

Determinanty a matice v teorii a praxi

2. Pravidlo Cramerovo

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 12–17.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403287>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

2. PRAVIDLO CRAMEROVO.

Budiž dána soustava n lineárních rovnic s n neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$, již píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_{\nu} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

a předpokládáme, že jest její determinant $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ různý od nuly.

Násobme rovnice (10) po řadě čísly $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$ (jsou to doplňky prvků $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ v A) a sečteme. Dostaneme (viz vzorec (12,2) dílu prvního)

$$\sum_{i=1}^n b_i A_{ik} = \sum_{i=1}^n A_{ik} \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} \sum_{i=1}^n a_{i\nu} A_{ik} = x_k \cdot A = A x_k.$$

Protože však jest $\sum_{i=1}^n b_i A_{ik}$ rovno determinantu — označme jej A_k — který vznikne z A tím, že k -tý sloupec nahradíme čísly $b_1, b_2, \dots, b_n$ a protože jest podle předpokladu $A \neq 0$, nacházíme — provedouce právě naznačený postup po řadě pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$ — tento důsledek rovnic (10):

$$x_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Rovnice (10) lze však obráceně pokládati za důsledek vztahů (11). Násobíme-li totiž ν -tý z nich číslem $a_{i\nu}$ a sečteme přes všechna $\nu = 1, 2, \dots, n$, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_{\nu} &= \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} A_{\nu} = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} \sum_{l=1}^n b_l A_{l\nu} = \frac{1}{A} \sum_{l=1}^n b_l \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} A_{l\nu} = \\ &= \frac{1}{A} \cdot b_i A = b_i, \end{aligned}$$

tedy právě i -tou rovnicí ze soustavy (10). Provedeme-li tento postup pro $i = 1, 2, \dots, n$, máme celou soustavu (10) jako důsledek vztahů (11).

Tento poznatek, který má velkou důležitost, vyjádříme větou 5. (t. zv. věta Cramerova):

Soustava n lineárních rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem má jediné řešení. Dostaneme je tak, že v determinantu soustavy nahradíme postupně všechny sloupce absolutními členy (t. j. koeficienty bez neznámých) stojícími na pravé straně rovnic soustavy a determinanty takto vzniklé pak dělíme determinantem soustavy.

Příklady.

6. Řešiti soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Determinant A této soustavy má podle příkladu 4. hodnotu 3; determinanty A_1, A_2, A_3, A_4 se zde dají v důsledku jednoduchých pravých stran rovnic (12) snadno vypočítati. Dostaneme

$A_1 = 18, A_2 = -20, A_3 = -10, A_4 = 13; A = 3$, takže jest jediné řešení soustavy (12) dáno čísly

$$x_1 = 6, x_2 = -\frac{20}{3}, x_3 = -\frac{10}{3}, x_4 = \frac{13}{3}. \quad (12,1)$$

7. Derivace funkcí implicitních.

Budtež proměnné $y_1, y_2, \dots, y_n$ dány jako derivabilní funkce nezávisle proměnných $x_1, x_2, \dots, x_m$ soustavou n implicitních vztahů

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

v nichž má každá z funkcí f_i spojitě parciální derivace podle $x_1, x_2, \dots, y_n$.

Úlohou jest určití parciální derivace funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$ podle $x_1, x_2, \dots, x_m$. Provedeme to tak, že každou z rovnic (13) derivujeme parciálně postupně podle všech proměnných $x_1, x_2, \dots, x_m$. Derivujeme-li na př. podle x_k , dostaneme soustavu n rovnic

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \cdot \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

o n neznámých $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$. Za předpokladu, že determinant $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \right| \neq 0, i, \nu = 1, 2, \dots, n$ této soustavy — budeme jej také označovati symbolem

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

a nazývati funkcionálním (nebo Jacobiho) determinantem funkcí $f_1, f_2, \dots, f_n$ podle proměnných $y_1, y_2, \dots, y_n$ — není roven nule, lze podle věty Cramerovy rovnice (14) řešiti a formule pro hledané parciální derivace se dají psáti ve tvaru

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = - \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_k, y_{\nu+1}, \dots, y_n)} : \quad (15)$$

$$: \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

U prostorové čáry $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ máme na př.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D(F, G)}{D(x, z)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{D(F, G)}{D(y, x)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)} \quad (17)$$

za předpokladu, že jest $\frac{D(F, G)}{D(y, z)} \neq 0$.

