10. INVARIANTY.

Budiž $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ homogenní polynom stupně m-tého proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; jeho koeficienty označme na tomto místě (označení se v algebře provádí podle jistých zásad tak, aby už z něho bylo patrno, jaký tvar má příslušný člen polynomu) jednoduše znaky $a_1, a_2, \ldots$ Podrobíme nyní proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polynomu (říkáme také: formy) F homogenní lineární transformaci (v. odst. 6.)

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{X}. \tag{120}$$

Forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tím přejde ve formu nových proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ téhož stupně m, jaký měl původní polynom — značme tuto novou formu znakem $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a její koeficienty symboly $a_1', a_2', \ldots$ Každá funkce $f(a_1, a_2, \ldots)$ původních součinitelů, pro kterou platí vztah — C značí modul transformace (120) —

$$f(a_1', a_2', \ldots) = C^w f(a_1, a_2, \ldots), \tag{121}$$

se jmenuje *invariant dané formy F* a to invariantem *váhy w*.

Všimneme si tu jenom zcela běžných invariantů, abychom ukázali i zde užitečnost determinantů a matic. Musíme si však býti vědomi toho, že počítání s invarianty vyrostlo v celou velmi rozsáhlou theorii, v níž hrají nemalou roli na příklad také parciální diferenciální rovnice (Cayley, Journ. f. Math., 1854) a těch několik případů, které můžeme v úzkém rámci této knihy uvésti, představuje jen nejprimitivnější prvopočátky celé theorie.

Také v případě, kdy je dáno více forem, může míti jistá funkce jejich koeficientů vlastnost vyjádřenou vztahem (121). Říkáme pak takovéto funkci *simultánní invariant daných forem*.

1. *Soustava n lineárních forem v n proměnných.*

Budiž dán systém forem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maticovou rovnicí

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{122}$$

Transformací (120) přejde v soustavu

$$\mathbf{y} = \mathbf{ACX} = \mathbf{A'X}, \tag{122'}$$

při čemž ovšem platí

$$A' = CA; \tag{123}$$

je tedy determinant systému lineárních forem (122) jejich simultánním invariantem váhy 1.

2. *Forma bilineární.*

Bilineární forma s maticovým obrazem (v. odst. 6.)

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{124}$$

přechází homogenními lineárními transformacemi (kogredientními)

$$\mathbf{x} = \mathbf{CX},\ \mathbf{y} = \mathbf{CY}$$

opět v bilineární formu s obrazem

$$\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{ACY} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{A'Y}.$$

Platí proto vztah

$$A' = C^2A, \tag{125}$$

který ukazuje, že jest determinant bilineární formy dvou řad proměnných invariantem váhy 2 vůči všem lineárním homogenním a kogredientním transformacím obou řad proměnných.

3. *Forma kvadratická.*

Daná kvadratická forma s obrazem

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{126}$$

přejde homogenní lineární transformací (120) v novou, jejíž obraz jest

$$\bar{X}\bar{C}ACX = \bar{X}A'X$$

takže máme

$$A' = C^2A. \tag{127}$$

Je tedy diskriminant kvadratické formy invariantem váhy 2 vůči každé homogenní lineární transformaci proměnných.

Systém $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineárních forem adjungovaných k dané kvadratické s obrazem (126) má v maticové symbolice rovnici (122) a vzorec (122') nás poučuje, že je diskriminant A formy simultánním invariantem váhy 1 pro systém lineárních forem k oné kvadratické přidružených. Je ovšem nutno dáti dobrý pozor, aby nedošlo k omylu: Lineární formy adjungované ku kvadratické formě transformované lineární substitucí (120) nejsou rovny formám, které dostaneme, jestliže podrobíme téže transformaci (120) systém lineárních forem přidružených k původní formě kvadratické — ukažte si a ujasněte tuto věc pomocí maticového počtu. Při transformaci kvadratické formy se tedy její lineární adjungované formy netransformují zároveň ve formy přidružené k nové formě kvadratické — říkáme stručně, že adjungované formy nejsou kovarianty dané formy kvadratické.

