

Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii

10. Síťové promítání

In: Josef Klíma (author): Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1944. pp. 58–65.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403094>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Pro další některá zobrazení povšimněme si případu dvoj-stopního zobrazení, při němž stopní roviny jsou rovnoběžny s průmětnou π a mají od této průmětny vzdálenosti $\pm d$, t. j. jsou *souměrně položeny k průmětně π a promítání je kolmé*. V obr. 42 je sestrojen půdorys a nárys takových rovin ${}^1\sigma, {}^2\sigma$, které jsou rovnoběžny s první průmětnou, která je v rovině π půlicí vzdálenost stopních rovin. Označíme-li vzdálenost libovolného bodu P od průmětny π jako souřadnici z , tu souřadnice rovin ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ jsou $\pm d$. Kolmý průmět do roviny π jeví se ve skutečné velikosti v půdoryse. Přímký $a, b, \dots$ jdoucí bodem P mají stopníky na rovinách ${}^1\sigma, {}^2\sigma$, jejichž půdorysy jsou homothetické pro střed P_1 a poměr $\overline{P_1^1 A_1} : \overline{P_1^2 A_1} = \overline{P_1^1 B_1} : \overline{P_1^2 B_1} = \dots = k$, kde $k = \frac{z-d}{z+d}$. Body průmětny π ($z = 0$) se zobrazují v středovou souměrnost ($k = -1$), úběžné body ($z = \infty$) zobrazují se v translaci ($k = 1$), body roviny ${}^1\sigma$ ($z = d$) a roviny ${}^2\sigma$ ($z = -d$) zobrazují se v speciální homothetičnosti, pro něž v prvním případě $k = 0$ a v druhém případě $k = \infty$.

10. SÍŤOVÉ PROMÍTÁNÍ

Paprskovou síť⁽¹⁶⁾ jmenujeme prostorový útvar skládající se z přímek, z nichž libovolným bodem v prostoru jde jedna a v libovolné rovině je též jen jedna přímka sítě. Tento přímkový útvar má nekonečně mnoho paprsků ∞^2 . Lze dokázat, že taková paprsková síť je souhrn příček (trans-

¹⁶⁾ Též „lineární kongruence“ viz *L. Seifert* l. c., str. 54.

versál) dvou mimoběžek, které mohou býti reálné různé, nebo reálné splývající anebo konečně imaginární druhého druhu.¹⁷⁾ Tyto přímky jmenujeme též *řídícími přímkami* paprskové sítě. Paprsků sítě lze užítí též jako promítacích paprsků na průmětnu π při tak zvaném *síťovém* nebo *zborceném promítání*. Označme si m , n řídící přímky paprskové sítě, jež jsou mimoběžné, a zvolme průmětnu π tak, aby neobsahovala žádnou z přímek m , n . Síťový nebo zborcený průmět libovolného bodu A je v průsečíku A' příčky a , jdoucí bodem A k řídícím přímkám m , n , s průmětnou π . Není-li bod A na žádné z přímek m , n , má jediný síťový průmět. Body přímek m nebo n mají nesčíslné množství síťových průmětů, jež jsou vždy na přímce, jež je průsečnicí průmětny π s rovinou určenou tím bodem a druhou řídící přímkou, na níž bod ten neleží. Obráceně však bod A svým síťovým průmětem A' není v prostoru určen, ježto bod A' je zborceným průmětem všech bodů příčky jdoucí bodem A k přímkám m , n ; aby byl určen, musela by býti pro bod A dána ještě nějaká podmínka, na př. vzdálenost od průmětny π , nebo jiný zborcený průmět bodu A pro jiné řídící přímky, ač v posledním případě oba zborcené průměty musely by vyhovovati jisté podmínce atd.

Síťové promítání není lineární, t. j. přímka nemá za průmět zase přímku, nýbrž obecně kuželosečku, jež se může případně rozpadnouti. Mějme sestrojiti síťový průmět přímky p , jež je mimoběžná s přímkami m , n . Promítací paprsky a , b , ... všech bodů A , B , ... přímky p vyplní plochu zborcenou druhého stupně, obecně t. zv. jednoduchý hyperboloid, ježž průmětna π protíná v kuželosečce p' , jež se může ve zvláštním případě rozpadnouti ve dvě přímky (kdyby rovina π byla tečnou rovinou hyperboloidu). Promítací hyperboloid obsahuje dvě soustavy tvořících přímek; jedna soustava přímek a , b , ... jsou promítací paprsky bodů A , B , ... přímky p a druhá soustava sestává z přímek p , m , n , 1p , ..., jež protí-

¹⁷⁾ Tamtéž str. 54 a n.

