Kapitola 5.

# DĚLENÍ KONVEXNÍHO ÚTVARU NA ČÁSTI TÉHOŽ OBSAHU

V této kapitole se budeme zabývat výhradně omezenými dvojrozměrnými útvary, většinou konvexními. První úloha, kterou budeme řešit, je rozdělení útvaru přímkou na dvě části téhož obsahu. Začneme dvěma příklady.

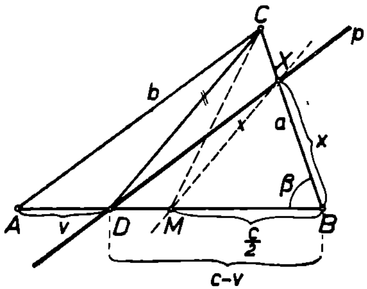
**Příklad 17.** Je dán trojúhelník $ABC$ a mezi vrcholy $A$, $B$ bod $D$. Bodem $D$ máme vést přímku $p$ tak, aby rozdělila daný trojúhelník na dva obrazce téhož obsahu.

*Řešení.* Označíme strany a úhly trojúhelníka obvyklým způsobem, vzdálenost $AD$ označíme $v$ a budeme předpokládat, že platí $v \leqq \frac{1}{2} c$. [Kdyby bylo $v > \frac{1}{2} c$, vyměnili bychom označení vrcholů $A$, $B$ (a tím i stran $a$, $b$, úhlů $\alpha$, $\beta$) a postupovali bychom dále naznačeným způsobem.] Je-li $v = \frac{1}{2} c$, pak trojúhelníky $ADC$, $BDC$ mají týž obsah a úloha je rozřešena. Na obr. 31 je naznačena situace, kdy je $v < \frac{1}{2} c$, tj. $v < c - v$. V tomto případě pro obsahy trojúhelníků platí $\triangle ADC < \triangle BDC$ (proč?), kde např. znak $\triangle ADC$ značí obsah trojúhelníka $ADC$; hledaná přímka $p$ bude tedy protínat stranu $BC$ v jejím vnitřním bodě $X$. Označme $BX = x$ a uplatněme podmínku $\triangle ABC = 2 . \triangle BDX$. Podle známého vzorce je

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad \triangle BDX = \frac{1}{2} x (c - v) \sin \beta.$$

Z předchozí podmínky vyplývá $\frac{1}{2}ac\sin\beta = x(c - v)$. $\sin\beta$, neboli po úpravě

$$x : a = \frac{1}{2}c : (c - v). \tag{21}$$



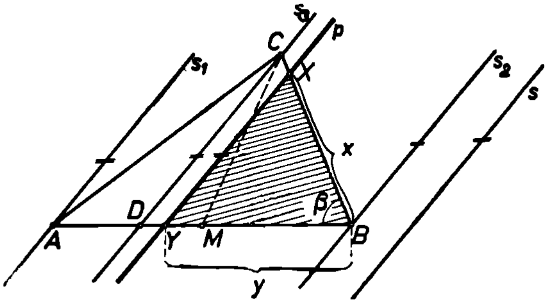
Obr. 31

Z rovnice (21) vyplývá podle známé věty konstrukce bodu $X$: patrně je $CD \parallel MX$; přitom $M$ značí střed strany $AB$.

Tuto konstrukci můžeme ověřit i jinak: Protože je $CD \parallel MX$, platí pro obsahy trojúhelníků $\triangle CDM = \triangle CDX$; má tedy trojúhelník $AMC$ týž obsah jako (vypuklý) čtyřúhelník $ADXC$, a to $\frac{1}{2}\triangle ABC$.

**Příklad 18.** Je dán trojúhelník $ABC$ a přímka $s$. Máme vést přímku $p$ rovnoběžnou s přímkou $s$ tak, aby přímka $p$ rozdělila daný trojúhelník ve dva obrazce téhož obsahu.

*Řešení.* Předpokládejme nejprve, že přímka $s$ není rovnoběžná se žádnou stranou trojúhelníka $ABC$. Vedeme vrcholy $A$, $B$, $C$ po řadě přímky $s_1$, $s_2$, $s_3$ rovnoběžně s přímkou $s$. Právě dvě z těchto přímek jsou opěrné (proč?), třetí protíná protější stranu trojúhelníka v jejím vnitřním bodě. Zvolíme-li vhodně označení vrcholů trojúhelníka, jsou $s_1$, $s_2$ opěrné přímky, $s_3$ protíná stranu




Obr. 32

$AB$ v jejím vnitřním bodě $D$ (obr. 32). Můžeme ještě předpokládat, že je $AD \leqq AM$, kde $M$ je střed strany $AB$; i toho můžeme dosáhnout případnou výměnou označení vrcholů $A$, $B$.

