6. kapitola

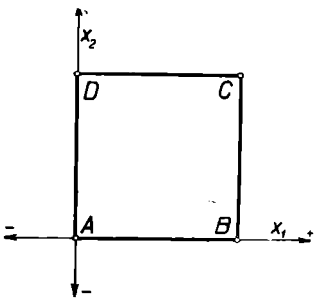
KRYCHLE

V předcházejících kapitolách jsme hovořili o takových útvarech, které byly určeny rovnicemi nebo soustavou rovnic v prostoru E_n. Všimněme si teď stručně také významu nerovností a spojme tuto záležitost s představou vícerozměrného tělesa. Ukážeme si jen jeden příklad, totiž krychli.

V jednorozměrném prostoru E_1 (tedy v přímce) vyplní všechny body $X(x)$, pro jejichž souřadnice platí ($a>0$ je dané číslo)

$$0 \leqq x \leqq a, \tag{6,1}$$

úsečku o krajních bodech $A(0)$, $B(a)$. Je to úsečka délky a.

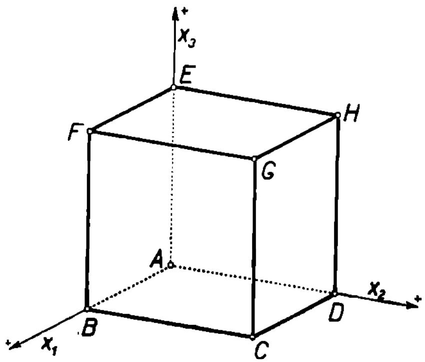


Obr. 6

V rovině E_2 podobně všechny body $X(x_1; x_2)$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 0 \leqq x_2 \leqq a, \tag{6,2}$$

vyplní čtverec $ABCD$ (obr. 6), jak se každý snadno přesvědčí. Délka strany tohoto čtverce je a. Znamení rovnosti v některém ze vzorců (6,2) přichází v úvahu jen u těch bodů našeho čtverce, které leží na jeho obvodu. Ty body, jejichž souřadnice nabývají dokonce výlučně jen hodnot 0 nebo a, jsou jen vrcholy tohoto čtverce, a to: $A(0;0)$,$B(a; 0)$, $C(a; a)$, $D(0; a)$. Tento čtverec můžeme vytvořit tak, že úsečku AB určenou na ose x_1 první z nerovností (6,2) nebo, což je v podstatě totéž, nerovností (6,1), posunujeme v dané rovině ve směru kolmém k této úsečce o délku a. Tak lze z jednorozměrné úsečky vytvořit čtverec.



Obr. 7

Podobně můžeme tento čtverec posunout kolmo k jeho rovině o délku a a vytvořit tak krychli v prostoru E_3 (obr. 7.). Zachovejme přitom v rovině tohoto čtverce souřadné osy tak jako na obr. 6 a třetí souřadná osa bude pak kolmá k této rovině a bude procházet bodem A. První dvě souřadnice každého bodu naší krychle jsou opět vázány nerovnostmi (6,2), třetí souřadnice nemůže být větší než a, neboť celý čtverec jsme posunuli právě o délku a. Jsou tedy všechny body $X(x_1; x_2; x_3)$ naší krychle charakterizovány nerovnostmi

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 0 \leqq x_2 \leqq a, \quad 0 \leqq x_3 \leqq a; \tag{6,3}$$

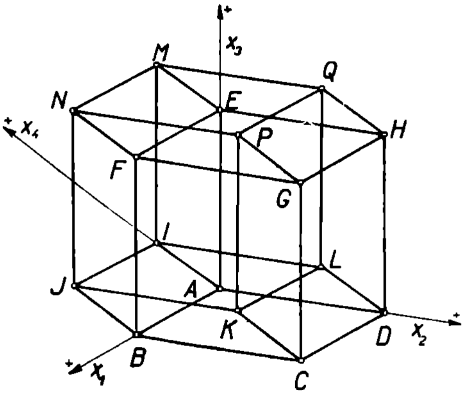
číslo a značí opět délku hrany této krychle.

Postupujme tak dále. Krychle v obr. 7 leží v trojrozměrném prostoru E_3; vnoříme-li jej do čtyřrozměrného prostoru E_4, můžeme v něm sestrojit čtvrtou osu souřadnou x_4 tak, aby procházela opět bodem A a aby neležela v původním E_3. (Tato čtvrtá osa souřadná je k původnímu prostoru E_3 kolmá, jak náš čtenář jistě sám tuší, i když jsme o kolmosti v této knížce nemluvili.) Posuneme-li naši krychli ve směru této čtvrté osy opět o délku a, vyplní všechny její body v prostoru E_4 útvar, který je charakterizován jednak nerovnostmi (6,3) a za druhé stejnou podmínkou pro čtvrtou souřadnici; jde tedy o body $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, jejichž souřadnice splňují podmínky

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \; 0 \leqq x_2 \leqq a, \; 0 \leqq x_3 \leqq a, \; 0 \leqq x_4 \leqq a. \tag{6,4}$$