nají všechny přímky prvé soustavy; mezi sebou jsou však mimoběžné. Přímky druhé soustavy $p, {}^1p, \dots$, mimo m, n , mají též sítový průmět $p' \equiv {}^1p' \equiv \dots$. Kuželosečka p' jde stopníky M, N řídících přímek m, n na průmětně π , jakož i stopníkem P přímky p . Kuželosečkový průmět p' jdoucí body M, N neurčuje přímku p jednoznačně, ježto všechny přímky $p, {}^1p, \dots$ druhé soustavy výše zmíněného promítacího hyperboloidu lze považovati za originál k průmětu p' . Jednoznačnosti mezi průmětem p' a originálem přímky p se zde docílí, určíme-li vedle průmětu p' ještě na něm stopník P přímky p . Bodu P říkáme *bod upevňující*; kuželosečce (s bodem upevňujícím) se říká *upevňená kuželosečka*. Dostáváme tedy tento výsledek:

Průmětem přímky v prostoru při sítovém promítání je upevňená kuželosečka, jež prochází dvěma základními body M, N . Promítací paprsek, jenž náleží síti, má za průměty bod (vlastně dvě přímky protínající se v tomto bodě).

Jak se jeví v sítovém průmětě různoběžnost, nebo rovnoběžnost dvou přímek p, q ? Označme jejich společný bod R a jejich rovinu $\varrho \equiv (p, q)$. V rovině ϱ je jeden paprsek a sítě, jehož stopník a' náleží oběma kuželosečkám p', q' a je na spojnici stopníků P, Q přímek p, q na π . Čtvrtý průsečík kuželoseček p', q' mimo M, N, a' jest sítovým průmětem R' průsečíku $R \equiv (p, q)$.

Sítové průměty dvou přímek téže roviny jsou dvě upevňené kuželosečky jdoucí základními body M, N průmětny, při čemž spojnice upevňujících bodů (stopníků přímek) prochází jedním ze zbývajících dvou průsečíků kuželoseček, kdežto druhý z těchto průsečíků je průmětem průsečíků obou přímek.

Přestaňme na těchto vlastnostech obecného sítového promítání a uvažujme o zvláštním případě paprskové sítě: o t. zv. síti rotační.

10,1. Promítání rotační sítě paprskovou. V zobrazení dvoj-stopním (odst. 9,1), kde stopní roviny ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$ a $z_{1\sigma} = d$, $z_{2\sigma} = -d$, v kolmém promítání na rovinu π (obr. 43), uva-

[illegible]

obě přímky ${}^1p, {}^2p$ kolmo protínají přímku o a jsou navzájem mimoběžné. Vezměme nyní přímky $a, b, \dots$, jejichž stopníky ${}^1A, {}^1B, \dots$ jsou na přímce 1p a mají od přímky o tytéž vzdálenosti jako druhé stopníky ${}^2A, {}^2B, \dots$ ležící na přímce 2p . Patrně půdorysy těch přímek $a_1, b_1, \dots$ jsou spolu rovnoběžné a jejich stopníky $A, B, \dots$ na průmětně π jsou na ose p úhlu přímek ${}^1p_1, {}^2p_1$. Přímky $a, b, \dots$ vyznačené v obr. 43 jsou všechny pravotočivé, t. j. postavíme-li se do osy o a pozorujeme bod pohybující se na přímkách $a, b, \dots$ směrem od naší

hlavy k patě, musíme se otáčet vpravo. Stejně určené přímky levotočivé vzhledem k ose o , měly by stopníky na rovině π v druhé ose úhlu přímek $^1p_1, ^2p_1$. Všechny přímky $a, b, \dots$ v obr. 43 vyplňují plochu zvanou hyperbolický paraboloid, který má dvě soustavy tvořících přímek a sice jednu tvořenou přímkami $a, b, \dots$, jež jsou kolmy k přímce p a tudíž rovnoběžny s rovinou kolmou k této přímce a druhou soustavu tvořenou přímkami $p, ^1p, ^2p, \dots$, jež jsou rovnoběžny s průmětnou π . (Pro důkaz zvolme si na přímce a bod 3A , který má od průmětny π vzdálenost z , tu dělicí poměr $^3A_1^1A_1 : ^3A_1^2A_1 = (z - d) : (z + d)$.