Je-li $AD = AM$, je hledaná přímka $p \equiv s_3$. Je-li $AD < AM$, je $\triangle\, ADC < \triangle\, BDC$ a hledaná přímka $p$ protne strany $BC$, $BA$ po řadě v bodech $X$, $Y$, pro něž platí $BX < BC$, $BY < BD$. Označme strany a úhly trojúhelníka $ABC$ obvyklým způsobem, dále označme $BX = x$, $BY = y$. Z podmínky pro obsahy plyne

$$\frac{1}{2}\,ac\,\sin\beta = 2\cdot\frac{1}{2}\,xy\sin\beta,$$

neboli

$$2xy = ac. \tag{22}$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle\, BXY \sim \triangle\, BCD$ dostaneme $x : a = y : (c - v)$ neboli

$$x = \frac{a}{c - v} y. \tag{23}$$

Dosadíme-li z (23) do (22), vyjde po úpravě

$$y^2 = \frac{1}{2} c (c - v). \tag{24}$$

Z rovnice (24) vyplývá, že úsečka $BY$ je střední geometrickou úměrnou úseček $BM$, $BD$. Sestrojení bodu $Y$ např. pomocí Eukleidovy věty přenecháváme čtenáři.

Je-li přímka $s$ rovnoběžná s některou stranou trojúhelníka $ABC$, je jeho „rozpůlení"*) známá školská úloha, kterou nebudeme řešit.

V příkladech 17, 18 šlo o rozpůlení konvexního útvaru — trojúhelníka — dvojím způsobem: jednak přímkou procházející daným bodem, jednak přímkou daného směru. Druhý způsob je důležitější a studuje se zejména u konvexních útvarů. Platí následující velmi obecná věta:

**VIII.** *Nechť je dán v rovině omezený dvojrozměrný útvar* $\mathsf{U}$ *obsahu* $P$ *a dále přímka* $s$ *této roviny. Pak existuje jediná přímka* $p$ *rovnoběžná s přímkou* $s$*, která dělí útvar* $\mathsf{U}$ *na dvě části obsahu* $\frac{1}{2} P$.

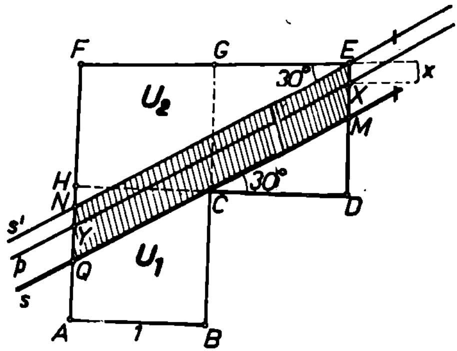
Přitom se ve větě VIII nepožaduje, aby útvar $\mathsf{U}$ byl konvexní; věta platí dokonce i v takovém případě, když se útvar $\mathsf{U}$ skládá z konečného počtu od sebe oddělených částí.

Věta VIII zaručuje sice existenci takové přímky $p$, ale neříká nic o jejím sestrojení. Je-li útvar $\mathsf{U}$ složitější než třeba v úloze 18, může být konstrukce přímky $p$ velmi

*) Tím rozumíme rozdělení trojúhelníka v části téhož obsahu.

obtížná. Uvedeme ještě jeden příklad půlení nekonvexního útvaru.

**Příklad 19.** Je dán nekonvexní šestiúhelník *ABCDEF*, skládající se ze tří shodných čtverců *ABCH*, *CDEG*,



Obr. 33

*CGFH* (obr. 33). Dále je dána přímka $s \equiv CM$ (bod *M* leží mezi *D*, *E*) tak, že $\sphericalangle MCD = 30°$. Daný šestiúhelník máme rozpůlit přímkou *p* rovnoběžnou s přímkou *s*.

*Řešení.* Zvolme úsečku *AB* za jednotku délky. Přímka *s* odděluje z daného šestiúhelníka U trojúhelník *CDM* a lichoběžník *ABCQ*, které dohromady tvoří útvar $U_1$ o obsahu 1; platí totiž shodnost trojúhelníků $\triangle CDM \cong \cong \triangle CHQ$, tj. obsah útvaru $U_1$ je roven obsahu čtverce *ABCH*.

