Konvexní útvary

Kapitola 1. Zkoumání konvexity útvaru

In: Jan Vyšín (author): Konvexní útvary. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 5–16.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403502

Kapitola 1.

ZKOUMÁNÍ KONVEXITY ÚTVARU

Představte si jezero s příkrými břehy, jehož hladina má takový tvar, že můžeme doplavat z kteréhokoli místa na jezeře po přímé trati na kterékoli jiné místo.

Představte si tovární halu nepravidelného půdorysu, která má tu vlastnost, že můžeme kterákoli dvě místa v ní spojit napjatým drátem.

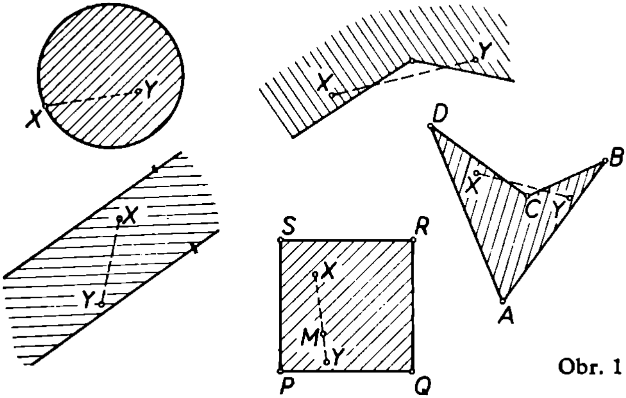
Tyto dvě představy nám budou východiskem pro definici konvexního útvaru. Rovná hladina jezera představuje útvar v rovině, tj. množinu bodů roviny; tovární hala představuje útvar v prostoru, tj. množinu bodů v prostoru. Přímá trať spojující dvě místa nebo napjatý drát představuje úsečku. Charakteristická vlastnost hladiny jezera i tovární haly je zřejmě vyjádřena touto matematickou definicí:

Geometrický útvar U (ležící na přímce, v rovině nebo v prostoru) nazýváme *konvexním*, jestliže úsečka spojující kterékoli jeho dva body náleží útvaru U.

Přitom slovem „útvar" rozumíme jakoukoli množinu bodů; výrok „úsečka náleží útvaru U" znamená, že všecky body této úsečky náležejí útvaru U.

Předchozí definici ještě doplníme: mezi konvexní útvary budeme počítat i útvar skládající se z jediného bodu; brzy uvidíte, proč jsme vyslovili tento doplněk definice.

Konvexní útvary tvoří důležitou skupinu geometrických útvarů, které mají poměrně jednoduché vlastnosti. Většina obrazců, těles, s nimiž se ve škole i v praxi setkáváte, jsou konvexní útvary. Konvexní útvar může být částí přímky (např. úsečka), roviny (čtverec) nebo prostoru (krychle). V této knížce budeme zkoumat hlavně konvexní útvary v rovině; příležitostně si však všimneme i konvexních útvarů na přímce a v prostoru.



Obr. 1

U většiny jednoduchých útvarů poznáme z názoru, zda jsou konvexní či nikoli. Tak na obr. 1 vidíme pět rovinných útvarů: je to kruh (s obvodem), pás roviny (i s hraničními přímkami), tzv. nevypuklý úhel (i s rameny), jistý čtyřúhelník $ABCD$ a konečně čtverec $PQRS$ (s obvodem), z něhož byl vynechán bod M. Názor nám napovídá, že první dva útvary jsou konvexní, zbývající tři nekonvexní; na obrázcích vidíme v těchto případech vždy úsečku XY, jejíž krajní body X, Y náležejí danému útvaru, ale některý bod úsečky XY tomuto útvaru nenáleží.

Všimněte si ještě, že první, čtvrtý a pátý útvar jsou *omezené*, tj. dají se umístit do vhodně zvoleného kruhu;

naproti tomu druhý a třetí útvar tuto vlastnost nemají, proto se nazývají *neomezené*. Je tedy vidět, že konvexní i nekonvexní útvar může být jak omezený, tak neomezený.