Spojme bod 3A_1 s bodem o_1 přímkou $^3p_1 \equiv o_1^3A_1$ a označme $\sphericalangle p_1^3p_1 = \varphi$ a $\overline{A_1o_1} = u$, pak

$$\begin{aligned} \overline{^3A_1A_1} : \overline{^3A_1^2A_1} &= u(\operatorname{tg}\varphi - 1) : u(\operatorname{tg}\varphi + 1) = \\ &= (\operatorname{tg}\varphi - 1) : (\operatorname{tg}\varphi + 1). \end{aligned}$$

Porovnáním dostaneme $\operatorname{tg}\varphi = z : d$ a proto body přímek $a, b, \dots$ první soustavy, jež mají od π tutéž vzdálenost z , jsou na přímce 3p , jež protíná kolmo přímku o . [Sestrojíme-li přímku d první soustavy, jež má od osy o vzdálenost d , tu na půdorysu d_1 této přímky odtínají půdorysy přímek druhé soustavy svoje kóty z (v obr. 43 je to vyznačeno pro přímkou 3p).]

Otočme nyní přímky $a, b, \dots$ první soustavy o 180° kolem přímky o ; víme, že každá z nich a souměrně k ní podle osy o sdružená, vytvoří jednu soustavu tvořících přímek na rotačním hyperboloidu. Všechny tyto soustavy na jednomocném systému rotačních hyperboloidů vyplní rotační síť, jejíž řídicí přímky jsou ovšem imaginární druhého druhu.

• V libovolné rovině, jež je dána stopami $^1s^e, ^2s^e$ (obr. 43) je jediná přímka q této sítě, jejíž první stopník 1Q má půdorys v průsečíku 1Q_1 půdorysu $^1s_1^e$ s otočenou polohou $(^2s_1^e)$ půdorysu $^2s_1^e$ o 90° ve smyslu kladném kolem bodu o_1 . Libovolným bodem R , který je dán půdorysem R_1 a kótou z , jde též jediná přímka r sítě, kterou sestrojíme takto. Na hyperbolic-

kém paraboloidu dříve uvažovaném určíme přímkou 3p o kótě z náležející druhé soustavě a bod R otočíme kolem osy o až přejde na přímkou 3p do bodu 3B , jímž jde přímkou b sítě a sice $b_1 \perp p_1$. Otočením nazpět přímky b až bod 3B přejde do bodu R , dostaneme přímkou r sítě, jejíž stopník R' na průmětně π , který odpovídá bodu B přímky b , je síťovým průmětem bodu R na průmětně π . Řídící přímky sítě m, n jsou též přímkami druhé soustavy hyperbolického paraboloidu a ježto při otáčení kolem osy o (a tedy jejich půdorysy m_1, n_1 při otáčení kolem bodu o_1) nesmějí se měniti, jsou jejich půdorysy minimálními přímkami bodu o_1 .¹⁸⁾ Půdorysy m_1, n_1 odtínají na půdorysu d_1 svoje kóty, jež jsou $\pm d_1$, $i^2 = -1$. Řídící přímky m, n jsou tedy minimálními přímkami mimoběžnými protínajícími kolmo osu o sítě; jedna má kótu $+d_1$ a druhá $-d_1$. Pro levotočivou síť se kóty zamění.

V obr. 44 je sestrojen síťový průmět q' přímky q dané půdorysem q_1 a půdorysy stopníků ${}^1Q, {}^2Q$. Stopník Q přímky q půlí vzdálenost ${}^1Q_1{}^2Q_1$. Průmět q' podle odst. 10 je kuželosečka, jež jde stopníky řídících přímek m, n na průmětně π . Ježto tyto stopníky jsou zde v kruhových bodech průmětny, je q' kružnicí. To lze dokázati též přímo konstrukcí jednotlivých bodů průmětu q' . Třeba jen určovati stopníky paprsků rotační sítě, o níž předpokládáme v obr. 44, že je pravotočivou, jež jsou různoběžné s přímkou q . Snadno určíme síťové průměty ${}^1Q', {}^2Q'$ stopníků přímky q . Na př. bodem 1Q jde přímkou r sítě, jejíž ${}^1R \equiv {}^1Q$, $\sphericalangle {}^1R_1 o_1 {}^2R_1 = -90^\circ$, $o_1 {}^2R_1 = o_1 {}^1R_1$ a tu průmět ${}^1Q'$ půlí úsečku ${}^1R_1 {}^2R_1$. Obdobně určíme průmět ${}^2Q'$. Abychom dostali obecný bod M' průmětu q' , proložme přímkou q libovolnou rovinu ϱ , jejíž stopy ${}^1s, {}^2s$ jdou stopníky ${}^1Q, {}^2Q$ spolu rovnoběžně. Otočená poloha půdorysu stopy 1s_1 o úhel -90° kolem o_1 , jde bodem 2R_1 kolmo k 2s_1 a protíná tuto v půdorysu 2A_1 druhého stopníku přímky a sítě, jež protíná přímkou q v bodě A . Síťový průmět A' bodu A půlí vzdálenost ${}^1A_1 {}^2A_1$ a je též na stopě s roviny ϱ na průmětně π , která jde stopníkem Q přímky q rovnoběžně k stopě 1s . Pole bodů $A', {}^1Q', \dots$ je podobné s polem ${}^1A_1, {}^1Q_1, \dots$ a prvé vznikne z druhého otočením kolem středu o_1 o úhel -45° a homothetickým přiblížením k o_1 pro poměr $1 : \sqrt{2}$. Proto spojnice $A' {}^1Q'$ svírá s ${}^1A_1 {}^1Q_1$ úhel 45° a tedy též s $A'Q \parallel {}^1A_1 {}^1Q_1$. Je proto místem bodů A' kružnice q' , na níž body $Q, {}^1Q'$ ome-

