

Determinanty a matice v teorii a praxi

7. Formy kvadratické

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 44–57.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403292>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

7. FORMY KVADRATICKÉ.

Jestliže v souměrné bilineární formě položíme $y_v = x_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$), přejde tato v útvar, kterému říkáme *kvadratická forma* proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pochopitelně na ni přenášíme všechny pojmy a úvahy, které jsme provedli v odst. 6. Zvláště je možno také pro kvadratickou formu provést redukci, o níž mluví věta 9.; díky symetrii matice kvadratické formy stačí k této redukci jediná transformace s maticí (48) z odst. 6.

Jako příklad provedme redukci kvadratické formy

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4. \quad (59)$$

Matice dané formy

$$A = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 3, & -1 \\ 1, & 2, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 6, & 0 \\ -1, & 1, & 0, & 2 \end{vmatrix}$$

má, jak si čtenář snadno ověří, hodnotu $h = 2$; postup věty 9. z odst. 6 se tedy pro náš případ utváří takto:

Redukovaná soustava příslušná k systému (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

má dvě nezávislá řešení. Za ta zvolíme na příklad

$$\begin{aligned} \xi_{13} &= 1, & \xi_{23} &= -1, & \xi_{33} &= 0, & \xi_{43} &= 1 \\ \xi_{14} &= -1, & \xi_{24} &= -1, & \xi_{34} &= 1, & \xi_{44} &= 0 \end{aligned}$$

a sestavíme matici B_1 podle vzoru (48):

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

Danou formu (59) pak transformujeme transformací B_1 ; pro matici $\bar{B}_1 A B_1$ nám po krátkém počítání vyjde

$$\bar{B}_1 A B_1 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Transformací (která je regulární — ověřte si to)

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_3 - X_4 \\ x_2 &= X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= X_4 \\ x_4 &= X_3 \end{aligned}$$

přejde tedy kvadratická forma (59) ve tvar

$$f_1 = 2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_1X_2. \quad (59')$$

Potvrďte si tuto skutečnost přímým výpočtem.

Píšeme-li kvadratickou formu ve tvaru

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (60)$$

nazýváme lineární formy

$$F_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{k=1}^n a_{\nu k} x_k, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (61)$$

lineárními formami k f přidruženými (adjungovanými); někdy také píšeme $F_\nu(x)$.

Protože je forma f homogenní funkcí 2. stupně svých proměnných, platí pro ni podle Eulerovy věty

$$\sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 2f, \quad \text{t. j.} \quad f = \sum_{\nu=1}^n x_\nu F_\nu; \quad (62)$$

bilineární forma

$$\sum_{\nu=1}^n y_\nu F_\nu(x) \quad (63)$$

se jmenuje *polárou* dané formy kvadratické.

Souměrný determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ matice A dané kvadratické formy se nazývá *diskriminantem* této formy a rozhoduje svojí hodnotou o tom, zda je forma singulární či regulární.

Kvadratickou formu (60) lze psát také ve tvaru vroubeného determinantu. Vypočítáme-li totiž hodnotu determinantu r_1 , který vznikne z determinantu R_1 (vzorec (42) dílu prvního) tím, že v něm místo každého prvku a_{ik} píšeme jeho doplněk A_{ik} v determinantu A , vypočítáme-li tuto hodnotu r_1 podle vzorce (45) dílu prvního, dostáváme (α_{ki} značí doplněk prvku A_{ki} v determinantu recipročním k A)

$$r_1 = - \sum_{i,k} \alpha_{ki} x_i y_k = - A^{n-2} \sum_{i,k} a_{ki} x_i y_k.$$