K odůvodnění toho, co jsme si právě ukázali, se ještě vrátíme.

Nejjednodušší konvexní útvary jsou *prostor*, *rovina* a *přímka*. Přijmeme za správné (bez důkazu), že také *poloprostor i vnitřek poloprostoru* (tj. poloprostor bez hraniční roviny) *jsou konvexní útvary*.

A nyní uvedeme jednu větu, která umožňuje tvořit ze známých konvexních útvarů další; tato věta zní:

I. *Mají-li dva konvexní útvary společný aspoň jeden bod, pak je jejich průnik také konvexní útvar.*

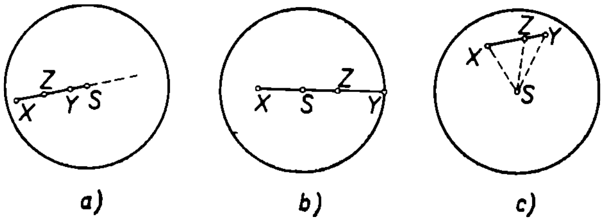
Co znamená v matematice slovo „průnik"? Všecky společné prvky dvou množin tvoří novou množinu, zvanou průnik. V našem případě jde o množinu bodů společných dvěma konvexním útvarům U_1, U_2; jejich průnik budeme zapisovat $U_1 \cap U_2$

Příklad 1. a) Máme dokázat větu Ib). Pomocí věty I máme odůvodnit, že polorovina, vnitřek poloroviny, polopřímka, vnitřek polopřímky, dutý úhel (i s rameny), trojúhelník (s obvodem) jsou konvexní útvary.

Řešení. a) Obsahuje-li množina $U_1 \cap U_2$ jediný bod, je konvexní podle doplňku definice konvexního útvaru. Obsahuje-li množina $U_1 \cap U_2$ aspoň dva různé body X, Y, pak libovolný bod Z úsečky XY náleží jednak do U_1 (neboť U_1 je konvexní), jednak do U_2 (neboť U_2 je konvexní). Proto náleží Z i do útvaru $U_1 \cap U_2$, tj. celá úsečka XY náleží do $U_1 \cap U_2$ a tento průnik je tedy konvexní útvar.

b) Polorovina je průnik poloprostoru a roviny, tj. dvou konvexních útvarů. Vnitřek poloprostoru je zřejmě konvexní útvar. Vnitřek poloroviny je průnik vnitřku poloprostoru a roviny.

Polopřímka (vnitřek polopřímky) je průnik poloprostoru (vnitřku poloprostoru) a přímky.



Obr. 2

Dutý úhel $\sphericalangle ABC$ je průnik polorovin ABC a BCA. Trojúhelník ABC je průnik dutého úhlu $\sphericalangle ABC$ a poloroviny ACB.

Příklad 2. Máme dokázat, že kruh i vnitřek kruhu jsou konvexní útvary.

Řešení. Dokažme nejprve, že kruh (i s obvodem) je konvexní útvar. Je dán kruh o středu S a poloměru r. Zvolíme dva různé body X, Y tohoto kruhu; každý z nich může náležet buď obvodu kruhu nebo jeho vnitřku. Mohou nastat v podstatě tři případy, které jsou načrtnuty na obr. 2abc (tyto případy se týkají vzájemné polohy bodů S, X, Y — popište je!). V každém z těchto tří případů máme dokázat, že libovolný bod Z úsečky XY náleží kruhu, tj., že platí $SZ \leqq r$. Důkaz v situacích z obr. 2ab ponecháváme čtenářům. Vznikne-li však trojúhelník SXY jako na obr. 2c, pak užijeme této planimetrické věty:

Každá příčka SZ v trojúhelníku SXY, kde Z je bod mezi X, Y, je menší než delší ze stran SX, SY. Z této věty vyplývá nerovnost $SZ < r$ a tím je konvexita kruhu dokázána.

Odůvodněte obdobně sami, že vnitřek kruhu je konvexní útvar!

Konvexitu kruhu však můžeme dokázat i jinak použitím věty I.

