem 7^2. Jest tedy všech čtverců $8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = 204$.

7. Ukažte podobnou úvahou, že všech obdélníků na šachovnici jest $8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = (\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9)^2 = 36^2 = 1296$.

8. Již v Ahmesově učebnici probleskuje znalost součtu n členů geometrické řady $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Ahmes řeší tuto úlohu: 7 osob má po 7 kočkách, z nichž každá zadáví 7 myší; každá myš zničila 7 klasů, z nichž by každý dal 7 měrek zrní: kolik jest kterých tvorů a věcí a jaký jest celkový jich součet? $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7\dfrac{7^5 - 1}{7 - 1} = 19607$.

9. Nesčetně variant má úloha, kterou vymyslili Indové: Jde o odměnu, kterou si vyžádal na králi vynálezce šachové

hry. — Za první pole chce jedno pšeničné zrno, za druhé 2, za třetí 4, za čtvrté 8 atd.; kolik žádá celkem? Žádá: $1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$; my zasloužilému vynálezci přidáme ještě jedno zrno. Číslo vyjádřené mocninou 2^{64} uniká svojí velikostí jakékoliv lidské představě; jakž takž lze si přibližně toto číslo představiti takto: Světelný rok není doba, nýbrž dráha, kterou urazí světlo (rychlost 300000 km za vt.), tedy za rok jest to $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km, čili $9{,}5 \cdot 10^{17}$ cm. Na jeden centimetr podle sebe lze položiti 4 pšeničná zrna, tedy podél délky světelného roku $38 \cdot 10^{17}$ zrn; ono množství zrn lze tedy položiti podél dráhy dané podílem $2^{64} : 38 \cdot 10^{17}$, t. j. asi 4,9 světelných roků. — Nejbližší stálice k Slunci jest alfa Centauri vzdálená asi 3 světelné roky.

10. Počet obyvatelstva na zeměkoli odhaduje se na 2 miliardy. Stala-li se o půlnoci nějaká příhoda, kterou objeví do čtvrt na jednu jediný člověk a jenž ji během příští čtvrthodiny sdělí opět jednomu člověkovi a tito dva během příští čtvrt hodiny dalším dvěma lidem atd., kdy o této události budou vědět všichni lidé na světě? Stane se tak za x čtvrthodin: $2^{x-1} = 2 \cdot 10^9$, $x - 1 = \dfrac{9{,}30103}{0{,}30103} \doteq 31$, $x = 32$; tedy asi po 8. hodině ráno.

Čísla rostoucí dle geometrické řady s podílem větší jedné, rostou, jak z posledních dvou příkladů vidno, velmi rychle. Jmenují se též čísla lavinová, rostou jako řítící se lavina. S pokusy sestrojiti co největší čísla, setkáváme se již u nejstarších orientálních národů; zřejmě jest tu snaha nějakým způsobem znázorniti si číslo nekonečně velké, nebo nekonečně velkou délku či nekonečně dlouhý čas.

Listy leknínu zaplňují plochu nádržky tak, že denní přírůstek jest roven včerejšímu stavu. Jaká část plochy byla zarostlá den před úplným rozšířením se leknínových listů po hladině nádržky? (Polovina.)

11. Rovněž ve starověku — a to Řekové — se setkali s druhým případem geometrických řad, t. j. s konvergentními řadami. Tak nazýváme řady, jež, ač mají nekonečně mnoho

členů, přece jen mají konečný součet. Tento případ nastává, kdy o podílu geometrické řady q platí: $-1 < q < 1$. První setkání řeckých filosofů a matematiků s těmito řadami nebylo právě nejšťastnější. Zénon eleatský (490—430 př. Kr.) učil, že existuje podstatný rozdíl mezi smyslovým vnímáním a skutečností; smysly utkvívají na povrchu věcí a nepronikají k podstatě a jádru jejich. Zkrátka: svět je subjektivní výtvor naší mysli. Smysly na př. konstatují, že šíp letí, ale úvahou lze zjistiti, že tomu tak není. Šíp by musil proletěti polovinu dráhy, pak polovinu zbylé dráhy a opět polovinu nově zbylé dráhy a tak do nekonečna, a to není možné: ve skutečnosti se šíp ze svého místa ani nepohnul. Zenon nevěděl (či nechtěl věděti?), označíme-li čas potřebný k proletění poloviny dráhy t, že časy potřebné k proletění dalších polovin dráhy jsou $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t$, jichž součet jest $\dfrac{\frac{1}{2}t}{1-\frac{1}{2}} = t$. — Podobně by bylo možno dokázati, že rychlonohý Achilles nedohoní želvu plazící se před ním ve vzdálenosti sto stop, ač jeho rychlost jest dvanáctkráte větší.

Archimedes (287—212 př. Kr.) měl však již správnější představy o konvergenci geometrické řady: Při studiu plochy paraboly a jejího těžiště sečetl řadu

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

12. Stanovte hodnotu nekonečného součinu $p = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}$.
Lze psáti $p = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots} + t$.