8. Provésti dělení polynomu

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu} \quad (a)$$

binomem $x - x_1$, t. j. určití koeficienty $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n$ tak, aby platilo identicky

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu} = (x - x_1) \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_{\varrho} x^{n-\varrho-1} + q_n. \quad (b)$$

Rovnici (b) upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu} &= \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_{\varrho} x^{n-\varrho} - \sum_{\varrho=0}^{n-1} x_1 q_{\varrho} x^{n-\varrho-1} + q_n = \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_{\varrho} x^{n-\varrho} - \\ &- \sum_{\kappa=1}^n x_1 q_{\kappa-1} x^{n-\kappa} + q_n = \sum_{\varrho=0}^n (q_{\varrho} - x_1 q_{\varrho-1}) x^{n-\varrho}, \quad q_{-1} = 0 \end{aligned}$$

a z něho dostáváme ve smyslu metody neurčitých součinitelů systém $n + 1$ rovnic pro neznámé koeficienty $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$-x_1 q_{\nu-1} + q_{\nu} = a_{\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n; \quad q_{-1} = 0. \quad (c)$$

Snadno nahlédneme, že má determinant této soustavy hodnotu 1, takže se při jejím řešení nemohou vyskytnouti žádné nesnáze. Toto řešení je potom podle Cramerovy věty dáno vzorci

$$q_{\nu} = A_{\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (d)$$

označíme-li v determinantu soustavy (c) sloupce pořadovými čísly $0, 1, 2, \dots, n$, znamená A_{ν} determinant vzniklý z něho

tím, že sloupec s pořadovým číslem ν nahradíme novým s elementy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Rozvedením podle prvních $\nu + 1$ řádků dostaneme pak A_ν ve tvaru

$$A_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0, 0, \dots, & 0, a_0 \\ -x_1, & 1, 0, \dots, & 0, a_1 \\ 0, -x_1, & 1, \dots, & 1, a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, 0, \dots, & 1, a_{\nu-1} \\ 0, & 0, 0, \dots, & -x_1, a_\nu \end{vmatrix},$$

t. j. podle vzorců (13), (13') dílu prvního

$$A_\nu = a_0 x_1^\nu + a_1 x_1^{\nu-1} + \dots + a_\nu.$$

Máme tedy definitivní řešení soustavy (c):

$$q_\nu = a_0 x_1^\nu + a_1 x_1^{\nu-1} + \dots + a_\nu, \nu = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (d1)$$

Podle této formule je tudíž možno přímo vypočítati koeficienty $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ podílu, jakož i zbytek q_n při dělení výše uvedeném; tento zbytek má ovšem hodnotu $q_n = f(x_1)$, jak vychází také přímo ze vzorce (d1).

Velmi pohodlný výpočet koeficientů $q_0, q_1, \dots, q_n$ se opírá o relace (c) a uspořádává do t. zv. *schematu Hornerova*:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0, a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \\ x_1 & x_1 a_0, & x_1 q_1, & x_1 q_2, & \dots, & x_1 q_{n-2}, & x_1 q_{n-1} \\ \hline & a_0, & q_1, & q_2, & q_3, & \dots, & q_{n-1}, & q_n = f(x_1). \end{array} \quad (e)$$

9. Jako další příklad provedeme určení koeficientů $c_1, c_2, \dots, c_m$, které vystupovaly v prvním dílu při stanovení hodnoty determinantu *Sternova* (vztah 66). Mají se nalézt c_i tak, aby platilo identicky v x

$$\begin{aligned} f_m(x) &\equiv x^m + \sum_{\nu=1}^m a_\nu^{(m)} x^{m-\nu} = x^m + \sum_{\varrho=1}^m c_\varrho f_{m-\varrho}(x) = \\ &= x^m + \sum_{\varrho=1}^m c_\varrho \sum_{\kappa=0}^{m-\varrho} a_\kappa^{(m-\varrho)} x^{m-\kappa-\varrho} = x^m + \sum_{\varrho=1}^m c_\varrho \sum_{\nu=\varrho}^m a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)} x^{m-\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^m x^{m-\nu} \sum_{\varrho=1}^{\nu} c_\varrho a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)}, \quad a_0^{(m-\varrho)} = 1. \end{aligned}$$

Tento požadavek vede ve smyslu metody neurčitých součinitelů k systému rovnic pro neznámé c_e

$$\sum_{e=1}^{\nu} a_{\nu-e}^{(m-e)} c_e = a_{\nu}^{(m)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, m.$$

Determinant D tohoto systému má hodnotu

$$D = a_0^{(0)} \cdot a_0^{(1)} \cdot a_0^{(2)} \cdot \dots \cdot a_0^{(m-1)} = 1,$$

determinant D_k , vzniklý z D tím, že k -tý sloupec nahradíme soustavou čísel $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}$ pak rozvedeme podle prvních k řádků a dostaneme pro něj výraz

$$D_k = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & a_1^{(m)} \\ a_1^{(m-1)}, & 1, & 0, & \dots, & a_2^{(m)} \\ a_2^{(m-1)}, & a_1^{(m-2)}, & 1, & \dots, & a_3^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}^{(m-1)}, & a_{k-2}^{(m-2)}, & a_{k-3}^{(m-3)}, & \dots, & a_k^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Podle Cramerova pravidla tedy máme pro c_k hodnoty

$$c_k = D_k, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

to jsou koeficienty oné lineární kombinace, které jsme použili při výpočtu hodnoty determinantu Sternova.