4. kapitola

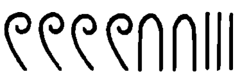
ČÍSELNÉ SOUSTAVY A KRITÉRIA DĚLITELNOSTI

Při vyjadřování myšlenek záleží nejen na tom, abychom znali přesně obsah a rozsah různých pojmů, označených různými názvy, ale i těch různých pojmů, které jsou označeny týmž názvem. Proto jsme vás již v kap. 1 upozornili na dvojí význam termínu „dělitel". Často je též třeba si uvědomit, zda se nějaký výrok týká určitého pojmu nebo jeho názvu či značky (symbolu). Tak např. pravdivý výrok „8 je číslo sudé" se týká čísla 8, kdežto jiný pravdivý výrok „8 je arabská číslice" se týká matematické značky čísla 8, tj. číslice (cifry), sloužící k označení čísla. V dalším textu tohoto článku vás upozorníme ještě na to, že výrok „8 je jednociferné číslo" je rovněž pravdivý, když jeho význam budeme chápat ve smyslu určité úmluvy. Nesprávné chápání rozdílu mezi pojmy číslo a zápis čísla číslicemi vede někdy k používání nesprávných rčení, jako např. „číslo zakončené dvěma nulami". Takovým rčením se musíme vyhýbat, chceme-li se učit přesně myslit i vyjadřovat.

Když se v počátcích lidské kultury učili lidé počítat, užívali k označování malých přirozených čísel samostatných názvů i grafických nebo jiných značek. Přirozených čísel je však nekonečně mnoho a proto brzy vznikla potřeba sdružovat určitý počet jednotek do jednotek vyšších řádů, vytvářených podle určitých pravidel, a pomocí jejich názvů i značek vytvářet názvy i značkové výrazy pro označování větších čísel. Tak vznikaly číselné soustavy o různém základu. Nejčastěji se užívalo číselné soustavy desítkové (dekadické), což zřejmě souvisí s tím, že prsty na rukou byly nejčastěji používanou počtářskou pomůckou lidí na primitivním stupni kultury.

Kdyby se byl člověk vyvinul jako tvor s šesti prsty na každé ruce, pak bychom asi dnes používali nejvíce číselné soustavy dvanáctkové, která by měla některé výhody proti soustavě desítkové; číslo 12 má totiž tu vlastnost, že má v množině všech přirozených čísel šest dělitelů, tj. čísla 1, 2, 3, 4, 6, 12, zatímco číslo 10 má v téže množině jen čtyři dělitele, tj. čísla 1, 2, 5, 10. V dávnověku se užívalo i jiných číselných soustav. Tak např. Babylóňané, kteří dosáhli v matematice obdivuhodných výsledků, užívali soustavy šedesátkové; dokladem toho jsou v praxi dosud užívané soustavy časových a úhlových jednotek. V posledním čtvrtstoletí nabyla značného významu pro technickou praxi též číselná soustava dvojková (dyadická) pro některé výhody, jichž je možno využít při konstrukci číslicových elektronických počítacích strojů.

Již v dávnověku se k zapisování některých přirozených čísel používalo jednoduchých značek a k zapisování ostatních přirozených čísel složených značkových výrazů, které se vytvářely z jednoduchých značek podle určitých skladebních principů. Nejjednodušší byl princip adiční (sčítací), při jehož používání řada za sebou napsaných značek označovala číslo rovné součtu čísel, označených jednotlivými značkami. Jako příklad uvádíme v obr. 2 vyznačený egyptský hieroglyfický zápis čísla 423. V něm každá z prvních čtyř značek označuje číslo 100, každá z dalších dvou číslo 10 a každá z posledních tří číslo 1.



Obr. 2.

Při zapisování čísel se dříve užívalo i jiných skladebních principů, z nichž jistě znáte princip, který se uplatňoval při zapisování čísel římskými číslicemi. Pro vývoj matematiky nabyl však největšího významu princip poziční, jehož se částečně užívalo již před 2000 lety. V VIII. a IX. století propracovali užívání tohoto principu ve spojení s číselnou soustavou desítkovou matematikové indičtí. Znalost indického způsobu zapisování čísel, jehož dnes užívá celý kulturní svět ve formě jen málo změněné, přenesli do Evropy především Arabové, a proto snad nepřekvapuje, že původní indické číslice se nyní označují často jako arabské. V dalších odstavcích se zmíníme stručně o užívání pozičního principu při zapisování čísel v libovolné číselné soustavě, jejímž základem může být kterékoli přirozené číslo $z > 1$. Zapisování přirozených čísel tímto způsobem se opírá o následující větu.