Přímka $s' \parallel s$ vedená bodem *E* protne přímku *AE* v bodě *N* ležícím mezi *A*, *H* (odůvodněte!). Přímka $s'$ oddělí od šestiúhelníka U trojúhelník $\triangle EFN \equiv U_2$, jehož obsah je

$$\frac{1}{2} EF \,.\, FN = \frac{1}{2} .\, EF^2 \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, \frac{1}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3} \sqrt{3} > 1.$$

Průnik pásu roviny omezený rovnoběžkami $s$, $s'$ s šestiúhelníkem U je rovnoběžník $ENQM$ (na obr. 33 vyšrafovaný). Tento rovnoběžník je třeba rozdělit vhodnou příčkou $p \equiv XY \parallel s$ ($X$ mezi $E$, $M$, $Y$ mezi $N$, $Q$) tak, aby obsah lichoběžníka $EFYX$ byl roven $\frac{3}{2}$. Obsah $P$ tohoto lichoběžníka vyjádříme podle známého vzorce

$$P = \frac{1}{2} (EX + EX + EF \operatorname{tg} 30^\circ) \,.\, EF. \qquad (25)$$

Označíme-li $EX = x$, dostaneme ze vztahu (25) rovnici

$$2x + \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

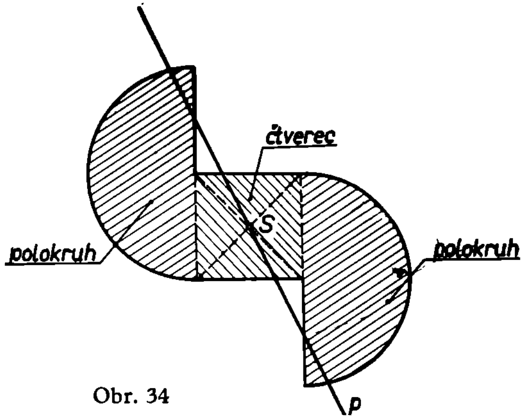
a odtud

$$x = \frac{1}{12} (9 - 4\sqrt{3}).$$

Přemýšlejte, zda dovedete udat eukleidovskou konstrukci bodu $X$.

**Úloha 43.** Je dán pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$. Nad jeho odvěsnami jsou sestrojeny (vně trojúhelníka) čtverce $ADEC$, $BCFG$. Veďte přímku rovnoběžnou s $AB$ tak, aby rozpůlila útvar složený z obou čtverců.

**Úloha 44.*** Dokažte, že rovinný útvar (konvexní či nekonvexní) souměrný podle středu $S$ je půlen jenom všemi těmi přímkami, které procházejí jeho středem souměrnosti $S$. Vyložte na nekonvexním útvaru vyšrafovaném na obr. 34.



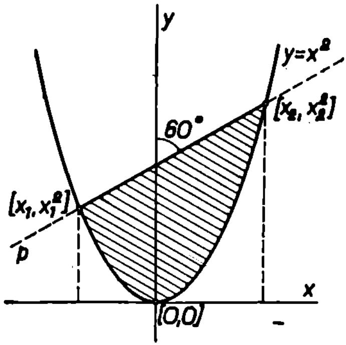

Obr. 34

**Příklad 20.** Je dán útvar V z příkladu 8. Útvar V je tedy úseč paraboly omezená přímkou $m$, kolmou k její ose. Útvar V máme rozpůlit přímkou $p$, která svírá s osou paraboly úhel velikosti 60°.

*Řešení.* Nejprve uvedeme bez odvození vzorec pro obsah tzv. úseče paraboly, tj. konvexního omezeného útvaru, který je průnikem útvaru z příkladu 4 a poloroviny (vyšrafovaný útvar na obr. 35). Nechť je úseč omezena tětivou, jejíž krajní body jsou $[x_1, x_1^2]$, $[x_2, x_2^2]$, $x_1 < x_2$; přitom je lhostejno, zda obě souřadnice $x_1$, $x_2$ jsou čísla kladná nebo záporná, či zda jedno je kladné a druhé záporné (jako na obr. 35), či zda jedno z nich je rovno nule. Ohlášený vzorec pro obsah $P$ vyšrafované úseče zní

$$P = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3. \tag{26}$$

Přímka $p$ v naší úloze má směrnici tg $30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (případem směrnice $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ se nemusíme zabývat,




Obr. 35

neboť útvar V je souměrný podle osy $y$). Předpokládejme, že hledaná přímka $p$ protne ve dvou bodech oblouk paraboly a nikoli v jednom bodě oblouk a v druhém tětivu $AB$. Výpočtem se ukáže, zda byl tento předpoklad správný. Jsou-li $[x_1, x_1^2]$, $[x_2, x_2^2]$ průsečíky přímky $p$ s parabolou ($x_1 < x_2$), pak platí

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2,$$

tj.