Příklad 3. Je dán kruh K se středem *S;* přímka *t* je jeho libovolná tečna. Máme zjistit, který útvar je vyplněn všemi společnými body nekonečně mnoha polorovin *tS*.

Řešení. Názor nám napovídá, že hledaný útvar U je daný kruh K. Abychom dokázali toto tvrzení, musíme odůvodnit dvě věci:

a) že každý bod kruhu K náleží útvaru U, neboli že kruh K je částí útvaru U — zápis $K \subset U$;

b) že každý bod útvaru U náleží kruhu K, neboli že útvar U je částí množiny K — zápis $U \subset K$.

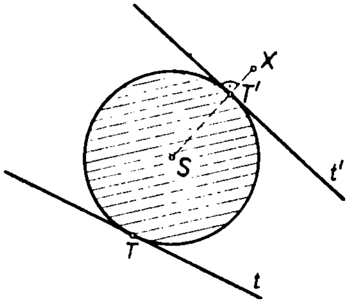
Vztah $K \subset U$ je zřejmý, neboť kruh K leží v každé polorovině *tS;* proto každý bod kruhu K je společným bodem všech polorovin *tS*.

Vztah $U \subset K$ odůvodníme takto: zvolíme libovolný bod, který nenáleží kruhu K (obr. 3) a dokážeme, že existuje aspoň jedna z polorovin *tS*, ve které *X* neleží. Tato polorovina *t'S* je sestrojena na obr. 3; tím je řešení příkladu 3 provedeno.

Ve větě I jsme hovořili o průniku dvou útvarů jako o množině všech bodů společných těmto dvěma útvarům. Příklad 3 ukazuje, že můžeme utvořit průnik více útvarů, dokonce průnik nekonečně mnoha útvarů. V příkladě 3 je kruh K průnikem všech polorovin *tS*.

Větu I můžeme pak zobecnit takto:

I'. *Mají-li všecky útvary jisté množiny konvexních útvarů společný aspoň jeden bod, pak je průnik všech těchto útvarů konvexní útvar.*



Obr. 3

Úloha 1. Dokažte větu I' týmž způsobem jako větu I. Pomocí věty I' a výsledku příkladu 3 odůvodněte znovu, že kruh je konvexní útvar.

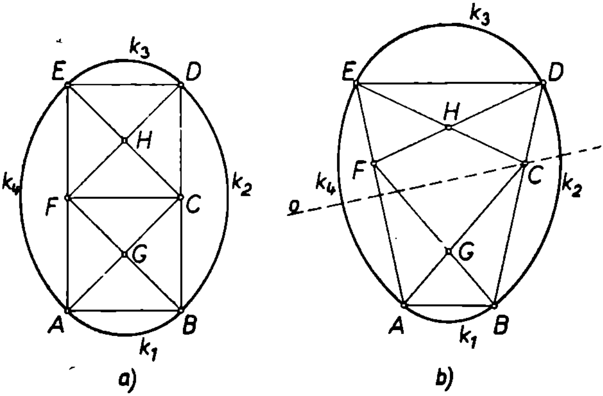
Úloha 2. a) Útvar U_1 se skládá z vnitřku kruhu a pěti bodů na jeho obvodu. Zjistěte, zda útvar U_1 je konvexní.

b) Útvar U_2 se skládá z vnitřku čtverce a ze dvou jeho stran (i s vrcholy). Zjistěte, zda je konvexní.

c) Útvar U_3 se skládá z vnitřku trojúhelníka a ze dvou bodů jeho obvodu. Zjistěte, zda je konvexní.