T$_{19}$ *Je-li dáno přirozené číslo $z > 1$, pak každé přirozené číslo y je možno vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $y = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, (4,1), v němž c_i $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ jsou celá nezáporná čísla, pro která platí $c_i < z$, $c_n \neq 0$.*

Důkaz věty **T$_{19}$** snadno provedeme užitím věty **T$_{11}$**, přičemž se ukáže, jakým způsobem lze najít rozklad čísla y ve tvaru (4,1), který pro stručnost budeme někdy označovat $R(z)$ a nazývat *rozvoj přirozeného čísla y v soustavě z–adické*, tj. např. dyadické (dvojkové), triadické (trojkové) atd. Číslo z nazýváme *základ soustavy*.

Podle věty **T$_{11}$** existuje jediná dvojice takových čísel k_1, c_0, že platí

$$y = k_1 z + c_0, \; 0 \leqq c_0 < z. \tag{4,2}$$

Určíme-li dělením čísla k_1, c_0, pak lze najít taková čísla k_2, c_1, že platí

$$k_1 = k_2 z + c_1, 0 \leqq c_1 < z. \qquad (4,3)$$

Po dosazení $k_1 = k_2 z + c_1$ do rovnosti (4,2) dostaneme $y = k_2 z^2 + c_1 z + c_0$. Není-li k_2 menší než z, pokračujeme obdobně v hledání rozkladu $k_2 = k_3 z + c_2$, až dospějeme nakonec k rovnosti $k_n = k_{n+1} z + c_n$, kde $k_{n+1} = 0$, a tedy $k_n = c_n$, čímž dospějeme též k hledanému rozvoji $R(z)$ uvedenému v (4,1). Ukážeme hledání rozvoje $R(z)$.

Příklad 17. Najděte rozvoj čísla 2642 v soustavě pětkové. Užitím postupu naznačeného výše dostaneme tyto rovnosti:

1) $2642 = 528.5 + 2$; 2) $528 = 105.5 + 3$; 3) $105 = 21.5 + 0$; 4) $21 = 4.5 + 1$; 5) $4 = 0.5 + 4$.

Tak jsme našli čísla $c_0 = 2$, $c_1 = 3$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 4$ pro hledaný rozvoj $2642 = 4.5^4 + 1.5^3 + 0.5^2 + 3.5 + 2$.

Danou úlohu můžeme řešit též jinak, zejména máme-li po ruce tabulku mocnin 5^n. Zjistíme-li, že dané číslo leží v intervalu uzavřeném dvěma po sobě jdoucími mocninami čísla 5, tj. $5^4 \leqq 2642 \leqq 5^5$, snadno najdeme dělením (se zbytkem) $2642 = 4.5^4 + 142$; tím je nalezen první sčítanec rozvoje 4.5^4. Ze vztahu $5^3 \leqq 142 \leqq 5^4$ najdeme snadno $142 = 1.5^3 + 17$, čímž je nalezen druhý hledaný sčítanec 1.5^3. Poněvadž $5^1 \leqq 17 \leqq 5^2$, platí $17 = 3.5 + 2$, čímž jsou nalezeny zároveň poslední dva sčítance hledaného rozvoje. Zapsání sčítance 0.5^2 do hledaného rozvoje nepotřebuje jistě vysvětlení, má-li být v rozvoji vyznačen i ten sčítanec, který je násobkem mocniny 5^2.

Příklad 18. Vyhledejte rozvoj $R(z)$ čísla 22223 v číselné soustavě o základu $z = 12$.

Postupným dělením číslem 12 najdeme tyto rovnosti:

1) $22223 = 1851 . 12 + 11$; 2) $1851 = 154 . 12 + 3$; 3) $154 = 12 . 12 + 10$; 4) $12 = 1 . 12 + 0$; 5) $1 = 0 . 12 + 1$. Tak jsme našli čísla $c_0 = 11$, $c_1 = 3$, $c_2 = 10$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$ pro hledaný rozvoj $22223 = 1 . 12^4 + 0 . 12^3 + 10 . 12^2 + 3 . 12 + 11$.

