I. část

NĚKOLIK ÚLOH ÚVODEM

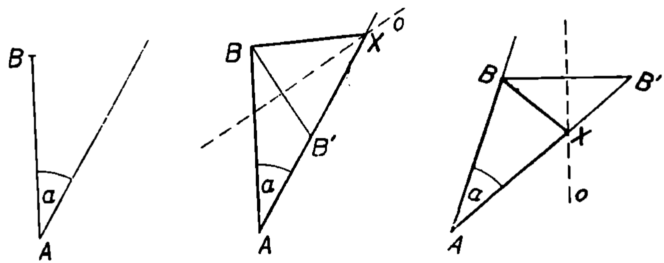
●

Ve škole se učíte řešit konstruktivní úlohy. Jsou to ty úlohy, jež vyžadují sestrojení jistého útvaru, který vyhovuje daným podmínkám. Řešení úlohy zpravidla zakončujete grafickým sestrojením hledaného útvaru. Uvědomili jste si však, že v praktickém životě nebývá cílem jen nakreslení hledaného útvaru, ale především zjištění jeho rozměrů a polohy? Proto také praktik potřebuje řešení konstruktivní úlohy především tehdy, chce-li bez nákladného nebo zdlouhavého experimentování zjistit rozměry a polohu tělesa, které je třeba umístit podle daných podmínek. Vezměme si příklad, ve kterém jde o zjištění délky cesty.

Úloha 1. *Jirka s Milanem se vypravili na výlet. Do stanice* A *jeli vlakem, od ní se vydali pěšky přímo k rozhledně na obzoru. Šli dlouho lesem. Když vyšli z lesa ven, viděli, že se žene bouře. Chtěli se vrátit, ale člověk, kterého potkali, jim ukázal směr do vesnice* B, *kam je o tři kilometry blíže než na stanici* A. *Před vesnicí si Milan všiml směrové tabule, na níž bylo udáno, že vzdálenost z* B *do* A *je osm kilometrů. Zpátky na stanici* A *se svezli autobusem po přímé silnici. Doma se nemohli dohodnout, kolik kilometrů vlastně ušli. Jak byste je rozsoudili, kdybyste odhadli, že jejich cesta od stanice* A *k rozhledně se odchylovala od přímé silnice z* A *do B o 30°?*

Jistě vás napadne nakreslit si ve zvoleném měřítku plánek. Dospějete asi k obr. 1a, kde α označuje úhel o velikosti

30°. Nemůžete však zakreslit bod X, který by odpovídal místu, v němž změnili směr. Přitom je nutné znát bod X, chceme-li odměřit z náčrtku délku úseček AX, XB. Musíme tedy řešit úlohu na sestrojení trojúhelníka ABX. Co o něm víme? Je zřejmě $AB = 8$, $\alpha = 30^\circ$, $AX - BX = 3$.*) Formulujme si příslušnou geometrickou úlohu:



Obr. 1 a, b, c

Sestrojte trojúhelník ABX, je-li dáno $AB = 8$, $\sphericalangle BAX = 30^\circ$, $AX - BX = 3$.

Je tedy dána velikost strany, úhlu k ní přilehlého a rozdílu dvou dalších stran trojúhelníka. Postupujme tak, jak jste zvyklí řešit konstruktivní úlohu. Nakresleme si libovolný trojúhelník ABX (obr. 1b). Vyznačme si v něm na polopřímce AX úsečku $AB' = AX - BX$. Trojúhelník ABB' lze sestrojit, protože známe jeho úhel BAB' a strany ležící na jeho ramenech. Jak sestrojíme bod X, střed otáčení, které převedlo bod B v bod B'? Zřejmě jako průsečík osy úsečky BB' a přímky AB'. Proveďte si konstrukci bodu X sami a rozhodněte spor Jirky s Milanem.

*) Někoho z vás možná napadlo, že je vhodné užít hyperboly s ohnisky A, B. Je to možné, ale málo přesné a zdlouhavé.

Protože úloha je vzata ze skutečnosti, kde místo X opravdu existovalo, má jistě řešení. Dosáhli jsme cíle, pokud jde o zodpovězení otázky v úloze. Zamysleme se však nad matematickou úlohou, ke které jsme došli. Co myslíte, má úloha vždy řešení, ať zvolíme úsečky AB, $AX-BX$ a úhel α jakkoliv?