Předpokládáme-li ještě, že je determinant A souměrný a klademe-li $y_k = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), dostáváme svrchu zmíněné vyjádření kvadratické formy f determinantem ve tvaru

$$- A^{n-2} \cdot f = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \dots, & A_{1n}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots, & A_{2n}, & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn}, & x_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n, & 0 \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Kvadratická forma

$$F = \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$$

se nazývá *formou k f adjungovanou*. Je-li hodnota formy f nejvýše $n - 2$, je forma k ní adjungovaná identicky nulová; je-li však f hodnoti $h = n - 1$, lze podle př. 13. psát $A_{ik} = \lambda_i \xi_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Vzhledem k souměrnosti původního determinantu je ovšem $A_{ki} = A_{ik}$, tedy $\lambda_k \xi_i = \lambda_i \xi_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) a formu adjungovanou k f lze psát také ve tvaru

$$F = \sum_{i,k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i x_i^2 + 2 \sum_{i < k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i \xi_i} x_i \right)^2. \quad (65)$$

V případě, že původní forma má hodnotu $h = n - 1$, je kvadratická forma k ní adjungovaná rovna úplnému čtverci formy lineární; je-li hodnota původní formy menší, než $n - 1$, je adjungovaná forma identicky nulová.

Maticový obraz kvadratické formy (60) je $\bar{x}Ax$; s výhodou ho užíváme zvláště k symbolickému znázornění transformací kvadratických forem. Polára formy (60) má za maticový obraz matici $\bar{y}Ax$, odkudž téměř okamžitě vyplývá fakt, že je polára „kovariantem“ své formy, což značí: Přejde-li jistou transformací daná kvadratická forma v jinou, pak přechází její polára — transformujeme-li obě řady jejích proměnných právě takovou transformací — v poláru kvadratické formy transformované. Stejně jednoduchým důsledkem maticového znázornění je to, že determinant formy transformované je roven determinantu formy původní, násobenému čtvercem determinantu transformace, jíž jsme danou kvadratickou formu podrobili.

Dokážeme si nyní důležitou větu pro theorii kvadratických forem, větu o redukci kvadratické formy na lineární kombinaci čtverců n proměnných.

Věta 10. Kvadratickou formu lze vhodnou regulární lineární transformací převést na lineární kombinaci čtverců proměnných, t. j. na tvar

$$c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2 + \dots + c_n X_n^2. \quad (66)$$

Je-li hodnota dané formy h , je mezi koeficienty c_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) právě h nenulových.

Důkaz. Obsahuje-li daná forma (60) aspoň jeden čtverec, dosáhneme eventuelním přechíslováním proměnných toho, že bude $a_{11} \neq 0$ a píšeme formu ve tvaru

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{k=2}^n a_{1k}x_k + \bar{f} = \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \right)^2 + \\ &+ \bar{f} - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{k=2}^n a_{1k}x_k \right)^2 = \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \right)^2 + f^{(1)}, \end{aligned}$$

kde $f^{(1)}$ (a také ovšem $\bar{f}$) je kvadratická forma už jen proměnných $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Transformujeme-li danou formu (60) za předpokladu $a_{11} \neq 0$ lineární substitucí, která je inverzní k regulární transformaci (rozmyslete si to)

$$X_1 = \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k, \quad X_\nu = x_\nu, \quad \nu = 2, 3, \dots, n, \quad (67)$$

dostaneme ji ve tvaru

$$c_1 X_1^2 + F^{(1)}(X_2, X_3, \dots, X_n).$$

Neobsahuje-li daná forma žádného čtverce proměnné, dosáhneme vhodným označením, že bude $a_{12} \neq 0$ (vylučujeme zde případ formy identicky nulové) a píšeme pak f takto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f &= a_{12}x_1x_2 + x_1\sum_{k=3}^n a_{1k}x_k + x_2\sum_{k=3}^n a_{2k}x_k + \\ &+ \bar{f} = \frac{1}{a_{12}}(a_{12}x_1 + \sum_{k=3}^n a_{2k}x_k)(a_{12}x_2 + \sum_{k=3}^n a_{1k}x_k) - \\ &- \frac{1}{a_{12}}\sum_{k=3}^n a_{1k}x_k\sum_{k=3}^n a_{2k}x_k + \bar{f} = \frac{1}{a_{12}}(a_{12}x_1 + \sum_{k=3}^n a_{2k}x_k) \cdot \\ &\cdot (a_{12}x_2 + \sum_{k=3}^n a_{1k}x_k) + f^{(2)}; \end{aligned}$$

$f^{(2)}$ a $\bar{f}$ jsou kvadratické formy v proměnných $x_3, x_4, \dots, x_n$.