Je-li dáno přirozené číslo $z > 1$, pak posloupností celých nezáporných čísel $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ vyhovujících podmínkám věty T_{19}, je jednoznačně určen rozvoj $R(z)$ čísla y. Stručný zápis těchto číselných údajů charakterizujících určité číslo můžeme provést ve formě

$$(\overline{|c_n}\;\overline{|c_{n-1}}\;\overline{|c_{n-2}}\ldots\overline{|c_2}\;\overline{|c_1}\;\overline{|c_0})_z, \qquad (4,4)$$

kde $\overline{|c_0}$, $\overline{|c_1}$, $\overline{|c_2}$, $\ldots$, $\overline{|c_n}$ jsou číslice (cifry), tj. značky pro čísla $c_0, c_1, \ldots, c_n$, zapsané v závorce v pořadí odprava doleva, přičemž k závorce je připojen index z, udávající základ číselné soustavy. Při zápisech čísel ve formě (4,4) v kterékoli číselné soustavě zvolíme si za značky čísel menších než 10 arabské číslice 0, 1, 2, 3, ..., 9. Pro čísla $c_i \geqq 10$ měli bychom si vymyslit další jednoduché značky (číslice) a stanovit pevně jejich význam. Tak se to dělá v některých knížkách při výkladu o zapisování čísel užitím pozičního principu v různých číselných soustavách. Abychom si nemusili pamatovat význam nově zaváděných značek, užijeme symbolů $\overline{|10}$, $\overline{|11}$, $\overline{|12}$, ... jako značek pro čísla 10, 11, 12, ... Konečně se ještě dohodneme, že při zápisu čísla v soustavě desítkové vynecháme závorku s indexem 10, tj. zápis 375 znamená totéž jako zápis $(375)_{10}$.

Užitím výsledků nalezených v příkladech 17 a 18 můžeme tedy zapsat tyto rovnosti:

$2642 = (41032)_5$, $22223 = (10\,\overline{|10}\,3\,\overline{|11})_{12}$.

V jazyce mluveném čteme ovšem zápis $(41032)_5$ asi takto: číslo zapsané číslicemi 4, 1, 0, 3, 2 v soustavě pětkové. Obdobně čteme zápisy čísel i v jiných číselných soustavách. Přitom platí úmluva, že vynechání slov „v soustavě pětkové“ nebo obecně „v soustavě z–adické“ znamená, že jde o zápis čísla v soustavě desítkové.

Platí-li pro rozvoj přirozeného čísla $y = R(z)$ podmínky věty $\mathbf{T}_{11}$, zejména podmínka $c_n \neq 0$, a zapisujeme-li přirozené číslo číslicemi podle vzoru (4,4), pak lze každé přirozené číslo zapsat v každé soustavě právě jedním způsobem. Zápis se přitom skládá z $n + 1$ číslic, mezi nimiž nemůže být na prvním místě číslice 0. O přirozeném čísle y, které je takto zapsáno v soustavě z–adické k ciframi (k je číslo přirozené), říkáme, že je to *číslo k–ciferné v soustavě z–adické*. Užijeme-li zkráceného názvu *číslo k–ciferné*, rozumí se tím, že jde o číslo k–ciferné při jeho zápisu v desítkové soustavě.

Čtyřciferné číslo 2642 je číslem pěticiferným v soustavě pětkové. Pěticiferné číslo 22223 je pěticiferné i v soustavě dvanáctkové, neboť každý ze symbolů $\overline{|10}$, $\overline{|11}$ musíme pokládat za číslici. Zapamatujme si, že podle naší úmluvy číslo 0 není jednociferné. I když to v této knížce nepotřebujeme, připomínáme to proto, že je to důležité pro správné chápání některých vět teoretické aritmetiky.

Snadným výpočtem si ověříme, že platí

$$(1000)_2 = (22)_3 = (20)_4 = (13)_5 = (12)_6 = (11)_7 = \\ = (10)_8 = (8)_9 = 8.$$

Z tohoto jednoduchého příkladu vidíme, že zápis téhož čísla osm může mít při zápisu v různých číselných soustavách (při užití pozičního principu) různý počet cifer a že může být zakončen různým počtem číslic 0. Rčení „zápis čísla má na konci číslici 0“ neměl by být nahrazován méně vhodným rčením „číslo má na konci nulu“.