Srovnáme-li navzájem obraz poláry

$$\bar{y}Ax \tag{128}$$

kvadratické formy původní a obraz

$$\bar{Y}\bar{C}ACX \tag{129}$$

poláry k formě transformované, vidíme, že tento nový obraz (129) vznikne z původního (128) stejnou transformací obou řad proměnných, jaké jsme použili při transformování původní formy kvadratické. Je tedy polára kvadratické formy jejím kovariantem.

4. *Forma kvadratická a lineární.*

Budiž $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratická forma s maticovým obrazem (126) a dále $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lineární forma

$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Sestrojme si nyní formu kvadratickou o $n + 1$ proměnných

$$f = F + 2x_{n+1}L \tag{130}$$

a podrobme ji homogenní lineární transformaci s maticí

$$\mathbf{C}_1 = \begin{Vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}, & 0 \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n}, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \end{Vmatrix}. \tag{131}$$

Z předchozích úvah víme, že se při této transformaci násobí diskriminant formy (130)

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & b_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, & 0 \end{vmatrix}; \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{132}$$

pouze čtvercem C_1^2 determinantu C_1, t. j. číslem C^2. Podle tvaru naší transformace (131) můžeme tento výsledek vysloviti zřejmě také takto: Výraz (132) je simultánním invariantem forem F a L vůči libovolné lineární homogenní transformaci (120); je to invariant váhy 2.

Přejdou-li při takové transformaci formy F, L v nové Φ, Λ s koeficienty a_{ik}', b_i', lze invarianci determinantu (132) psáti podle theorie determinantů vroubených také ve tvaru

$$\sum_{i,k} A_{ik}' b_i' b_k' = C^2 \,.\, \sum_{i,k} A_{ik} b_i b_k.$$

5. *Forma kvadratická a 2r lineárních.*

Budiž vedle kvadratické formy F z předchozího odstavce dáno ještě $2r$ forem lineárních

$$L_\varrho = \sum_{i=1}^{n} b_{\varrho i} x_i,\ \varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \Lambda_\varrho = \sum_{i=1}^{n} d_{\varrho i} x_i,\ \varrho = 1, 2, \ldots, r. \tag{133}$$

Dokážeme si snadno, že je determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_{11}, & \ldots, & b_{r1} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_{12}, & \ldots, & b_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & b_{1n}, & \ldots, & b_{rn} \\ d_{11}, & d_{12}, & \ldots, & d_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{r1}, & d_{r2}, & \ldots, & d_{rn}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} \tag{134}$$

vůči transformaci (120) invariantem váhy 2 simultánním pro formy F, $L_1, \ldots, L_r$, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$.

Tento determinant je totiž determinantem bilineární formy

$$\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i y_k + \sum_{\varrho=1}^{r} x_{n+\varrho} \Lambda_\varrho(y) + \sum_{\varrho=1}^{r} y_{n+\varrho} L_\varrho(x)$$

proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_{n+r}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n+r}$. Podrobíme-li je kogredientním transformacím

$$\boldsymbol{C}_r = \begin{Vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & \ldots, & c_{nn}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{Vmatrix},$$

kde jest počet vroubících řádků i sloupců roven r, násobí se determinant (134) podle odstavce o invarianci determinantu forem bilineárních pouze číslem $C_r^2 = C^2$.

6. *Dvě formy kvadratické.*

Buďte dány dvě kvadratické formy

$$F(x) = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k, \; a_{ik} = a_{ki}; \; G(x) = \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} x_i x_k, \; b_{ik} = b_{ki}. \quad (135)$$

Zcela snadno si pro ně určíme $n + 1$ simultánních invariantů tím, že vezmeme v úvahu kvadratickou formu $F + \lambda G$ (λ zcela libovolné) ze svazku určeného oběma formami danými.