Regulární transformací, která je inverzní k substituci

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}[a_{12}(x_1 + x_2) + \sum_{k=3}^n (a_{1k} + a_{2k})x_k], \\ X_2 &= \frac{1}{2}[a_{12}(x_2 - x_1) + \sum_{k=3}^n (a_{1k} - a_{2k})x_k], \end{aligned} \quad (68)$$

$$X_\nu = x_\nu, \quad \nu = 3, \dots, n,$$

dostaneme pak původní formu ve tvaru

$$\gamma_1 X_1^2 + \gamma_2 X_2^2 + F^{(2)}(X_3, X_4, \dots, X_n).$$

Dalším odštěpováním násobků čtverců proměnných od forem $F^{(1)}$ resp. $F^{(2)}$ dospějeme posléze k tvaru (66). Transformace, jichž při tom užíváme (jsou ovšem obdobné právě provedeným) se sice týkají jen některých proměnných (vždy těch, které zbyly ve formách vzniklých tím kterým odštěpením jednoho nebo dvou čtverců), lze je však interpretovati zřejmě po každé jako transformace všech proměnných. Tyto všechny transformace jsou — právě tak jako (67) a (68) — regulární a jejich postupnou aplikaci lze nahraditi jedinou regulární transformací všech proměnných, která je z nich složena. Byla-li hodnota původní formy h , je tedy i hodnota formy transformované na tvar (66) rovna h a počet nenulových koeficientů c , nemůže býti menší než h (pak by hodnota transformované formy byla totiž menší než h), ani větší než h (pak by ona hodnota byla také větší než h). Tím je věta 10. dokázána.

Užitečné je pro kvadratické (a také bilineární) formy zavést pojem *ekvivalence*.

Dvě formy kvadratické (nebo bilineární) nazýváme ekvivalentní, je-li možno jednu z nich převést regulární transformací (u bilineárních forem dvěma takovými transformacemi) ve druhou. Tento pojem ekvivalence je zřejmě vzájemný a platí o něm:

Dvě formy kvadratické nebo bilineární jsou navzájem ekvivalentní tehdy a jen tehdy, mají-li stejnou hodnotu.

Důkaz. Provedeme jen pro dvě kvadratické formy f_1, f_2 . Jsou-li ekvivalentní, existuje regulární transformace lineární, která převádí formu f_1 v f_2 . Protože pak při takovéto transformaci zůstává hodnota h_1 formy f_1 stále stejná, je nutně $h_1 = h_2$.

Mají-li naopak obě formy stejnou hodnotu $h_1 = h_2 = h$, převedeme prvou z nich (podle věty 10. a ještě další maličkou úpravou) regulární lineární transformací C_1 na tvar

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2,$$

druhou pak transformací C_2 (opět regulární) na tentýž tvar. Je tedy zřejmo, že složená regulární transformace $C_1 C_2^{-1}$ převádí formu prvou přímo v f_2 .

Pro případ dvou forem bilineárních probíhá důkaz úplně analogicky — proveďte jej.

Poznámky. K formám kvadratickým se ještě později (až probereme užití determinantů v theorii rovnic) vrátíme a seznámíme se s jejich dalšími vlastnostmi, ještě zajímavějšími, než jsou ty, které jsme právě poznali.

Redukce kvadratické formy, jak jsme ji tu naznačili, se dá provést u každé formy nikoli identicky nulové. Pochází v podstatě od *Lagrange* a bývá také občas uváděna pod jeho jménem (*Oeuvres, Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, 1759). Jiná metoda, velice elegantní, nikoli však tak všeobecná, pochází od *Jacobiho* (*Journ. f. Math.* 53, 1857).