Analogicky k trojrozměrnému případu říkáme, že *všechny body* $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, *jejichž souřadnice splňují podmínky* (6,4), *vytvoří čtyřrozměrnou krychli o hraně délky a.*

Konstrukci této čtyřrozměrné krychle si můžeme představit také tak, že každým z osmi vrcholů obyčejné trojrozměrné krychle z obr. 7 vedeme přímku (kolmou k prostoru E_3 původní krychle) a naneseme na ni od každého tohoto vrcholu tutéž délku a. Tak vznikne nových osm bodů, jež tvoří spolu s vrcholy původní trojrozměrné krychle skupinu všech vrcholů čtyřrozměrné krychle. Těchto vrcholů je tedy 16 a jsou i s hranami krychle vyznačeny schematicky v obr. 8. Upouštíme přitom úmyslně od stanovení viditelnosti jednotlivých hran této krychle, protože tato otázka by vyžadovala patřičný výklad z deskriptivní geometrie v prostoru čtyřrozměrném; proto také říkám, že obr. 8 představuje jen schéma hran a vrcholů



Obr. 8

čtyřrozměrné krychle. Vznik tohoto obrázku si můžeme představit tak, že nejdřív čtyřrozměrnou krychli promítneme do trojrozměrného prostoru E_3, v němž je původní trojrozměrná krychle a výsledek promítneme znovu do roviny, v níž náš obrázek kreslíme. Je to nakonec obdoba obr. 7, jenže tu máme obrazy čtyř os souřadných x_1, x_2, x_3, x_4, vycházejících ze společného počátku A (0; 0; 0; 0). V obr. 8 je poměrně zřetelně „vidět“ obraz původní trojrozměrné krychle o vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H (srovnej s obr. 7) a ostatní vrcholy I, J, K, L, M, N, P, Q leží mimo původně daný prostor E_3. Snadno sepíšeme souřadnice jednotlivých vrcholů této čtyřrozměrné krychle do tabulky:

$$
\begin{array}{llll}
A\,(0;0;0;0) & I\;\;(0;0;0;a) & & \\
B\,(a;0;0;0) & J\;\;(a;0;0;a) & & \\
C\,(a;a;0;0) & K\,(a;a;0;a) & & \\
D\,(0;a;0;0) & L\;\;(0;a;0;a) & & \\
E\,(0;0;a;0) & M\,(0;0;a;a) & & (6{,}5) \\
F\,(a;0;a;0) & N\,(a;0;a;a) & & \\
G\,(a;a;a;0) & P\;\;(a;a;a;a) & & \\
H\,(0;a;a;0) & Q\;\;(0;a;a;a) & &
\end{array}
$$

Všechny hrany této čtyřrozměrné krychle jsou v obr. 8 zakresleny. Nejsou to ovšem všechny spojnice všech těchto šestnácti bodů mezi sebou. Ty z nich, jež v obr. 8 zakresleny nejsou, jsou úhlopříčky naší krychle. Úhlopříčky jsou zde trojího druhu: první z nich jsou úhlopříčky čtverců tvořících strany krychle (např. úhlopříčky $AC = AH = AF = = a\sqrt{2}$), druhé jsou tělesové úhlopříčky trojrozměrných krychlí tvořících „stěny" naší čtyřrozměrné krychle (např. $AG = a\sqrt{3}$) a třetí druh, který ze školy čtenáři neznají, je úhlopříčka ve čtyřrozměrném prostoru, jež neleží v žádné z prve zmíněných trojrozměrných „stěn" této čtyřrozměrné krychle (např. $AP = a\sqrt{4} = 2a$). Výpočet délky AP provedete snadno užitím vzorce (4,1) pro souřadnice bodů A, P z tabulky (6,5). Tento třetí druh představuje nejdelší úhlopříčku čtyřrozměrné krychle, jak se může každý při dostatečné trpělivosti přesvědčit tím, že vypočítá vzájemné vzdálenosti všech dvojic bodů z tabulky (6,5).

Na základě těchto příkladů nebude už čtenáři činit potíže zobecnění pojmu krychle pro vícerozměrné útvary. *Množina všech takových bodů $X\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ prostoru E_n, jejichž souřadnice splňují nerovnosti*

$$0 \leqq x_1 \leqq a,\ 0 \leqq x_2 \leqq a,\ \ldots,\ 0 \leqq x_n \leqq a, \qquad (6{,}6)$$

se nazývá n-rozměrná krychle o hraně délky a.

Je zřejmé, že pro $n = 1, 2, 3$ jsou to dávno nám známé pojmy. Jednorozměrná krychle je úsečka [srovnej nerovnosti (6,1) a (6,6)], dvojrozměrná krychle je čtverec [viz nerovnosti (6,2)] a trojrozměrná krychle je obyčejná krychle známá ze školy [viz nerovnosti (6,3)].