Determinant této formy jsme už poznali v prvém oddílu — byl tam uveden ve vzorci (54) — a nalezli jeho hodnotu

$$I_0 + \lambda I_1 + \lambda^2 I_2 + \ldots + \lambda^{n-1} I_{n-1} + \lambda^n I_n.$$

Z té okolnosti, že je tento diskriminant formy $F + \lambda G$ invariantem váhy 2 a že je λ libovolné, plyne, že veličiny — jejich konstrukce popsána v prvém oddílu —

$$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n \quad (136)$$

jsou simultánní invarianty váhy 2 obou forem F a G vůči transformaci (120).

7. *Kvadratické formy v počtu m.*

Z daných m kvadratických forem

$$F_\varrho(x) = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}^{(\varrho)} x_i x_k; \; \varrho = 1, 2, \ldots, m$$

vytvořme pomocí libovolných součinitelů $1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ formu novou

$$F(x) = \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho F_\varrho(x) = \sum_{i,k}^{1,n} x_i x_k \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho a_{ik}^{(\varrho)}, \; \lambda_1 = 1. \quad (137)$$

Její diskriminant

$$D(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} + \lambda_2 a_{11}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{11}^{(m)}, \ldots \\ a_{21}^{(1)} + \lambda_2 a_{21}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{21}^{(m)}, \ldots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}^{(1)} + \lambda_2 a_{n1}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{n1}^{(m)}, \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \ldots, a_{1n}^{(1)} + \lambda_2 a_{1n}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{1n}^{(m)} \\ \ldots, a_{2n}^{(1)} + \lambda_2 a_{2n}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{2n}^{(m)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ldots, a_{nn}^{(1)} + \lambda_2 a_{nn}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{nn}^{(m)} \end{vmatrix} \qquad (138)$$

jest polynom proměnných $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ stupně n-tého a jest, jak víme, invariantem váhy 2 vůči transformaci (120). Proto také každý z jeho koeficientů, těch je obecně $\binom{n + m - 1}{m - 1}$, je invariantem váhy 2.

Velmi často se vyskytuje případ $m = 3$, $n = 2$; jde tedy o tři kvadratické formy po dvou proměnných. Máme zde

$$D(\lambda_2, \lambda_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} + \lambda_2 a_{11}^{(2)} + \lambda_3 a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(1)} + \lambda_2 a_{12}^{(2)} + \lambda_3 a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(1)} + \lambda_2 a_{21}^{(2)} + \lambda_3 a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(1)} + \lambda_2 a_{22}^{(2)} + \lambda_3 a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_3 + \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} .$$

$$. \lambda_2^2 + \begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} . \lambda_3^2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_2 \lambda_3 .$$

Že jsou invariantními koeficienty při λ_2^2, λ_3^2 a člen absolutní, víme už z dřívějška, jsou to totiž diskriminanty forem F_2, F_3 a F_1. Zato však dostáváme jako výsledek invarianci koeficientů v ostatních členech.

Binární forma (90), t. j.

$$f = \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu x + \delta_\nu y),$$

přejde transformací

$$x = c_{11} X + c_{12} Y, \quad y = c_{21} X + c_{22} Y \tag{139}$$

v novou

$$F = \prod_{\nu=1}^{n} [(c_{11}\gamma_\nu + c_{21}\delta_\nu) X + (c_{12}\gamma_\nu + c_{22}\delta_\nu) Y] =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n} (\Gamma_\nu X + \Delta_\nu Y).$$

Její diskriminant — faktor $(-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2}$ nebereme v úvahu — má hodnotu

$$D = \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\Gamma_\mu \Delta_\nu - \Delta_\mu \Gamma_\nu)^2 =$$

$$= \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \begin{vmatrix} c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu, & c_{11}\gamma_\nu + c_{21}\delta_\nu \\ c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu, & c_{12}\gamma_\nu + c_{22}\delta_\nu \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{21} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} \gamma_\mu, & \delta_\mu \\ \gamma_\nu, & \delta_\nu \end{vmatrix}^2,$$

čili

$$\prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\Gamma_\mu \Delta_\nu - \Delta_\mu \Gamma_\nu)^2 = C^{n(n-1)} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\gamma_\mu \delta_\nu - \delta_\mu \gamma_\nu)^2. \tag{140}$$

Vidíme, že je diskriminant binární formy n-tého stupně invariantem váhy $n(n-1)$ vůči homogenní lineární transformaci (139) jejích proměnných.