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{27}$$

Obsah útvaru V podle vzorce (26) je $P_V = \frac{1}{6}[2 - (-2)]^3 = \frac{32}{3}$. Podle téhož vzorce (26) pak platí

$$\frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} = \frac{16}{3}. \tag{28}$$

Z rovnice (28) dostaneme $x_2 - x_1 = \sqrt[3]{32}$, tj.

$$x_2 - x_1 = 2\sqrt[3]{4}. \tag{29}$$

Spojením rovnic (27), (29) vyjde

$$x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{3} - \sqrt[3]{4}, \quad x_2 = \frac{1}{6}\sqrt{3} + \sqrt[3]{4}, \tag{30}$$

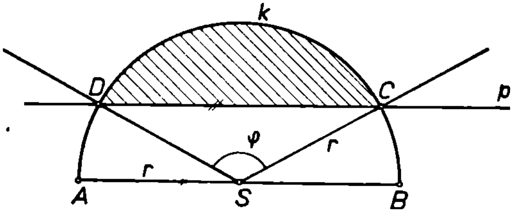
numericky $x_1 \doteq 0{,}289 - 1{,}587 = -1{,}298$, $x_2 \doteq 0{,}289 + 1{,}587 = 1{,}876$. Náš předpoklad se tedy potvrdil, neboť je $-2 < x_1 < x_2 < 2$ ($-2$, $2$ jsou souřadnice $x$ krajních bodů $A$, $B$).

Z výsledků (30) a z rovnice paraboly $y = x^2$ dostaneme souřadnice obou bodů, v nichž protíná hledaná přímka $p$ hranici útvaru V.

**Úloha 45.** Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $AB < CD$. Sestrojte přímku a) rovnoběžnou se základnami, b) rovnoběžnou s úhlopříčkou $AC$, která dělí lichoběžník ve dva obrazce téhož obsahu.

**Příklad 21.** Je dán půlkruh omezený průměrem $AB = 2r$. Máme půlkruh rozpůlit přímkou, rovnoběžnou s $AB$.

*Řešení.* Hledaná přímka $p$ oddělí od půlkruhu úseč, jež má obsah $\frac{1}{4}\pi r^2$ (obr. 36). Označme $C$, $D$ průsečíky přímky $p$ s polokružnicí $k$, dále $\varphi$ velikost (ve stupních)




Obr. 36

úhlu $\sphericalangle\, CSD$ ($S$ je střed průměru $AB$). Obsah vyšrafované úseče je pak

$$\frac{1}{360}\pi r^2\varphi - \frac{1}{2}r^2 \sin\varphi;$$

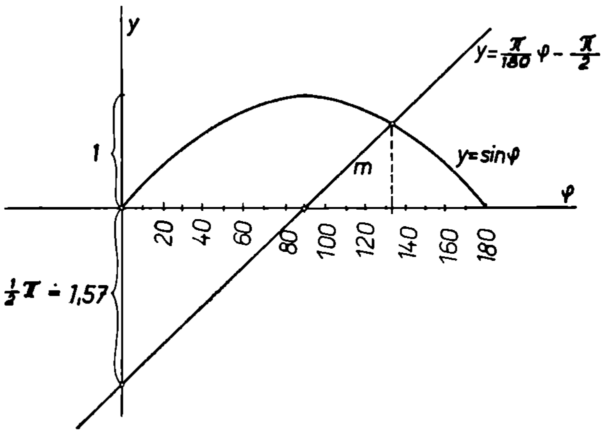
platí tedy

$$\frac{1}{360}\pi r^2\varphi - \frac{1}{2}r^2 \sin\varphi = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{180}\pi\varphi - \frac{1}{2}\pi = \sin\varphi. \qquad (31)$$

Položíme-li $y = \sin\varphi$, je $y = \frac{1}{180}\pi\varphi - \frac{1}{2}\pi$, což je klíč ke grafickému řešení rovnice (31). Řešení je naznačeno na obr. 37; vysvětlete je podrobně! (Přímka $m$ na obr. 37 je sestrojena pomocí úseků, které vytíná na osách souřadnic.)

