Prostory o čtyřech a více rozměrech

1. Přímka

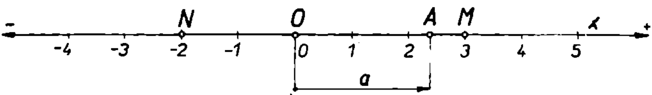
In: Karel Havlíček (author): Prostory o čtyřech a více rozměrech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1965. pp. 5–10.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403540

1. kapitola

PŘÍMKA

Ze školy je každému známo, že reálná čísla si znázorňujeme jednotlivými body na tzv. ose číselné. Tím rozumíme přímku, označme ji písmenem x (viz obr. 1), na níž zvolíme bod O, zvaný počátek, jemuž přiřadíme číslo nula. Od něho vynášíme obyčejným měřítkem na osu číselnou délky znázorňující jednotlivá reálná čísla; obrazem každého čísla na této ose je druhý krajní bod úsečky zmíněné délky (první její krajní bod je v počátku). Na jedné straně od počátku tak dostáváme body znázorňující kladná čísla (na obr. 1 leží vpravo od bodu O), na druhé straně body znázorňující čísla záporná (na obr. 1 leží vlevo od bodu O). Na přímce x máme tak dvojí orientaci; mluvíme o kladném smyslu měření na ose x, měříme-li délky zleva do prava, nebo o záporném smyslu, měříme-li je obráceně. Oba smysly jsme vyznačili v obr. 1 šipkami s připsáním příslušného znaménka. Nutno ještě upozornit, že osa číselná nemusí být vždycky vodorovná; na teploměru ji máme obvykle svislou.



Obr. 1

Na ose číselné je každému reálnému číslu přiřazen jeden bod a obráceně, každému bodu osy číselné je přiřazeno jediné reálné číslo. Je-li tak reálnému číslu a přiřazen na ose číselné bod A, řekneme stručně, že bod A má na ose x *souřadnici* a. Při vynášení souřadnic zachováváme ovšem kladný, případně záporný smysl měření na ose číselné. To znamená, že bod A s kladnou souřadnicí $a > 0$ má na ose takovou polohu, abychom úsečku OA probíhali od počátku O k bodu A v kladném smyslu; je-li $a < 0$, probíháme úsečku od počátku k bodu A ve smyslu záporném.

Smluvíme se na stručném označení: okolnost, že bod A má souřadnici a, zapíšeme symbolem $A\ (a)$. Tak například bod M na obr. 1 má souřadnici $+ 3$, píšeme tedy $M(3)$; symbol $N(-2)$ značí, že bod N tam má souřadnici -2.

Pro výklady v dalších odstavcích je důležité zvyknout si zacházet se souřadnicemi již zde. Všimněme si nejdřív jednoduché úlohy měření velikosti úsečky. V praxi vyjadřujeme délku úsečky kladným číslem. Zůstaneme přitom i zde. Délku úsečky AB můžeme ovšem vypočítat užitím souřadnic bodů A, B; hledanou vzdálenost těchto bodů vyjádříme snadno pomocí absolutní hodnoty rozdílu jejich souřadnic. Má-li např. bod A souřadnici $a = 3$, bod B souřadnici $b = 7$, je vzdálenost obou těchto bodů zřejmě rovna číslu 4, neboť $4 = 7 - 3 = b - a$. Je-li $a = 3$, $b = - 2$, je vzdálenost bodů A, B rovna číslu 5, což lze psát tak, že $5 = 3 + 2 = 3 - (- 2) = a - b$. Obecně platí:

Věta 1,1. *Jsou-li $A(a)$, $B(b)$ dva body na ose číselné, pak jejich vzdálenost je dána číslem**)

$$v = | b - a | = \sqrt{(b - a)^2}. \tag{1,1}$$

*) Užíváme běžně známého vyjádření absolutní hodnoty $| m | = \sqrt{m^2}$ pro libovolné reálné číslo m.

D ů k a z si čtenář podá snadno sám tím způsobem, že si promyslí všechna možná seskupení tří bodů na ose číselné, totiž bodů A, B a počátku O.

Vzorec (1,1) platí i v tom případě, kdy body A, B splynou, kdy jsou totožné. Pak je $a = b$ a vzdálenost $v = 0$. Rozšíříme tedy hoření výklad tím, že úsečka má vždycky délku nezápornou. Úsečka délky nula se často v literatuře nazývá úsečka nulová.

Ve vzorci (1,1) není třeba si pamatovat pořadí souřadnic a, b, neboť je $b - a = -(a - b)$ a tedy $|b - a| = |a - b|$.

Pro vzdálenost v bodů A, B se užívá také znaku $v = AB$. Podle toho, co bylo právě řečeno, je $AB = BA$.

Každá úsečka má jediný střed. Určíme jeho souřadnici na ose číselné.