9. *Resultant dvou binárních forem.*

Transformací (139) přejdou binární formy

$$f = \prod_{\mu=1}^{m}(\gamma_\mu x + \delta_\mu y),\ g = \prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa_\nu x + \lambda_\nu y)$$

v nové

$$F = \prod_{\mu=1}^{m}(\Gamma_\mu X + \Delta_\mu Y),\ G = \prod_{\nu=1}^{n}(K_\nu X + \Lambda_\nu Y),$$

kde jest

$$\Gamma_\mu = c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu,\ \Delta_\mu = c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu;$$
$$K_\nu = c_{11}\varkappa_\nu + c_{21}\lambda_\nu,\ \Lambda_\nu = c_{12}\varkappa_\nu + c_{22}\lambda_\nu.$$

Platí tedy dále

$$\Gamma_\mu\Lambda_\nu - \Delta_\mu K_\nu = \begin{vmatrix} c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu, & c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu \\ c_{11}\varkappa_\nu + c_{21}\lambda_\nu, & c_{12}\varkappa_\nu + c_{22}\lambda_\nu \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{21} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_\mu, & \delta_\mu \\ \varkappa_\nu, & \lambda_\nu \end{vmatrix} = C(\gamma_\mu\lambda_\nu - \delta_\mu\varkappa_\nu),$$

takže pro resultant $R(F, G)$ transformovaných forem máme

$$R(F, G) = \prod_{\mu,\nu}(\Gamma_\mu\Lambda_\nu - \Delta_\mu K_\nu) =$$
$$= C^{mn}\prod_{\mu,\nu}(\gamma_\mu\lambda_\nu - \delta_\mu\varkappa_\nu) = C^{mn}R(f, g). \tag{141}$$

Tato rovnice ukazuje, že jest resultant dvou binárních forem stupňů resp. m, n invariantem váhy mn vůči transformaci (139).

10. *Symbolika Aronholdova.*

Ve vědách matematických a fysikálních se už odedávna užívá symbolických početních method. Jejich společným podstatným rysem jest vhodná náhrada veličin a operací daných jistými veličinami a operacemi symbolickými tak, aby matematická práce s těmito „obrazy“ byla snazší a průhlednější, než tomu jest v oboru veličin původních. Jako příklad takovýchto method uvedeme známé použití Laplaceovy integrální transformace, kde se místo původních funkcí berou do počtu jejich Laplaceovy obrazy, dalším případem tohoto druhu jest řešení některých problémů počtu pravděpodobnosti pomocí vytvořujících funkcí (známé Laplaceovy „fonctions génératrices“), analogické prvky vykazuje též komplexní methoda elektrotechniků, Schwarzova-Christoffelova methoda sdružených funkcí a řada dalších početních způsobů.

Také algebraické úvahy spěly mnohdy stejnou cestou. Zde se zmíníme alespoň o jednom případě tohoto druhu, který má svrchovanou důležitost v theorii invariantů, forem atd. Základní myšlenka je ta, že počítáme podle potřeby místo s binární formou

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu \tag{142}$$

n-tého stupně raději s jejím obrazem, k němuž podle úvah Aronholdových (Crelle's Journ. sv. 39 a 55) dospějeme takto:

Binární formu (142) n-tého stupně v proměnných x_1, x_2 píšeme ve tvaru

$$f_n(x_1, x_2) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu \tag{143}$$

a jejím „obrazem“ $F_n(x_1, x_2)$ nazveme kterýkoli z výrazů

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n,\ (b_1x_1 + b_2x_2)^n = b_x^n,$$
$$(c_1x_1 + c_2x_2)^n = c_x^n,\ (d_1x_1 + d_2x_2)^n = d_x^n, \ldots \tag{144}$$