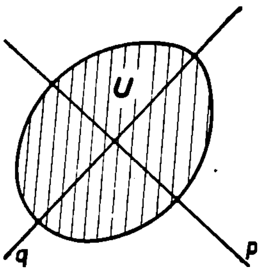



Obr. 37

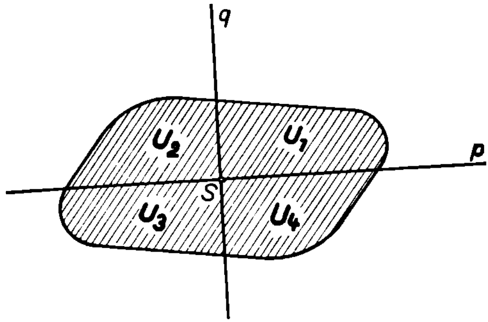
Další úlohy se týkají rozdělení omezeného dvojrozměrného konvexního útvaru U dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu. Lze dokázat, že takové rozdělení je vždy možné; ovšem směry těchto přímek nejsou libovolně volitelné a také jejich průsečík není libovolný bod útvaru U. Rozdělení konvexního útvaru navzájem kolmými přímkami $p$, $q$ na čtyři části téhož obsahu ukazuje obr. 38.

**Příklad 21.** Máme dokázat, že obě navzájem kolmé přímky, které dělí omezený konvexní středově souměrný útvar na čtyři části téhož obsahu, se nutně protínají v jeho středu souměrnosti.*)

*Řešení* (obr. 39). Nechť je útvar U rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu;




Obr. 38



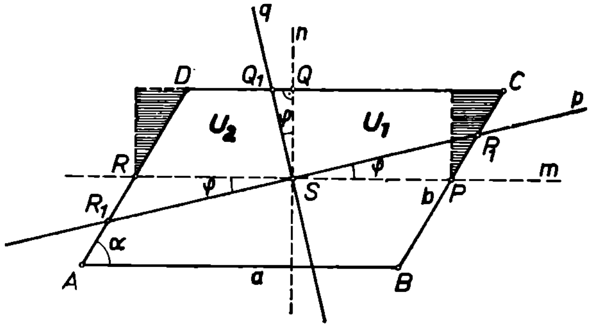

Obr. 39

označíme tyto části (i jejich obsahy) $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ podle obrázku 39. Protože je $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$, je též $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$ a $U_1 + U_4 = U_2 + U_3$, tj. každá z přímek $p$, $q$ půlí útvar U. Podle výsledku úlohy 44 procházejí obě přímky $p$, $q$ středem souměrnosti $S$.

*Poznámka.* Sestrojíme-li dvě navzájem kolmé přímky, z nichž každá půlí konvexní útvar U, není tím zaručeno, že je útvar rozdělen na čtyři části téhož obsahu. Podržíme-li totiž označení z obr. 39, platí $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$ a $U_1 + U_3 = U_2 + U_3$; z těchto dvou rovností dostaneme (odečtením druhé od první) $U_1 = U_3$ a pak i $U_2 = U_4$; tím však není zaručeno, že platí rovnost

*) Dá se dokázat, že omezený útvar má nejvýše jeden střed souměrnosti.

$U_1 = U_2$ a pak i rovnost $U_3 = U_4$. Aby tato rovnost platila, je třeba zvolit určitou dvojici navzájem kolmých „půlících" přímek, jak ukazuje třeba příklad 22.




Obr. 40

**Příklad 22.** Je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $BC = b$ a vnitřní úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost $\alpha$; přitom je $a \geqq b$, $\alpha \leqq 90°$. Máme rozdělit rovnoběžník $ABCD$ dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu.

*Řešení.* Podle výsledku příkladu 21 procházejí hledané přímky $p$, $q$ středem souměrnosti $S$ daného rovnoběžníka. Veďme bodem $S$ přímku $m \parallel AB$, přímku $n \perp AB$ a označme body $P$, $Q$, $R$ podle obr. 40. Označme dále $U_1$ lichoběžník $SPCQ$, $U_2$ lichoběžník $RSQD$; pro jejich obsahy zřejmě platí $U_1 > U_2$, určitěji

$$U_1 = U_2 + \frac{1}{8} b^2 \sin 2\alpha, \tag{31'}$$

jak si snadno ověříte; oba obsahy se totiž liší o obsah obou vodorovně šrafovaných trojúhelníků v obr. 40.