Jakub Bernoulli počátkem XVIII. století počítá takto:

$$p^2 = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}, \text{ takže } p^2 = ap \text{ a } p = a.$$

Tohoto matematika přímo fascinovala konvergence nekonečných řad, jak svědčí jeho latinské verše, jež zde uvádíme v přízvučné metrice:

Jako má řada nemajíc konce konečný součet,
v členech pak bezmezná mez má konečnou přec,
právě tak vidíš Nejvyšší vůle v nejmenší věci

spár, leč zmizela mez, jež prv' přidána byla.
Viděti v nejmenším malé, řekni, jaká to rozkoš,
natož pak spatřiti Jej, bytost Nejvyšší v malém!

13. Z nesčetných slovních úloh o konvergentních řadách uveďme tuto: Do kružnice jest vepsán trojúhelník o vrcholech A, B, C a úhlech α, β, γ. Pak jest $\widehat{AB} = 2\gamma$, $\widehat{BC} = 2\alpha$, $\widehat{CA} = 2\beta$; tyto oblouky rozpůlme body C_1, A_1, B_1. Tak vznikne trojúhelník o vrcholech A_1, B_1, C_1, proti nimž leží oblouky o velikostech $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$, $\beta + \alpha$, takže úhly nového trojúhelníka jsou $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\beta_1 = R - \frac{1}{2}\beta$, $\gamma_1 = R - \frac{1}{2}\gamma$.

Opakujeme-li konstrukci, získáme trojúhelník A_2, B_2, C_2, jehož úhly jsou $\alpha_2 \doteq R - \frac{1}{2}\alpha_1 = R - \frac{1}{2}R + \frac{\alpha}{2^2}$, podobně i β_2, γ_2. Opakujeme-li tuto konstrukci n-kráte za sebou, jest

$$\alpha_n = R - \frac{R}{2} + \frac{R}{4} - \ldots \pm \frac{R}{2^n} + \frac{\alpha}{2^{n+1}},$$

takže pro ustavičně rostoucí n jest

$$\alpha_\infty = R - \frac{R}{2} + \frac{R}{4} - \ldots = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}} = 60^\circ.$$

Podobně i $\beta_\infty = \gamma_\infty = 60^\circ$. Blížíme se tedy stále opakovanou konstrukcí rovnostrannému trojúhelníku. Vypočtěme ještě, kde jsou vrcholy výsledního trojúhelníka. Po n-té konstrukci jest: $\widehat{AA_1} = 2\gamma + \alpha$, $\widehat{A_1A_2} = 2\gamma_1 + \alpha_1$, ..., $\widehat{A_{n-1}A_n} = 2\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1}$, sečtením těchto rovnic dostaneme $\widehat{AA_n} = 2(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}) + (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})$. Avšak odvodili jsme $\alpha_1 = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha_2 = R - \frac{1}{2}\alpha$, ..., $\alpha_n = R - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ a značíme-li $A_{n-1} = \alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$, jest po sečtení posledních rovnic $A_{n-1} - \alpha + \alpha_n = nR - \frac{1}{2}A_{n-1}$ a odtud: $A_{n-1} = 2nR + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma - \gamma_n)$ a podobně, B_{n-1} a C_{n-1}. Nutno rozeznávati dva případy: 1. n jest sudé, pak $\widehat{AA_{n-1}} \sim \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma -$

$-\gamma_n$); 2. n je liché: $\widehat{AA}_{n-1} \sim 180^\circ + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma - - \gamma_n)$. Poněvadž pro n ustavičně rostoucí jest $\alpha_\infty = \beta_\infty = = \gamma_\infty = 60^\circ$, jest v prvním případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\gamma - - 120^\circ = \frac{2}{3}(180 - \beta - \gamma) - 120^\circ = \frac{2}{3}(\gamma - \beta)$ a v druhém případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}(\gamma - \beta) + 180^\circ$, takže výsledné trojúhelníky (oba rovnostranné) jsou vlastně dva. (Uvažte důvod.)

O konvergenci geometrických řad viz v odstavci následujícím.

14.

ARITMETICKÁ PARADOXA A SOFISMATA.

Matematickými sofismaty nebo paradoxy nazýváme zřejmě nesprávné výsledky odvozené zdánlivě správným způsobem. Školený čtenář snadno nalezne chybu; vždy se jedná o nesprávné, nebo neúplné použití některé matematické poučky.

1. Budiž $a \neq b$, $a + b = c$, pak jest $a = c - b$, $b = c - a$. Jistě jest $a(c - a) = b(c - b)$, odečtěme na obou stranách ab: vyjde nám $a(c - a - b) = b(c - b - a)$. Krátíme-li nyní $c - a - b$, obdržíme $a = b$, což jest v rozporu s předpokladem. Jest totiž $c - a - b = 0$, a nulou děliti ani krátiti nelze.

2. Budiž $a^2 - b = c^2 - d$, $a \neq c$ a předpokládejme $b : a = = d : c$. Přičtěme na obou stranách $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{d^2}{4c^2}$; na obou stranách dostaneme úplné čtverce, po jichž odmocnění jest $a - \frac{b}{2a} = c - \frac{d}{2c}$. Přičtěme nyní na obou stranách $\frac{b}{2a} = = \frac{d}{2c}$, čímž obdržíme $a = c$. Při odmocňování jsme totiž zapomněli, že nutno psáti

$$a - \frac{b}{2a} = \pm \left(c - \frac{d}{2c}\right)$$