Veličiny $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots$ jsou pouhé symboly, budeme jim říkati symbolické koeficienty formy (143) na rozdíl od skutečných jejích koeficientů $\bar{a}_\nu$. Skutečný součinitel $\bar{a}_\nu$ je pak symbolicky vyjádřen kterýmkoli z výrazů $a_1^{n-\nu}a_2^\nu$, $b_1^{n-\nu}b_2^\nu$, $c_1^{n-\nu}c_2^\nu$, $d_1^{n-\nu}d_2^\nu, \ldots$; tuto skutečnost budeme zapisovati vzorci

$$\bar{a}_\nu \doteq a_1^{n-\nu} a_2^\nu, \quad \bar{a}_\nu \doteq b_1^{n-\nu} b_2^\nu, \quad \bar{a}_\nu \doteq c_1^{n-\nu} c_2^\nu, \tag{145}$$
$$\bar{a}_\nu \doteq d_1^{n-\nu} d_2^\nu, \ldots$$

Okolnost, že má původní binární forma $f_n(x_1, x_2)$ — často pro ni použijeme pojmenování ,,originál" — za svůj obraz výraz $F_n(x_1, x_2)$, tuto skutečnost budeme se zřetelem ku zvyklostem technické praxe vyjadřovati kterýmkoli ze vztahů (záměny s označením matic se není třeba obávati)

$$F_n(x_1, x_2) = \mathsf{A}\{f_n(x_1, x_2)\},$$
$$f_n(x_1, x_2) = \mathsf{A}^{-1}\{F_n(x_1, x_2)\}. \tag{146}$$

Tato symbolika není sice zavedena v odborné literatuře matematické, technikům však prokáže bez nejmenších pochyb cenné služby a usnadní pochopení toho, co jest na věci podstatné a to svou alespoň formální analogií se zobrazovacími pochody technické praxe: Právě tak, jako vyjadřuje inženýr známý symbolický vztah

$$L\{f(t)\} = F(p) = p\int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

slovy: ,,Funkce $F(p)$ je Laplaceovým obrazem k originálu $f(t)$", může bez obav vyjádřiti relaci

$$\mathsf{A}\{f_n(x_1, x_2)\} = F_n(x_1, x_2)$$

rčením: ,,Výraz $F_n(x_1, x_2)$ jest Aronholdovým obrazem k binární formě $f_n(x_1, x_2)$."

Účelnost té skutečnosti, že je k dané binární formě (143) ve smyslu vztahů (144) přiřaděno více ,,obrazů", se objeví v dalších úvahách.

Příklad 27. Danou binární formu (143) s obrazem $a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ podrobme transformaci

$$x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2, \quad x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2. \tag{147}$$

Stanoviti symbolické koeficienty A_1, A_2 formy $\varphi_n(y_1, y_2)$ tímto způsobem z $f_n(x_1, x_2)$ vzniklé.

Nová forma bude míti tvar

$$\varphi_n(y_1, y_2) = f_n(\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2, \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu(\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2)^{n-\nu} (\gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2)^\nu$$

a její obraz $\Phi_n(y_1, y_2)$ dostaneme tím, že skutečné koeficienty $\bar{a}_\nu$ nahradíme podle rovnic (145) symbolickými a. Vychází postupně

$$\Phi_n(y_1, y_2) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_1^{n-\nu} a_2^\nu (\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2)^{n-\nu} \,.$$
$$. (\gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2)^\nu = [(\gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2)\, y_1 +$$
$$+ (\gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2)\, y_2]^n = (A_1y_1 + A_2y_2)^n = A_y{}^n,$$

takže máme vzorec

$$\Phi_n(y_1, y_2) = (A_1y_1 + A_2y_2)^n = A_y{}^n; \tag{148}$$

hledané symbolické koeficienty A_1, A_2 jsou pak dány vztahy

$$A_1 = \gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2, \; A_2 = \gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2. \tag{149}$$

Příklad 28. Pomocí symbolických koeficientů formy

$$f_2(x_1, x_2) = \bar{a}_0x_1{}^2 + 2\bar{a}_1x_1x_2 + \bar{a}_2x_2{}^2 \tag{150}$$

vyjádřiti výrazy

$$D = \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1{}^2, \tag{151}$$
$$E = (-\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_0 - \bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 - \bar{a}_2).$$