Hledané, navzájem kolmé přímky $p$, $q$ dostaneme otočením dvojice $m$, $n$ kolem středu $S$ o ostrý nebo nulový úhel velikosti $\varphi$, jak je naznačeno na obr. 40. Označíme-li body $P_1$, $Q_1$, $R_1$ podle tohoto obrázku a označíme-li dále $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ po řadě obsahy trojúhelníků $SPP_1$, $SQQ_1$, $SRR_1$, pak pro obsahy obrazců $\mathsf{U}_1$, $\mathsf{U}_2$, $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ platí

$$\mathsf{U}_1 - \Delta + \Delta' = \mathsf{U}_2 - \Delta' + \Delta''. \tag{32}$$

Trojúhelníky s obsahy $\Delta$, $\Delta''$ jsou souměrně sdruženy podle středu $S$, proto jsou shodné; pro jejich obsahy pak platí $\Delta = \Delta''$. Z rovnosti (32) pak dostaneme

$$2(\Delta - \Delta') = \mathsf{U}_1 - \mathsf{U}_2. \tag{33}$$

Spojením vztahů (31), (33) vyjde

$$\Delta - \Delta' = \frac{1}{16} b^2 \sin 2\alpha. \tag{34}$$

Nyní vyjádříme obsahy $\Delta$, $\Delta'$. Platí

$$\begin{aligned} SQ &= \frac{1}{2} b \sin \alpha, \quad QQ_1 = \frac{1}{2} b \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi, \\ SR &= \frac{1}{2} a, \quad SR_1 = \frac{1}{2} a \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}; \end{aligned} \tag{35}$$

poslední ze vztahů (35) se dostane použitím sinové věty na trojúhelník $SRR_1$. Dále dostaneme s použitím vztahů (35)

$$\Delta = \frac{1}{2} SQ \cdot QQ_1 = \frac{1}{8} b^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\Delta' = \frac{1}{2} SR \cdot SR_1 \sin \varphi = \frac{1}{8} a^2 \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

Dosadíme z (36) do (34) a dělíme rovnici číslem $\frac{1}{8}\sin \alpha$ (které je různé od nuly); vyjde

$$a^2 \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} - b^2 \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = b^2 \cos \alpha.$$

Po odstranění zlomků a další úpravě dostaneme

$$a^2 \sin \varphi \cos \varphi = b^2(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)\sin(\alpha-\varphi),$$

neboli

$$\frac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi = b^2 \cos(\alpha - \varphi) \,.\, \sin(\alpha - \varphi),$$

neboli dále

$$\frac{1}{2}\, a^2 \sin 2\varphi = \frac{1}{2} b^2 \sin(2\alpha - 2\varphi).$$

Rozvedeme-li $\sin(2\alpha - 2\varphi)$ podle vzorce, dostaneme konečně rovnici

$$(a^2 + b^2 \cos 2\alpha) \sin 2\varphi = b^2 \sin 2\alpha \cos 2\varphi, \tag{37}$$

což je jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou $\varphi$ a s parametry $a$, $b$, $\alpha$. Obrácením předcházejícího postupu zjistíme, že každý ostrý nebo nulový úhel, jehož velikost $\varphi$ splňuje rovnici (37), dává řešení dané úlohy.

Např. pro $\alpha = 90°$ (obdélník) nabude rovnice (37) tvaru

$$(a^2 - b^2) \sin 2\varphi = 0; \tag{38}$$

dostaneme jediné řešení $\varphi = 0$ — střední příčky obdélníka, pokud je $a > b$. Je-li $a = b$ (čtverec), má rovnice (38) za řešení kteroukoli velikost $\varphi$ intervalu $0° \leqq \varphi < 90°$.

Vyšetřte podobně případ $a = b$ (kosočtverec) a ověřte si, že každý rovnoběžník, který není čtverec, lze rozdělit ve čtyři části téhož obsahu jen jedinou dvojicí navzájem kolmých přímek.

**Úloha 46.** Rozdělte na čtyři části téhož obsahu dvěma navzájem kolmými přímkami některé útvary osově souměrné, a to a) rovnoramenný lichoběžník (použijte výsledku úlohy 45); b) útvar V z příkladu 20 (použijte výsledku tohoto příkladu); c) útvar U z úlohy 3b); zde volte lichoběžník $ABCD$ tak, aby platilo $\sphericalangle ACE = 60°$, $\sphericalangle DHE = 150°$ a vypočtěte velikosti ostatních potřebných úhlů z obr. 4b.