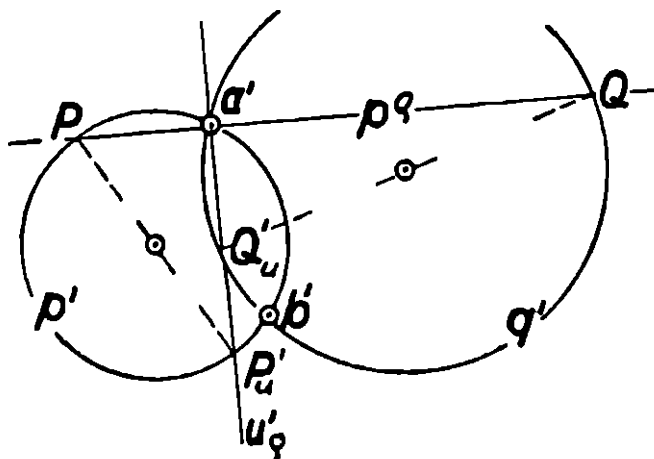
¹⁸⁾ Viz L. Seifert l. c., str. 35.

$\perp$, ${}^1\overline{Q_1}{}^1\overline{Q'}$ a proto též $Q_u{}^1\overline{Q'}$ $\perp$ $\overline{Q^1Q'}$. Zvolíme-li na ose o střed promítání S ve vzdálenosti d nad průmětnou π , tu síťový úběžník Q_u' dostane se ze středového úběžníku Q_u'' otočením kolem středu o_1 o úhel $+90^\circ$. Z toho je patrné jak lze ze síťového průmětu přímky (q', Q) přejíti k středovému průmětu, známe-li o_1 a d a naopak.

64

kótě z bodu A přímky, je $\varphi = \sphericalangle A'o_1A_1$. Body o_1, B, A_1, A' jsou na kružnici a proto $\sphericalangle A'BQ = \varphi$ a tedy v kružnici q' středový úhel $\sphericalangle Q\omega A' = -2\varphi$. Pro body $Q, {}^1Q, Q_{u\infty}$ jest $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ a podle konstrukce patří k obrazům těchto bodů na kružnici q' středové úhly $0^\circ, -90^\circ, -180^\circ$.

Bud' dán síťový obraz přímky q , t. j. upevněná kružnice q' s bodem Q ; při rotační síti je k obrazu A' libovolného bodu A přímky q příslušný středový úhel $\sphericalangle Q\omega A'$ měřený od 0° do -180° a od 0° do $+180^\circ$, roven dvojnásobku úhlu patřícího ke kótě z_A .



Obr. 45. Rotační síťové obrazy různoběžek p, q .

Přímky kolmé k průmětně π se zobrazují v kružnici jdoucí bodem o_1 , kde je jejich společný síťový úběžník. Promítací paprsky, t. j. paprsky sítě zobrazují se do dvou minimálních přímek, které se protínají v reálném bodě průmětny. Přímky rovnoběžné s průmětnou se zobrazují v přímky v průmětně, jež vzniknou z jejich půdorysů otočením o úhel φ patřící k jejich kótě a homotetickým přiblížením k o_1 pro poměr $\cos\varphi : 1$. (Úběžná přímka doplňuje každý takový obraz na kružnici.)

V obr. 45 jsou vyznačeny kruhové síťové obrazy p', q' dvou různoběžek p, q určujících rovinu ρ . V rovině ρ je jeden paprsek a sítě, jehož bodový síťový obraz je v jednom z průsečíků a' kružnic p', q' , kdežto druhý průsečík b' je síťovým obrazem paprsku b sítě, jež jde průsečíkem (p, q) . Stopníky P, Q přímek p, q musí býti na stopě pe roviny ρ , jež musí jíti průsečíkem a' obou kružnic. Diametrálně protilehlé síťové úběžníky P_u', Q_u' určují přímkový obraz u_q' úběžné přímky u_q roviny ρ , jež je kolmá k stopě pe . Poslední plyne z určení síťového úběžníku ze středového úběžníku.

Laskavému čtenáři se ponechává, aby zobrazil v síťovém promítání svazek paprskový, tra paprskový atd.