Redukce kvadratických forem má důležitou úlohu v geometrii, mechanice, astronomii i v mnohých jiných oborech (použili jí *Gauss*, *Lagrange*, *Jacobi* a j.).

Příklady.

17. K objasnění theoretických výkladů tohoto paragrafu zopakujeme všechny pojmy a poučky, které jsme tu zavedli resp. odvodili, na příkladě formy (59). Protože má tato forma hodnost $h = 2$, lze ji redukovati na kvadratickou formu pouze dvou proměnných. To jsme provedli výše; v. vztah (59'). Ježto má naše forma $n = 4$ proměnné, bude míti také čtyři přidružené formy lineární. Podle vzorce (61) pro ně dostáváme (lze je ovšem psáti též ihned — jak?)

$$\begin{aligned} F_1 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ F_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ F_3 &= 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ F_4 &= -x_1 + x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

a ověříme pro ně snadno platnost vzorce (62).

Polára dané formy vychází podle předpisu (63) ve tvaru (všimněte si součtu indexů v jednotlivých členech)

$$\begin{aligned} 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 + 3x_3y_1 - x_1y_4 + \\ + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - x_4y_1 + x_2y_4 + \\ + 6x_3y_3 + x_4y_2 + 2x_4y_4. \end{aligned}$$

Daná forma je singulární a má hodnotu $h = 2$; jsou tedy všechny doplňky A_{ik} ze vztahu (64) rovny nule a rovnice (64) tedy vskutku splněna (neboť také $A = 0$). Forma adjungovaná k (59) je ovšem identicky nulová.

Nakonec ještě provedeme redukci naší formy ve smyslu věty 10. Budeme zde používat přímo transformace (67) — je totiž $a_{11} = 2$ —, doporučuji však čtenáři provést podrobně celý postup, jenž zavedení této transformace předcházela. Transformace (67) zde jest

$X_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$, $X_2 = x_2$, $X_3 = x_3$, $X_4 = x_4$;
reciproká k ní pak bude

$2x_1 = X_1 - X_2 - 3X_3 + X_4$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$, $x_4 = X_4$,
což dosazeno do dané formy vede k prvnímu částečnému výsledku:

$$\begin{aligned} f_1 = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{3}{2}X_2^2 + \frac{3}{2}X_3^2 + \frac{3}{2}X_4^2 + 3X_2X_3 + 3X_2X_4 + \\ + 3X_3X_4 = \frac{1}{2}X_1^2 + F^{(1)}. \end{aligned}$$

Na formu $F^{(1)}$ aplikujeme opět transformaci inverzní k regulární substituci obdobné (67):

$Y_2 = \frac{3}{2}X_2 + \frac{3}{2}X_3 + \frac{3}{2}X_4$, $Y_3 = X_3$, $Y_4 = X_4$; $Y_1 = X_1$,
tedy transformaci

$$X_2 = \frac{2}{3}Y_2 - Y_3 - Y_4, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = Y_4; \quad X_1 = Y_1.$$

Dostaneme tak konečně tvar, o němž mluví věta 10.; zde je velmi jednoduchý:

$$f_2 = \frac{1}{2}Y_1^2 + \frac{2}{3}Y_2^2.$$

Transformací

$$Y_1 = \sqrt{2}z_1, \quad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}z_2, \quad Y_3 = z_3, \quad Y_4 = z_4$$

pak bude forma (59) nejjednoduššího možného tvaru

$$f_3 = z_1^2 + z_2^2.$$

Je zcela snadné najít transformaci, která přímo převádí danou formu (59) ve tvar právě napsaný. Tato regulární transformace vznikne složením těch, jichž jsme postupně užili, takže její matice R bude

$$R = C_1 C_2 C_3,$$

kde jest

$$C_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{2}{3}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} \sqrt{2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \sqrt{\frac{2}{3}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Výpočet jest vhodným cvičením pro násobení matic a vede k výsledku

$$R = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}, & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & 1 \\ 0, & \sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Transformací

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}X_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}X_2 - X_3 + X_4 \\ x_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= X_3 \\ x_4 &= X_4 \end{aligned}$$

musí tedy forma (59) přejít ve tvar

$$f = X_1^2 + X_2^2.$$

Přesvědčte se o tom přímým dosazením a také pomocí matricového obrazu dané formy.