Provedeme diskusi, řeknete si jistě. Sestrojení trojúhelníku ABB' je jednoznačné*) a vždy možné. Osu o úsečky BB' lze jistě také sestrojit jednoznačně. Nejistá je pouze existence bodu X. Přímka o protne přímku AB' vždy, pokud není $BB' \perp AB'$, tj. $AB' = AB . \cos \alpha$. Je-li $AB' \neq$ $\neq AB . \cos \alpha$, existuje vždy právě jeden průsečík X přímek o a AB'.

Na obr. 1c je zobrazen trojúhelník ABX sestrojený podle postupu, který jsme odvodili. Je zřejmě $\sphericalangle BAX = \alpha$, AB má danou velikost, ale úsečka AB' není rozdílem úseček AX, BX, ale jejich součtem. Sestrojili jsme sice *trojúhelník* ABX, ale ten *nemá požadované vlastnosti*.

Na co jsme zapomněli při řešení? Vynechali jsme zřejmě důkaz správnosti konstrukce. Vidíte, jak ošidná může být fráze „důkaz plyne z rozboru"! Buďte si vědomi toho, že důkaz správnosti konstrukce je ve skutečnosti nejdůležitější částí řešení. Ověřuje, že konstrukce, kterou jsme odhadli podle rozboru, vede k cíli, tj. sestrojení útvaru, který má požadované vlastnosti. Je obdobou zkoušky, kterou provádíte při řešení algebraických úloh.

Vraťme se k obr. 1b, c. K tomu, aby úsečka AB' byla shodná s rozdílem $AX-BX$, je zřejmě nezbytné, aby bod X ležel za bodem B' na polopřímce AB'. Zdůvodněte, že tento případ nastane právě tehdy, když je úhel $AB'B$ tupý, tj. $AX-BX < AB \cos \alpha$.

*) Trojúhelníků ABB' lze sestrojit nekonečně mnoho, jsou však všechny navzájem shodné.

Rozřešte samostatně podle poznatků z řešení úlohy 1 následující úlohu.

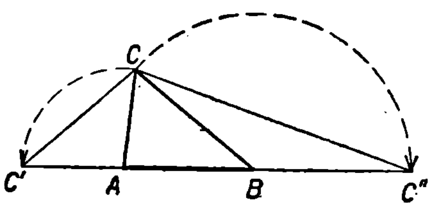
Úloha 2. *Letadlo přelétlo z letiště A na letiště B ležící 200 km severněji. Pilot změnil směr letu pouze jednou, z letiště A letěl po polopřímce svírající s polopřímkou AB úhel o velikosti α. Podle spotřeby pohonných hmot bylo zjištěno, že uletěl 300 km. Zjistěte vzdálenost letišť A, B od místa X, nad kterým letadlo změnilo směr letu.*

Úloha vede zřejmě ke konstrukci trojúhelníka ABX, je-li známa jeho strana AB, $\sphericalangle XAB = \alpha$ a součet úseček AX, BX. Zakreslete si pro zajímavost na svém náčrtku několik bodů X, nabývá-li α různých hodnot.

Ukažme si nyní, že je užitečné pokusit se při řešení geometrické úlohy o nalezení praktického problému, který vede k uvažované úloze.

Úloha 3. *Jsou dány úsečky p, v_c a úhel α. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí: $AB + BC + CA = p$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, vzdálenost bodu C od přímky AB je rovna v_c.*

Řešení úlohy možná znáte. Provádí se obvykle tak, že se úsečky AC, BC otočí do poloh AC', BC'' na přímce AB



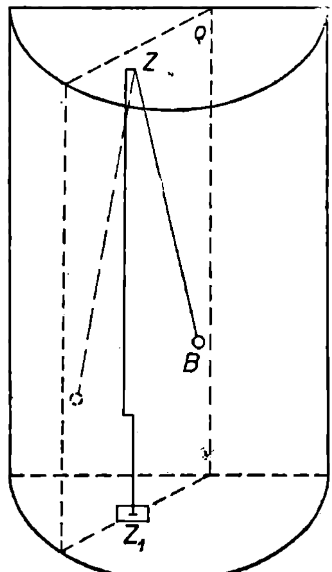
Obr. 2

(obr. 2). V trojúhelníku $CC'C''$ je $C'C'' = p$, $\sphericalangle CC'C'' = \frac{\alpha}{2}$, jeho výška je rovna v_c. Tento trojúhelník dovedete sestrojit; body A, B pak zjistíte pomocí os úseček CC', CC''.