Věta 1,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a)$, $B(b)$, má souřadnici*

$$s = \frac{a + b}{2}. \tag{1,2}$$

D ů k a z spočívá ve výpočtu souřadnice s bodu S z podmínky, že bod S je stejně vzdálen od bodu A jako od bodu B; je tedy podle vzorce (1,1)

$$|a - s| = |s - b|. \tag{1,3}$$

Abychom se zbavili nepohodlného počítání s absolutními hodnotami, umocníme tuto rovnici dvěma. Je pak

$$(a - s)^2 = (s - b)^2.$$

Při $a \neq b$ vychází odtud po krátkém počtu právě výsledek (1,2) a zkouškou (dosazením) se snadno přesvědčíte, že tato hodnota s vyhovuje rovnici (1,3). Je-li $a = b$, splývají všechny tři body A, B, S v jednom bodě a je $a = b = s = = \frac{a+b}{2}$. Tím je věta 1,2 dokázána. Obráceně hledejme nyní krajní body úsečky, jejíž střed známe:

Věta 1,3. *Souřadnice x bodů, které jsou na ose číselné od bodu $S(s)$ vzdáleny o délku $r > 0$, splňují kvadratickou rovnici*

$$(x - s)^2 = r^2. \tag{1,4}$$

Důkaz vychází na základě vzorce (1,1) z podmínky $|x - s| = r$, která je ovšem ekvivalentní s rovnicí (1,4).

Ptejme se obecně, které body na ose číselné určuje kvadratická rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1,5}$$

kde konstanty p, q splňují podmínku

$$p^2 - 4q > 0. \tag{1,6}$$

Za předpokladu (1,6) má totiž rovnice (1,5) právě dva různé reálné kořeny x_1, x_2, jež jsou souřadnicemi dvou bodů X_1, X_2 na dané ose číselné; střed úsečky X_1X_2 má pak souřadnici $s = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2}$.

Tohoto výsledku docílíme také převedením rovnice (1,5) na tvar (1,4) běžně známým doplňováním kvadratického trojčlenu na úplný čtverec podle předpisu $x^2 + px + q = = (x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Pak rovnice (1,5) má tvar $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$, což je tvar

(1,4), kde klademe $s = -\frac{p}{2}$, $r = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. V důsledku podmínky (1,6) je $r > 0$. Dostáváme tak zároveň souřadnici s středu úsečky X_1X_2 i vzdálenost r tohoto středu od kteréhokoli z bodů X_1, X_2.

O bodech na přímce se toho dá říci ještě mnoho, zde však vystačíme s tím, co jsme si právě ukázali. Hlavním účelem bylo, aby si čtenář uvědomil, že k řešení geometrických úloh o bodech na přímce lze užít *jedné* souřadnice, která polohu každého bodu na přímce charakterizuje. Přitom tato souřadnice probíhá množinu (čili množství) všech reálných čísel, tj. může se rovnat kterémukoliv reálnému číslu. Z toho důvodu říkáme, že přímka je jednorozměrná nebo že je *prostorem jednorozměrným*. K zvládnutí geometrie na přímce stačí totiž jedna souřadnice, probíhající množinu reálných čísel.

Řekněme si hned, že souřadnice, o níž zde mluvíme, znamená geometricky v podstatě délku; její absolutní hodnota je vzdálenost na přímce od počátku O. Odtud obecněji pro vzdálenost dvou bodů vychází vzorec (1,1), který souhlasí s běžným měřením, jemuž se každý učí v geometrii už na obecné škole. Protože geometrii založenou na tomto měření poprvé soustavně zpracoval slavný řecký matematik Euklides (žil okolo roku 300 př. n. l.), říkáme, že **přímka, na níž měření provádíme podle vzorce (1,1), je jednorozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

1,1. Vyneste na ose číselné body $A(2)$, $B(-1)$, $C(\frac{2}{3})$, $D(\sqrt{2})$, $E(-\frac{3}{2})$ a $P(\pi)$, kde $\pi \doteq 3,14$ je Ludolfovo číslo.

1,2. Vypočtěte vzdálenost každých dvou z bodů A (4), B (7), C (-5), D (-3) daných na přímce.

1,3. Vzdálenost bodu $A(a)$ od počátku je rovna číslu $|a|$.

1,4. Určete souřadnici s středu úsečky AB, je-li a) $A(3)$, $B(-5)$; b) $A(3)$, $B(-3)$; c) $A(7)$, $B(4)$.

1,5. Určete body $X_1(x_1)$, $X_2(x_2)$, jejichž souřadnice jsou kořeny rovnice $x^2 - 5x + 4 = 0$ a vypočtěte souřadnice středu úsečky X_1X_2 i vzdálenost středu této úsečky od kteréhokoli jejího krajního bodu.