Úloha 3.* a) Jsou dány dva čtverce *ABCF*, *FCDE* (viz obr. 4a); oblouky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic mají po řadě středy *G*, *F*, *H*, *C*. Dokažte, že se tyto kružnice po dvou dotýkají v bodech *A*, *B*, *D*, *E* a že čára složená z oblouků k_1, k_2, k_3, k_4 omezuje konvexní útvar. (Postupujte tak jako v úloze 1.)

b) Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABDE$ (viz obr. 4b), C je bod ramene BD, který leží na ose o ramene AE; obdobně F je bod ramene AE, který leží na ose ramene BD. Ob-



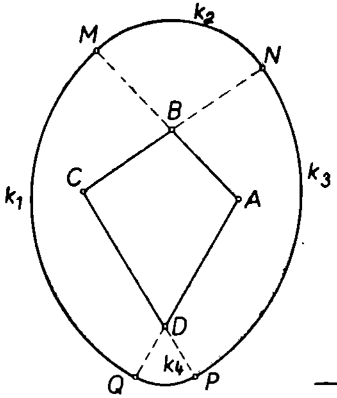
Obr. 4

louky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic mají po řadě středy G, F, H, C. Rozřešte obdobnou úlohu, jako je úloha 3a.

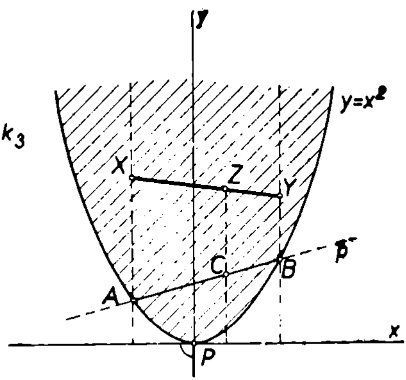
Čára na obr. 4a je souměrná podle dvou os (kterých?) a podle středu. Čára na obr. 4b je souměrná podle jediné osy. Obě tyto čáry jsou tzv. *ovály*.

Úloha 4.* Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $AB + CD = AD + BC$ (tzv. *tečnový*). Sestrojte oblouky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic se středy A, B, C, D tak, aby se dotýkaly v bodech M, N, P, Q jako v obr. 5. Zjistěte, zda vzniklá čára omezuje konvexní útvar. Tato čára nemusí být souměrná podle žádné osy ani podle žádného středu.

Příklad 4. V soustavě pravoúhlých souřadnic je dána množina U všech bodů $[x, y]$, pro které platí $y \geqq x^2$. Máme dokázat, že U je konvexní útvar.



Obr. 5



Obr. 6

Řešení. Graf funkce $y = x^2$ je — jak známo — parabola, jejíž vrchol je v počátku souřadnic a která se otvírá ve smyslu kladné poloosy y (obr. 6). Množina U se skládá z bodů paraboly a z bodů ležících „nad křivkou". Názor nasvědčuje tomu, že je tato množina konvexní útvar; pochybnosti ovšem můžeme mít o dvojicích bodů velmi vzdálených od vrcholu. Množina U je totiž neomezená a nemůžeme ji celou přehlédnout.

Deduktivní důkaz konvexnosti množiny U provedeme takto (obr. 6): Zvolíme libovolné dva body X, Y z U o souřadnicích $X = [x_1, y_1]$, $Y = [x_2, y_2]$; je tedy $y_1 \geqq x_1^2$, $y_2 \geqq x_2^2$. Sestrojíme úsečku AB, kde $A = [x_1, x_1^2]$, $B = [x_2, x_2^2]$; A, B jsou body paraboly ležící na rovnoběžkách s osou y, které procházejí po řadě body X, Y. Dokážeme-li, že každý bod C úsečky AB náleží útvaru U, platí to i o každém bodu Z úsečky XY; to si sami snadno odůvodněte s pomocí obr. 6.

Bod C má souřadnici x_3, pro niž platí $x_1 \leqq x_3 \leqq x_2$ (předpokládáme, že je $x_1 < x_2$). Souřadnici y bodu C vypočteme z rovnice přímky $AB \equiv p$. Tato rovnice má tvar

$$ax + by + c = 0;$$

koeficienty a, b, c určíme z podmínek

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_1^2 + c &= 0 \text{ (bod } A \text{ leží na } p), \\ ax_2 + bx_2^2 + c &= 0 \text{ (bod } B \text{ leží na } p). \end{aligned} \tag{1}$$