Jestliže se však nepustíte ihned do mechanického řešení úlohy, ale představíte si, kdy by bylo třeba takovou úlohu řešit, přijdete na jednodušší řešení.

Takovým problémem by bylo postavení trojúhelníkové ohrádky, máte-li k dispozici prkno, které je třeba rozřezat na takové tři díly, aby každý z nich byl stranou trojúhelníka s prvky α, v_c. V praxi bychom si jistě nejprve vytyčili úhel α a na jeho rameni bod C, který má od druhého ramene vzdálenost v_c. Vidíte, že tím máte vyznačenu stranu AC, odřízněte ji z prkna. Nyní zbývá problém jednodušší: *sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu $b = AC$, úhel α a úsečku shodnou se součtem dvou zbývajících stran.* Tuto úlohu již umíte řešit (úloha 2).

Proveďte si úplné řešení úlohy; víte, že úloha 2 skrývá úskalí v důkazu konstrukce. Z úlohy 3 si můžete odnést poučení, že bývá mnohdy užitečné



Obr. 3

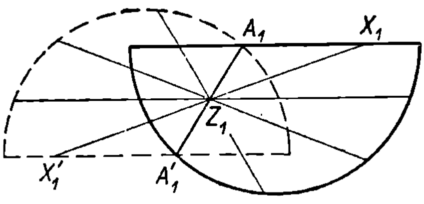
umístit při řešení nepolohových úloh úhel. Vyhnete se tak jeho sestrojování v průběhu konstrukce, často i zjednodušíte řešení.

V úlohách 1 až 3 jsme používali zobrazení jen minimálně. Ukažme si nyní dvě úlohy, ve kterých má zobrazení podstatný význam.

Úloha 4. *V uzavřené skleněné skříni, která má tvar půlválce* (obr. 3), *je na stojanu zavěšeno matematické kyvadlo. Bod závěsu kyvadla je nad bodem Z_1 podlahy skříně. Stanovte rovinu, v níž se kyvadlo pohybuje v případě, že se hmotný bod v krajních polohách kyvu dotýká stěn skříně.* *)

Řešení. Sestrojme si půdorys skříně a v něm vyznačme kolmý průmět Z_1 bodu závěsu kyvadla do roviny podlahy (obr. 4). Polohy hmotného bodu B při maximálních výchylkách označme A, A', jejich průměty A_1, A'_1. Je zřejmě $Z_1 A_1 = Z_1 A'_1$. Řešení naší úlohy vyžaduje řešení této geometrické úlohy:

Je dán půlkruh a jeho vnitřní bod Z_1. Sestrojte úsečku $A_1A'_1$ tak, aby bod Z_1 byl jejím středem a body A_1, A'_1 ležely na obvodu půlkruhu.



Obr. 4

*) Hmotný bod se neodráží od stěn, ale vrací se od nich samovolně po dotyku bez rázu.

Jak by postupoval praktik, který by se nechtěl „zdržovat“ geometrickým řešením? Nepochybně by zkoušel, odhadl by přibližnou polohu hledané roviny kyvu, rozkýval kyvadlo a sledoval, zda se hmotný bod dotkne stěn. Myslíte, že to je opravdu nejlepší metoda? Vzhledem k možnosti rozbití skla jistě není nejvhodnější.

Při geometrickém řešení můžeme také začít experimentem. Zvolme bod X_1 obvodu půlkruhu, považujme jej za půdorys krajní polohy hmotného bodu B a přiřaďme mu bod X'_1 souměrně sdružený s bodem X podle středu Z_1. Na obr. 4 jsou přiřazeny tímto způsobem souměrně sdružené body většímu počtu neoznačených bodů obvodu kruhu. Co vytvářejí tyto souměrně sdružené body? Víte, že to je opět obvod půlkruhu shodného s původním, protože popsaným přiřazením sestrojujeme vlastně obraz daného půlkruhu v souměrnosti podle středu Z_1.