Napřed upozorníme na tuto důležitou skutečnost: Symbol pro výraz na příklad $\bar{a}_0{}^2\bar{a}_2$ musí ovšem býti toho druhu, abychom z něho mohli jednoznačně přejíti nazpět k výrazu původnímu. Mechanickým zobrazením podle (145) bychom dostali

$$\bar{a}_0{}^2\bar{a}_2 \doteqdot (a_1{}^2)^2\, a_2{}^2 = a_1{}^4a_2{}^2$$

a zmíněný zpáteční přechod by nebyl jednoznačně proveditelný. Píšeme-li totiž

$$a_1{}^4a_2{}^2 = a_1a_2 \,.\, a_1a_2 \,.\, a_1{}^2 = a_1{}^4 \,.\, a_2{}^2,$$

dostáváme dva různé „originály“:

$$\bar{a}_0\bar{a}_1^2, \ \bar{a}_0^2\bar{a}_2.$$

Této obtíži se vyhneme tak, že místo jediné dvojice symbolických koeficientů a_1, a_2 použijeme při zobrazování tolika různých dvojic, kolik má zobrazovaný výraz skutečných (to jest nikoli symbolických) faktorů $\bar{a}$. V našem případě $\bar{a}_0^2\bar{a}_2 = \bar{a}_0 \,.\, \bar{a}_0 \,.\, \bar{a}_2$ jsou takovéto faktory tři a proto použijeme tří dvojic symbolických součinitelů: $a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2$. Dostaneme tak

$$\bar{a}_0^2\bar{a}_2 \doteqdot a_1^2 b_1^2 c_2^2$$

a výše zmíněný zpětný přechod je nyní zcela jednoznačný.

Zobrazení výrazů (151) nečiní po této přípravě žádných obtíží. Pro D dostáváme buď

$$D = \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 \doteqdot a_1^2 b_2^2 - a_1 a_2 b_1 b_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, a_1 b_2,$$

nebo ekvivalentní výraz

$$D \doteqdot b_1^2 a_2^2 - b_1 b_2 a_1 a_2 = (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, a_2 b_1.$$

Sečtením obou těchto formulí dostáváme jednoduchý symbolický vztah

$$D = \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 \doteqdot \tfrac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \qquad (152)$$

Zobrazení veličiny E provedeme pomocí tří dvojic symbolických koeficientů a najdeme

$$E \doteqdot (-a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)(b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)(c_1^2 + c_1 c_2 - c_2^2).$$

Způsobem obdobným k tomu, jenž vedl k odvození vzorce (152), bychom dostali vedle uvedeného symbolického vztahu pro E ještě pět dalších s ním rovnocenných.

K zobrazení formy (143) použijme nyní dvou řad symbolických součinitelů, takže jest

$$\mathsf{A}\{f_n(x_1, x_2)\} = a_x^n = b_x^n$$

a transformujme ji lineární substitucí (147). Obraz $\Phi_n(y_1, y_2)$ transformované formy $\varphi_n(y_1, y_2)$ pak bude podle výsledku př. 27

$$\Phi_n(y_1, y_2) = A_y{}^n = B_y{}^n,$$

kde jest

$$A_1 = \gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2,\ A_2 = \gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2;$$
$$B_1 = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2,\ B_2 = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2;$$

platí tedy (viz pravidla o násobení determinantů v prvém svazku) vztah

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12} \\ \gamma_{12}, & \gamma_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} = \Gamma . \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} .$$

Zavedeme-li často používanou zkratku

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2 \\ n_1, & n_2 \end{vmatrix} = (mn), \tag{153}$$

nabývá předchozí rovnice tvaru

$$(AB) = \Gamma . (ab); \tag{154}$$

při tom ovšem značí Γ modul transformace (147).

Symbolické koeficienty a, b binární formy (143) souvisí tedy se symbolickými součiniteli A, B formy vzniklé z ní transformací (147) vztahem (154).