18. „Přednostní“ očíslování proměnných kvadratické formy.

Má-li kvadratická forma s koeficienty $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) hodnotu h , lze očíslovat proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, že bude hlavní minor $A_h = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, h$ různý od nuly. Tento souměrný determinant A_h má buď aspoň jeden hlavní minor $(h-1)$ -řadový různý od nuly — pak očísloujeme proměnné $x_1, x_2, \dots, x_h$ tak, aby právě minor $A_{h-1} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, h-1$ byl nenulový — nebo jsou všechny hlavní minory $(h-1)$ -řadové determinantu A_h nulové. V tomto druhém případě však musí A_h obsahovati alespoň jeden hlavní nenulový minor $(h-2)$ -řadový, ježto by jinak byly rovny nule vůbec všechny $(h-1)$ -řadové minory (tedy ne pouze hlavní) determinantu A_h a tento by nemohl býti různý od nuly (toto tvrzení je zcela triviálním důsledkem věty o minorech determinantu reciprokého k danému; v našem případě vezměte v počet determinant reciproký k A_h a uvažujte o jeho libovolném hlavním minoru dvouřadovém). V případě, že jsou všechny hlavní $(h-1)$ -řadové minory determinantu A_h rovny nule, existuje tedy alespoň jeden nenulový hlavní minor $(h-2)$ -řadový a tu označíme proměnné $x_1, x_2, \dots, x_h$ tak, aby byl nenulový právě minor $A_{h-2} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, h-2$. S nenulovým determinantem A_{h-1} , event. A_{h-2} naložíme stejně jako dříve s A_h a tak pokračujeme; položíme-li $A_0 = 1$, dospíváme tak k jistému očíslování proměnných původní kvadratické formy, jež nazveme „přednostním“ (takových očíslování může ovšem býti mnoho) a zároveň k řadě minorů

$$1 = A_0, A_1, A_2, \dots, A_h. \quad (69)$$

Ukážeme si, že v této řadě nemohou vedle sebe státi dva nulové členy a že členy sousedící zleva a zprava s nulovým,

mají vždy navzájem různá znaménka. Budiž na př. $A_s = 0$, kde $0 < s < h$; podle konstrukce řady (69) to značí, že jsme v A_{s+1} nenašli žádný hlavní nenulový minor s -řadový, takže tam rozhodně existuje alespoň jeden $(s-1)$ -řadový nenulový. Jeden pak z těchto byl vzat za A_{s-1} a proto je $A_{s-1} \neq 0$. Také A_{s+1} musí však býti různé od nuly, ježto by jinak musil v A_{s+2} existovati aspoň jeden nenulový hlavní minor s -řadový, který bychom vzali za A_s , takže by proti předpokladu bylo $A_s \neq 0$. Je tedy $A_{s-1} \neq 0$ a také $A_{s+1} \neq 0$ a dokážeme ještě, že je $A_{s-1} \cdot A_{s+1} < 0$. Také tato skutečnost je sice zcela elementárním důsledkem věty o minorech determinantů reciprokových, přece snad by však mohla způsobiti určité potíže a proto zde naznačíme její důkaz: Nenulový hlavní minor A_{s-1} byl získán z A_{s+1} vynecháním jistých dvou řádků (budiž to řádek ϱ -tý a σ -tý) a stejně číslovaných dvou sloupců. Sestrojíme si determinant k A_{s+1} reciprokový, označíme jeho elementy znaky α_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, s+1$ a vezmeme v úvahu jeho hlavní minor, tvořený elementy, v nichž se kříží řádky s pořadovými čísly ϱ, σ a sloupce téhož pořadí. Podle věty o minorech determinantu reciprokého je tento dvouřadý subdeterminant roven právě součinu $A_{s-1} \cdot A_{s+1}$ a protože jsou všechny s -řadové hlavní minory determinantu A_{s+1} podle předpokladu nulové (tedy i $\alpha_{\varrho\varrho} = \alpha_{\sigma\sigma} = 0$), máme konečně (pamatujme, že všechny determinanty zde vystupující jsou souměrné)