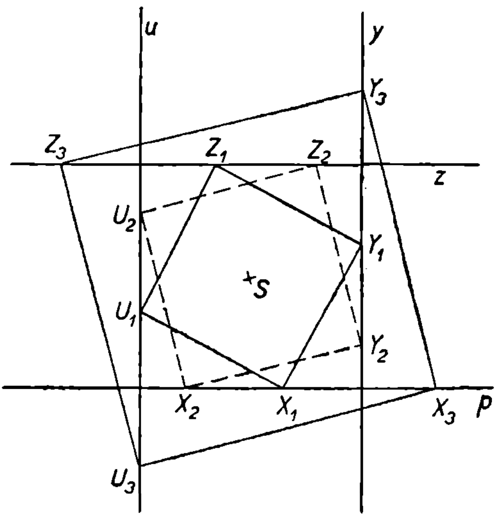
Obraz obvodu půlkruhu můžete snadno sestrojit, zobrazíte-li nejprve střed kruhu a koncový bod jeho průměru. Hledaný bod A'_1 je společným bodem obvodu kruhu a jeho obrazu v souměrnosti podle středu Z_1. Dokončete sami řešení, nezapomeňte na důkaz správnosti konstrukce. O jakou vlastnost středové souměrnosti se tento důkaz opírá? Kolik může mít úloha řešení?

Při řešení geometrické úlohy vyvozené z úlohy 4 bylo třeba sestrojit dva neznámé body A_1, A_1'. Využili jsme předpisu, který přiřazuje neznámému bodu A_1 neznámý bod A'_1. Na řadě úloh poznáte, že tohoto obratu užíváme velmi často.

Dalším typem úloh, při jejichž řešení je vhodné užít zobrazení, jsou úlohy na vyšetření geometrických míst bodů. Takový postup je přirozený zvláště v těch případech, kdy předpis, podle kterého můžeme sestrojit každý bod hledané množiny, je jednoduchý a představuje známé zobrazení.

Úloha 5. *Je dána množina čtverců $XYZU$, jež mají společný střed S a jejichž vrchol X probíhá danou přímku. Vyšetřete, které útvary jsou množinami bodů Y, Z, U.*

Na obr. 5 jsou nakresleny tři čtverce dané množiny, smysl obíhání vrcholů X, Y, Z, U je vždy kladný. Nedívejte se jen na hotový obrázek, ale sestrojte si také několik čtverců. Uvědomíte si jistě, že když zvolíte bod X na p, sestrojíte vždy bod Z jako bod středově souměrný s X podle S. Každému vrcholu X čtverce lze proto přiřadit bod Z jako obraz bodu X ve středové souměrnosti. Z toho plyne, že každý bod Z leží na přímce z souměrně sdružené s přímkou p podle středu S. Každý bod přímky z je také



Obr. 5

vrcholem čtverce, jehož protější vrchol leží na p. Platí proto, že *množinou bodů Z je přímka* $z \parallel p$.

Jak přiřadíme bodu X vrchol Y příslušného čtverce? Zřejmě otočíme bod X kolem S o $90°$ v kladném smyslu. Z vlastností otáčení plyne, že *množinou bodů Y je přímka y kolmá k p*. Obdobně stanovíme množinu bodů U jako obraz přímky p v otočení o $90°$ v záporném smyslu. Přímky p, y, z, u jsou na obr. 5 výrazně vytaženy.

Při řešení úloh 4 a 5 jsme se přesvědčili, že je vhodné vyhledávat takové vztahy mezi význačnými body útvarů, které lze chápat jako důsledek jistého zobrazení. Takový přístup k řešení úloh odpovídá modernímu pojetí geometrie jako vědy zkoumající, které vlastnosti útvarů se nemění při určitých druzích transformací (zobrazení).

Cvičení

1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost jeho úhlu β, výšky v_A a součtu $BC + CS + SA$ úseček trojúhelníka (bod S je středem strany AB).

2. Zvolte si v úloze 4 skříň ve tvaru kvádru a řešte stejnou úlohu.

3. Je dána množina pravidelných šestiúhelníků $ABCDEF$ se společným vrcholem A. Víme, že množinou bodů C je kružnice neprocházející bodem A. Vyšetřete, které útvary jsou množinami vrcholů B, D, E, F šestiúhelníků.

[Popište předpisy, podle kterých sestrojíte jednotlivé vrcholy šestiúhelníka, znáte-li jeho vrchol A a zvolíte-li jeho vrchol C na dané kružnici. Užijte také otočení a stejnolehlosti.]