Pomocí této skutečnosti najdeme snadno důležitý invariant dané formy (143). Jest jím výraz, který má za svůj symbol mocninu

$$(ab)^n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a_1{}^{n-\nu} a_2{}^\nu b_1{}^\nu b_2{}^{n-\nu},$$

t. j. výraz

$$I_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{n-\nu}; \tag{155}$$

podle vztahu (154) je to invariant váhy n vůči transformaci (147).

Pro lichá n jest $I_n = 0$, jak ukazuje tento jednoduchý výpočet:

$$I_{2m+1} = \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=m+1}^{2m+1} (-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} -$$

$$- \sum_{\varrho=0}^{m}(-1)^\varrho \binom{2m+1}{2m+1-\varrho} \bar{a}_{2m+1-\varrho} \bar{a}_\varrho = 0;$$

proto představuje výraz I_n skutečnou invariantní funkci součinitelů $\bar{a}$ dané formy (143) jen pro případ, že jest tato sudého stupně. Tak dostáváme pro

$$\begin{aligned} n = 2&: \quad I_2 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2), \\ n = 4&: \quad I_4 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_4 - 4\bar{a}_1\bar{a}_3 + 3\bar{a}_2^2), \\ n = 6&: \quad I_6 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_6 - 6\bar{a}_1\bar{a}_5 + 15\bar{a}_2\bar{a}_4 - 10\bar{a}_3^2). \end{aligned} \tag{156}$$

Ježto zprostředkuje transformace (147) rovnost mezi symbolickými výrazy

$$A_y = A_1 y_1 + A_2 y_2, \quad a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

tedy

$$A_y = a_x,$$

můžeme vzhledem k (154) psáti

$$(AB)^p A_y^q B_y^r = \Gamma^p (ab)^p a_x^q b_x^r. \tag{157}$$

Pro

$$q = r = n - p$$

jest pravá strana vztahu (157) symbolem pro jistou funkci $h(x_1, x_2; \bar{a})$ proměnných x_1, x_2 a skutečných koeficientů $\bar{a}$ původní formy $f_n(x_1, x_2)$, jeho levá strana pak symbolem pro funkci $h(y_1, y_2; \bar{A})$ proměnných y_1, y_2 a koeficientů $\bar{A}$ transformované formy $\varphi_n(y_1, y_2)$. Plyne tudíž ze vztahu (157) rovnice

$$h(y_1, y_2; \bar{A}) = \Gamma^p \,.\, h(x_1, x_2; \bar{a}) \tag{158}$$

a funkci $h(x_1, x_2; \bar{a})$ nazýváme kovariantem formy (143) vůči transformaci (147) a to kovariantem váhy p.

Tak jest ku příkladu výraz

$$(ab)^2 a_x b_x$$

symbolem pro kovariant váhy 1 u formy $f_3(x_1, x_2)$. Skutečný výraz pro tento kovariant dostaneme přechodem k původním součinitelům $\bar{a}$; vychází

$$2[(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)\, x_1^2 + (\bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2)\, x_1x_2 + (\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2)\, x_2^2]. \tag{159}$$

Analogicky jest

$$(ab)^2\, (ac)\, b_x c_x^2$$

symbolický výraz pro kovariant váhy 3 téže formy $f_3(x_1, x_2)$. Jeho skutečná hodnota jest

$$\begin{aligned}(3\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_0^2\bar{a}_3 - 2\bar{a}_1^3)\, x_1^3 - \\ - 3(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_3 - 2\bar{a}_0\bar{a}_2^2 + \bar{a}_1^2\bar{a}_2)\, x_1^2x_2 + \\ + 3(\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_3 + \bar{a}_1\bar{a}_2^2 - 2\bar{a}_1^2\bar{a}_3)\, x_1x_2^2 + \\ + (\bar{a}_0\bar{a}_3^2 - 3\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 + 2\bar{a}_2^3)\, x_2^3.\end{aligned} \tag{160}$$

Už z těchto několika ukázek je patrna plodnost a účelnost symbolického počítání Aronholdova. Dalším rozvedením a důslednou aplikací této symboliky lze dokonale vybudovati celou theorii invariantů (podrobnosti nalezne čtenář v knize P. Gordan, Invariantentheorie).