Upustíme-li od podmínky $c_n \neq 0$ ve větě $\mathbf{T}_{19}$, tj. připustíme-li též $c_n = 0$ s příslušným důsledkem pro zápis čísla podle vzoru (4,4), lze každé přirozené číslo v téže soustavě zapsat více než jedním způsobem. V tom případě zřejmě platí např. $24 = 024 = 0024 = 00024 = \ldots$. S tímto způsobem zapisování přirozených čísel se ve škole zpravidla nesetkáváme kromě jedné výjimky, kterou stručně připomeneme.

Číslo 38752 můžeme rozložit v součet dvou sčítanců $38700 + 52$, z nichž druhý sčítanec můžeme charakterizovat názvem číslo zapsané posledním dvojčíslím 38752. Obdobně číslo 752 můžeme charakterizovat jako číslo zapsané posledním trojčíslím čísla 38752. Číslo zapsané posledním dvojčíslím čísla 1900024 je 24, číslo zapsané posledním trojčíslím čísla 1900024 je číslo $024 = 24$, číslo zapsané posledním čtyřčíslím čísla 1900024 je číslo $0024 = 24$. V tomto případě číslo zapsané posledním dvojčíslím, trojčíslím i čtyřčíslím je totéž číslo 24. *Posledním k–číslím daného čísla rozumíme zápis čísla skládajícího se z posledních k číslic daného čísla při jejich nezměněném pořadí.*

V praktickém životě se užívá číslicových zápisů majících tvar zápisů přirozených čísel často též k označování různých prvků některých množin, jako např. bankovek, losů, občanských průkazů, telefonních stanic aj. V číslicovém označení některých předmětů bývají obsažena důležitá technická data o těch předmětech, které označují, jako např. u lokomotiv aj.

Příklad 19. Která přirozená čísla jsou v číselné soustavě o základu z zapsána n jedničkami? Numerický výpočet proveďte pro $n = 12$, $z = 2$, $z = 3$.

Označme ${}^{z}j_n$ přirozené číslo, které je v soustavě o základu z zapsáno n jedničkami, tj. tedy

$${}^{z}j_n = 1 . z^{n-1} + 1 . z^{n-2} + \ldots + 1 . z^2 + 1 . z + 1.$$

Znásobíme-li tuto rovnost číslem $z - 1$, dostaneme

$$ {}^{z}j_n(z-1) = (z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \ldots + z_2 + $$
$$ + z + 1)(z-1) = z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^3 + $$
$$ + z^2 + z - z^{n-1} - z^{n-2} - z^2 - z - 1 = z^n - 1. $$

Poněvadž $z > 1$, je $z - 1 \neq 0$, takže předcházející rovnost můžeme dělit číslem $z - 1$. Dostaneme tak

$$ {}^{z}j_n = (z^n - 1) : (z - 1). $$

Je-li $n = 12$, pak užitím tab. II. dostaneme snadno: a) když $z = 2$, pak ${}^{2}j_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$; b) když $z = 3$, pak ${}^{3}j_{12} = (3^{12} - 1) : (3 - 1) = 531440 : 2 = 265720$.

Příklad 20. Je dána posloupnost přirozených čísel a_n, v níž zápis n–tého členu v desítkové soustavě má $2n$ takových cifer, že na prvních n místech jsou čtyřky a na zbývajících n místech dvojky. Dokažte, že libovolný člen a_n této posloupnosti je součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel.

Označíme-li j_n číslo, které v desítkové soustavě je zapsáno n jedničkami, pak $9\,j_n$ je číslo zapsané n devítkami a proto $9\,j_n + 1 = 10^n$ (k tomuto vztahu je možno dojít i jinou cestou; viz př. 19). V posloupnosti $a_1 = 42$, $a_2 = 4422$, $a_3 = 444222, \ldots$, je možno a_n vyjádřit takto: $a_n = j_n . 4 . 10^n + j_n . 2 = j_n . 4\,(9j_n + 1) + j_n . 2 = 36j_n^2 + 6j_n = 6j_n\,(6j_n + 1)$. Tento součin je zřejmě součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž první, tj. číslo $6j_n$ je v desítkové soustavě zapsáno n šestkami. Platí tedy: $a_1 = 6 . 7$, $a_2 = 66 . 67$, $a_3 = 666 . 667, \ldots$

Příklad 21. Vypočtěte přirozené číslo z, pro které platí $(435)_z = (1352)_6$.
Daná úloha se snadno převede na řešení rovnice

$$ 4z^2 + 3z + 5 = 1 . 6^3 + 3 . 6^2 + 5 . 6 + 2. $$

Po snadné úpravě dostaneme rovnici $4z^2 + 3z - 351 = 0$, která má kořeny $9, -\frac{39}{4}$. Slovní úloze vyhovuje ovšem jen kořen $z = 9$.