Stanovme počet vrcholů n-rozměrné krychle. Označme tento počet na chvíli znakem V_n. Připomeňme si, jak takovou krychli vytvoříme. Provedli jsme to už pro $n = 2, 3, 4$. Zkusme to nyní obecně pro libovolné n. Zřejmě stačí vzít (n-1) — rozměrnou krychli ležící v prostoru E_{n-1} a každým jejím vrcholem, jichž je V_{n-1}, vést kolmici k tomuto E_{n-1} a nanést na ni délku hrany a. Takových kolmic je rovněž V_{n-1} a na každé z nich leží jeden další vrchol naší n-rozměrné krychle, což je nových V_{n-1} vrcholů. Přidáme-li k tomu původních V_{n-1} vrcholů (n-1) — rozměrné krychle, z níž jsme vyšli, máme celkem

$$V_n = 2V_{n-1} \tag{6,7}$$

vrcholů dané n-rozměrné krychle. Protože pro $n = 1$ je $V_1 = 2$ (úsečka má dva krajní body), je $V_2 = 2^2$, $V_3 = 2^2 . 2 = 2^3$, $V_4 = 2^3 . 2 = 2^4$ atd., celkem $V_n = 2^n$. Můžeme tedy říci: *n-rozměrná krychle má celkem 2^n vrcholů.*

Souřadnice těchto vrcholů plynou z podmínek (6,6) tím způsobem, že jsou to krajní přípustné hodnoty pro příslušné souřadnice, tedy 0 nebo a. Jinými slovy: vrcholem naší n-rozměrné krychle je bod, jehož souřadnice

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{6,8}$$

nabývají buď hodnoty 0, nebo a. Pro čtyřrozměrnou krychli jsme je sestavili v tabulce (6,5). Všimněme si tu zase souvislosti geometrie s aritmetikou. Aritmeticky jde při stanovení těchto vrcholů o to, kdy n proměnných souřadnic či parametrů (6,8) nabývá hodnoty 0 nebo a, a kolik je takových případů. Jde tedy o stanovení všech možných skupin po n číslech (6, 8), kde každé to číslo je buď 0, nebo a. Připomeňme si, kde se v matematice mluví o takových číselných systémech, při nichž každé číslo nabývá jen dva možné znaky, např. znaky 0 a 1. Je to např. v tzv. dvojkové soustavě, na níž je založena i většina samočinných počítačů. Máme-li v takovém případě zpracovat úlohu, v níž se vyskytuje n parametrů, zajímá nás, kolik je takových možných skupin ve dvojkové soustavě. Ptáme se tedy, kolik je možných takových skupin tvaru (6,8), kde každé číslo je buď 0, nebo 1. Naše úvahy o počtu vrcholů n-rozměrné krychle o hraně délky $a = 1$ nám dávají ihned výsledek, totiž 2^n.

Tento výsledek můžeme ovšem odvodit i bez geometrie n-rozměrných prostorů, a to úplnou indukcí, ale tu jsme ve skutečnosti provedli i my při odvození vzorce (6,7). Tyto řádky slouží však především tomu, aby si čtenář všiml vzájemné souvislosti dvou zdánlivě velmi odlehlých partií matematiky, jako je n-rozměrná geometrie a počítání ve dvojkové soustavě. Je jedním z nejkrásnějších rysů matematiky, že mezi nejrůznějšími jejími disciplínami existují často velmi úzké vztahy. Nelze se tedy divit, že geometrii vícerozměrných prostorů můžeme leckdy aplikovat i tam, kde to předem ani netušíme.

Zakončeme tuto kapitolu ještě výpočtem délky nejdelší úhlopříčky n-rozměrné krychle. Jde o vzdálenost dvou vrcholů této krychle. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z těchto vrcholů zvolíme v počátku souřadnic, je to bod A (0; 0; . . . ; 0). Druhý je ten z vrcholů naší krychle, který má od tohoto bodu A největší vzdálenost, což je zřejmě bod P (a; a; . . . ; a). Podle vzorce (5,1) vychází pak pro nejdelší úhlopříčku n-rozměrné krychle o hraně délky a výsledek $AP = a\sqrt{n}$.

Závěrem upozorňuji, že změnou soustavy souřadnic v prostoru E_n mohou se změnit i podmínky (6,6), i když krychle se pochopitelně co do tvaru nezmění. My jsme zde vyšetřovali jen zcela zvláštní polohu krychle, jejíž jeden vrchol byl v počátku souřadnic a jejíž hrany z něho vycházející ležely v osách souřadných; i tak jsme poznali některé vlastnosti krychle. Ale nic nám nebrání, abychom krychli neumístili v prostoru ještě nějak jinak, např. tak, že posuneme soustavu souřadnou do jiného místa v prostoru. Jednoduchý případ máme ve cvičení *6,2* až *6,4*.

Cvičení

6,1. Kolik hran má čtyřrozměrná krychle?

6,2. Přesvědčte se, že všechny body $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ v prostoru E_n, pro jejichž souřadnice platí

$$|x_1| \leqq 1, |x_2| \leqq 1, \ldots, |x_n| \leqq 1,$$

vytvoří n-rozměrnou krychli. Určete délku její hrany!

6,3. Určete souřadnice vrcholů krychle ze cvičení *6,2*. Kolik je vrcholů?

6,4. Jak dlouhá je nejdelší úhlopříčka krychle ze cvičení *6,2*?