# Geometrická místa bodů v prostoru

## 1. kapitola. Úvod

In: Josef Holubář (author): Geometrická místa bodů v prostoru. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1965. pp. 3–6.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403530

1. kapitola

# ÚVOD

Vám, mladí přátelé, je ze střední školy dobře znám *pojem geometrického místa bodů* neboli *pojem množiny všech bodů, které mají určitou vlastnost*, pokud se jedná o útvary v rovině.[1]) V planimetrii jste už řešili četné konstruktivní úlohy, při jejichž řešení se g. m. b. často používá. Vždyť má konstruktivní geometrická úloha mnohdy řešení, které dostaneme jako průnik dvou nebo více množin bodů, tj. g. m. b., která jsme před tím nalezli (srovn. např. úlohu 8 řešenou v našem textu na str. 30). Potom je odvození příslušných g. m. b. vlastně řešením jistých „obecnějších" úloh konstruktivních, s kterými jsou g. m. b. v úzké souvislosti.

Ve škole jste se však dosud málokdy setkali s pojmem g. m. b., který se vztahuje na útvary prostorové. V této knížce chtěl bych vás, zvláště pak účastníky Matematické olympiády, seznámit s některými g. m. b. v prostoru. Prostorem zde rozumíme *trojrozměrný prostor Euklidův*, v němž se vyskytují všecky geometrické útvary, které jste probírali ve škole. Také g. m. b. v prostoru docházejí hojného použití v konstruktivních úlohách, a to prostorových. V našich úvahách, zvláště na počátku knížky, zdůrazníme obdobu a souvislosti g. m. b. prostorových s g. m.

[1]) Název *množiny všech bodů určité vlastnosti* je novější termín pro pojem, který je dosud běžně označován starším a stále vžitým názvem *geometrické místo bodů*. Toho budeme používat i v této knížce a slova geometrické místo bodů zapisovat zkráceně „g. m. b.".

b. v rovině. Uvidíme, jak se vyšetřování g. m. b. v prostoru často a výhodně převádí na vyšetřování g. m. b. v rovině a jak se z těchto g. m. b. rovinných přejde do prostoru zobrazením, např. otáčením, rovnoběžným posunutím nebo stejnolehlostí apod., čímž se studium g. m. b. v prostoru značně usnadní.

Při vyšetřování g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou plochy běžné v prostorové geometrii, s kterými jste se však na střední škole nesetkali, jako např. další *rotační plochy druhého stupně (tzv. kvadriky)*. Z nich jste poznali rotační plochu válcovou, kuželovou a kulovou i jejich vznik. Pokud jde o kulovou plochu, připomeňme k její známé definici pomocí středu a poloměru a k jejímu vytvoření pomocí rotace kružnice kolem jejího průměru ještě Thaletovo a Apolloniovo vytvoření kulové plochy. Tato vytvoření jsou jenom prostorovým zobecněním Thaletova a Apolloniova vytvoření kružnice, která znáte z planimetrie. (Viz příklad 4 kapitoly 2 na str. 12.)

Další rotační kvadriky vznikají *rotací kuželoseček* kolem některé z jejich os:

Rotací elipsy, která má ohniska v bodech $F$, $G$, kolem její hlavní osy vznikne *rotační elipsoid protáhlý* s ohnisky v bodech $F$, $G$, definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů $F$, $G$ daný součet vzdáleností rovný $2a > FG$, kde $a$ je velikost hlavní poloosy výchozí elipsy a také hlavní poloosy vzniklého elipsoidu. Rotací téže elipsy kolem její vedlejší osy vznikne další kvadrika, *rotační elipsoid zploštělý*.

Otáčením hyperboly s ohnisky $F$, $G$ kolem její hlavní osy vznikne *rotační hyperboloid dvoudílný* s ohnisky v bodech $F$, $G$, definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů $F$, $G$ daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < FG$. Při této rotaci vytvářejí asymptoty rotující hyperboly asymptotickou kuželovou plochu vzniklého hyperboloidu. Rotuje-li táž hyperbola kolem své vedlejší osy, vznikne *rotační hyperboloid jednodílný*, který má mnoho zajímavých vlastností (např. obsahuje přímky a lze jej také vytvořit rotací každé takové přímky).

Rotuje-li parabola (s ohniskem v bodě $F$ a řídicí přímkou $d$) kolem své osy, vzniká rotační paraboloid s ohniskem v bodě $F$ a řídicí rovinou $\varrho$, která prochází přímkou $d$ a která je kolmá na osu výchozí paraboly. Rotační paraboloid je definován jako g. m. b. v prostoru, které mají od daného bodu $F$ a od dané roviny $\varrho$ vzdálenosti sobě rovné.

Při našich úvahách o g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou *kuželosečky*, jejichž ohniskové definice znáte, které tu však vzniknou jako *rovinné průseky na kvadrikách*. Uveďme zde aspoň některé věty, a to bez důkazů (příslušná odůvodnění najde čtenář v [3]).

Rotační válcová plocha $V$ (o ose v přímce $o$) a rovina $\sigma$ dává v průseku vznik:

a) *dvěma přímkám* plochy $V$, je-li $\sigma \parallel o$, pokud rovina $\sigma$ není tečnou rovinou plochy $V$ anebo pokud rovina $\sigma$ nemá takovou polohu, že by neměla s plochou $V$ žádný společný bod;

b) *kružnici*, je-li rovina $\sigma$ kolmá k přímce $o$;

c) *elipse*, je-li rovina $\sigma$ kosá k přímce $o$.

Na rotační kuželové ploše $K$ (o ose v přímce $o$) může v rovině $\sigma$ vzniknout průsek:

a) složený ze *dvou přímek* plochy $K$, prochází-li rovina $\sigma$ vrcholem plochy $K$ (rovina $\sigma$ je v tomto případě tzv. vrcholovou rovinou kuželové plochy $K$), pokud však rovina $\sigma$ není tečnou rovinou plochy $K$ anebo pokud rovina $\sigma$ nemá takovou polohu, že by s plochou $K$ neměla kromě vrcholu žádný jiný společný bod;

není-li rovina $\sigma$ vrcholovou rovinou plochy $K$, potom vznikne:

b) *elipsa* (ve zvláštním případě kružnice), je-li rovina $\sigma$ různoběžná se všemi přímkami plochy $K$,

c) *hyperbola*, je-li rovina $\sigma$ rovnoběžná právě se dvěma přímkami plochy $K$,

d) *parabola*, je-li rovina $\sigma$ rovnoběžná právě s jednou přímkou plochy $K$.

V naší knížce půjde v podstatě o řešení příkladů g. m. b. v prostoru vybraných tak, aby vás mohly zaujmout i poučit. Geometrické myšlení pěstované studiem planimetrických útvarů si tím rozšíříte a hlavně prohloubíte. Pro názornost budeme často používat vedle pravoúhlých průmětů také náčrtů prostorových útvarů sestrojovaných v známém *volném rovnoběžném zobrazení*. Tyto náčrty vám usnadní porozumění vztahům mezi prostorovými útvary a pomohou vám i v dalším rozvoji prostorové představivosti. Některé příklady g. m. b. jsou ponechány jako úlohy doprovázené aspoň částečnými výsledky k řešení vám samotným. Na konci knížky uvedeme *literaturu*, která jednak obsahuje hojně dalších úloh na vyšetřování g. m. b. v prostoru, jednak doplňuje teoretické poznatky v textu použité a nedokazované. Tuto literaturu vám doporučujeme k dalšímu studiu.