Odečtením obou rovnic (1) vyjde

$$a(x_2 - x_1) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Dělíme-li kladným číslem $x_2 - x_1$, dostaneme

$$a = -b(x_2 + x_1). \tag{2}$$

Dosadíme z (2) do první rovnice (1) a vyjádříme c:

$$c = bx_1x_2.$$

Rovnice přímky p tedy zní (dělíme číslem b, neboť je $b \neq 0$)

$$y = (x_1 + x_2)\,x - x_1\,x_2$$

a bod C má souřadnice

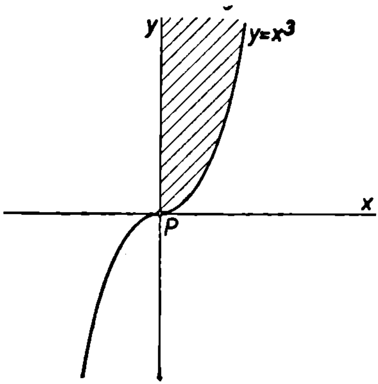
$$[x_3;\ (x_1 + x_2)\,x_3 - x_1\,x_2].$$

Abychom zjistili, zda bod C náleží útvaru U, vypočteme pro jeho souřadnice rozdíl $y - x^2$; vyjde

$$(x_1 + x_2)\,x_3 - x_1x_2 - x_3^2 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Oba činitelé na pravé straně jsou nezáporná čísla, neboť je $x_1 \leqq x_3 \leqq x_2$; platí tedy pro bod C nerovnost $y - x^2 \geqq 0$ neboli $y \geqq x^2$ a bod C náleží útvaru U.

Tím je důkaz úplně proveden.



Obr. 7

Úloha 5. Útvar U je množina všech bodů, jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ splňují nerovnosti $x > 0, y \geqq \dfrac{1}{x}$. Zjistěte, zda je útvar U konvexní.

Útvar je část roviny ležící nad jednou větví rovnoosé hyperboly; důkaz konvexity provedete obdobně jako u příkladu 4.

Úloha 6. Útvar U je množina všech bodů, jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ splňují nerovnosti

$x \geqq 0$, $y \geqq x^3$. Zjistěte, zda je útvar U konvexní. Na obr. 7 je narýsována křivka o rovnici $y = x^3$; útvar U je vyšrafovaná neomezená část roviny. Při důkazu konvexity použijte opět postupu z příkladu 4.

Úloha 7.* Je dána přímka p a na ní bod F. Útvar U je množina všech bodů X roviny, pro jejichž vzdálenosti x_1, x_2 od přímky p a od bodu F platí $x_1 + x_2 \leqq 1$.
Načrtněte útvar U a zjistěte, zda je konvexní. Lze zjistit, že útvar U je omezen dvěma oblouky shodných parabol. Důkaz konvexity můžete provést tak, že použijete výsledku příkladu 4 a věty I.

Úloha 8.* Načrtněte graf funkce $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Udejte souřadnice všech bodů vyplňujících část U roviny omezenou grafem a osou x. Vyslovte domněnku, zda je útvar U konvexní nebo nikoli. Dokažte vyslovenou domněnku! (K důkazu, že útvar není konvexní, stačí najít jednu dvojici takových jeho bodů A, B, že úsečka AB nenáleží danému útvaru. Zvolte za bod A v našem případě bod [0, 1].)

Úloha 9. Dokažte, že mnohoúhelník *tětivový*, tj. mnohoúhelník, jehož všecky vrcholy leží na kružnici, je konvexní útvar. K mnohoúhelníku počítejte i body jeho obvodu. Při důkazu použijte přímek, v nichž leží strany mnohoúhelníka.

Úloha 10. Dokažte, že každý hranol (kolmý nebo kosý), jehož podstavou je konvexní mnohoúhelník, je konvexní útvar. Přitom body povrchu počítejte k hranolu.

Úloha 11. Dokažte, že čtyřstěn i rotační kužel jsou konvexní útvary. [Návod: Vytvořte hranol, čtyřstěn i kužel jako průniky poloprostorů a použijte věty I.]

Úloha 12. Dokažte, že koule, vnitřek koule, kulová úseč a vrstva jsou konvexní útvary. Použijte obdobného postupu jako u kruhu.