$$A_{s-1} \cdot A_{s+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{\varrho\varrho} & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\sigma\varrho} & \alpha_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\sigma\varrho} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{\varrho\sigma}^2 < 0.$$

Abychom uvedený postup předvedli na číselném příkladě, budeme se zabývatí regulární kvadratickou formou

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 4x_3x_4. \quad (70)$$

Matice

$$A' = \begin{vmatrix} 1, & -1, & 2, & -2 \\ -1, & 1, & -3, & 0 \\ 2, & -3, & 9, & 2 \\ -2, & 0, & 2, & 1 \end{vmatrix}$$

má hodnotu $h = 4$ a pro její determinant najdeme hodnotu $A_4 = 7$. Jeho minor A_{44} má hodnotu -1 a proto můžeme bez jakéhokoli přeměňování označení proměnných klásti $A_3 = -1$. Protože však je první hlavní dvouřadový minor determinantu A_3 — doplněk to jeho prvku 9 — roven nule, zato však má druhý hlavní minor (doplněk prvku a_{22}) hodnotu 5, provedeme přeznačení proměnných x_1, x_2, x_3 (a také x_4) na nové t_1, t_2, t_3, t_4 podle schematu

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ t_1, & t_3, & t_2, & t_4 \end{matrix} \quad (70')$$

V těchto nových proměnných bude míti forma tvar

$$\begin{aligned} f_1 = t_1^2 + 9t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 4t_1t_2 - 2t_1t_3 - 4t_1t_4 - \\ - 6t_2t_3 + 4t_2t_4 \end{aligned} \quad (70'')$$

a lze položit $A_2 = 5$. Pak už máme beze všeho přerádování $A_1 = 1, A_0 = 1$.

Přechod proměnných v původní formě podle schematu (70') je tedy přednostní (taková jsou zde možná dvě) a vede k formě (70'') s maticí

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix};$$

v této matici už má řada hlavních minorů vzniklých postupným vroubením

$$A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 9 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 2, & 9, & -3 \\ -1, & -3, & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 7$$

vlastnosti řady (69).

Jestliže jsme provedli pro danou kvadratickou formu

$$f' = \sum_{i,k} b_{ik} y_i y_k$$

přednostní očíslování, vede nás vzniklá forma

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$$

k řadě hlavních minorů (69). Tuto řadu lze doplniti na úplnou $1 = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = A_n = 0$. (71)

Výraz

$$\sigma = \sum_{s=1}^n \operatorname{sgn}(A_{s-1} A_s), \quad (72)$$

kde klademe $\operatorname{sgn} a = 1, 0, -1$ pro $a > 0, a = 0, a < 0$, má veliký význam pro theorii kvadratických forem a jmenuje se signaturou dané formy f' . Tak má forma (70) signaturu rovnou nule, protože je

$$\sigma = \operatorname{sgn}(A_0 A_1) + \operatorname{sgn}(A_1 A_2) + \operatorname{sgn}(A_2 A_3) + \operatorname{sgn}(A_3 A_4) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Tento výsledek ukazuje (jak později podrobně poznáme), že je naše forma indefinitní, což značí, že může nabývatí hodnot kladných i záporných, klademe-li za její proměnné číselné hodnoty (přesvědčte se o tom). Různé pochybnosti, které by se zde mohly vyskytnouti, tak na příklad, zda hod-

nota signatury nezávisí na tom, které z možných přednostních očišťování (je-li jich více) pro formu zvolíme, vyvrátíme později, ač se budeme zabývat kvadratickými (a ještě jinými) formami s jiného hlediska.