V počtářské praxi máme často rozhodnout o tom, zda nějaké přirozené číslo je nebo není dělitelné jiným přirozeným číslem. Proto jsou užitečné poučky udávající charakteristický znak nebo souhrn znaků zkoumaného čísla, podle něhož můžeme tuto otázku rozhodnout rychleji než dělením. Takové poučky, jimž říkáme kritéria dělitelnosti, se zpravidla opírají o vlastnosti zápisu vyšetřovaných čísel v číselné soustavě z-adické, nejčastěji ovšem dekadické. V dalším textu vám ukážeme odvození některých kritérií dělitelnosti, která budou obecněji formulována než kritéria dělitelnosti, která již znáte ze školy.

Máme-li vyšetřit dělitelnost čísla $y = \mathrm{R}(z)$, kde $\mathrm{R}(z)$ je rozvoj vyznačený v (4,1) číslem z^k, můžeme využít toho, že číslo y lze napsat ve tvaru součtu dvou sčítanců

$$y = s_p + s_k, \tag{4,5}$$

kde s_p je součet počátečních $n - k + 1$ členů rozvoje $\mathrm{R}(z)$ a s_k součet posledních k sčítanců rozvoje $\mathrm{R}(z)$. Platí tedy $s_p = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_k z^k =$

$$= z^k(c_n z^{n-k} + \ldots + c_k), \tag{4,6}$$

$$s_k = c_{k-1} z^{k-1} + c_{k-2} z^{k-2} + \ldots + c_0 \leqq (z-1)\, z^{k-1} + (z-1)\, z^{k-2} + \ldots + (z-1)\, z + (z-1) = z^k - 1 < z^k.$$

Poněvadž v součtu $y = s_p + s_k$ je první sčítanec zřejmě dělitelný číslem z^k, záleží zbytek čísla y při dělení číslem z^k jen na dělitelnosti čísla $s_k < z^k$. Nezáporné číslo s_k může být proto dělitelné číslem z^k jen tehdy, když $s_k = 0$, což může nastat právě jen tehdy, když $c_{k-1} = c_{k-2} = \ldots =$

$= c_1 = c_0 = 0$ (viz cvič. **1,4**). Odtud však snadnou úvahou plyne platnost následující věty.

T_{20} *Přirozené číslo y je dělitelné přirozeným číslem z^k právě tehdy, když v zápisu čísla y v číselné soustavě z–adické jsou na posledních k místech jen číslice* 0.

Podle této věty můžeme snadno rozhodnout, že např. číslo $(1101010000)_2$ je dělitelné číslem $2^4 = 16$, číslo $(341000)_5$ je dělitelné číslem $5^3 = 125$, číslo $(140200)_7$ je dělitelné číslem $7^2 = 49$ apod. Platí tedy i speciální kritéria dělitelnosti, jichž často užíváte ve škole pro čísla zapsaná v dekadické soustavě: a) Je-li dáno přirozené číslo aspoň k–ciferným zápisem v desítkové soustavě, pak při jeho dělení číslem 10^k (k je číslo přirozené) dostaneme zbytek, který je v desítkové soustavě zapsán posledním k–číslím daného čísla. b) Přirozené číslo dané zápisem v desítkové soustavě je dělitelné číslem 10^k právě tehdy, když na všech posledních k místech jeho zápisu jsou číslice 0.

Je-li $z = 10$, pak číslo s_p (viz (4,6)) obsahuje činitele $10^k = (2.5)^k = 2^k.5^k$ a proto $2^k \mid s_p$, $5^k \mid s_p$. Zbytek, který dostaneme při dělení čísla y číslem 2^k nebo 5^k, je tedy stejný jako zbytky, které dostaneme při dělení druhého sčítance s_k čísly 2^k nebo 5^k (podle věty **T_{15}**). Platí tedy následující dvě věty **T_{21}** a **T_{22}** a jejich důsledky.

T_{21} *Dělíme-li číslem 2^k jednak aspoň k–ciferné přirozené číslo y, jednak číslo vyznačené jeho posledním k–číslím, pak při obojím dělení dostaneme týž zbytek.*

Důsledek. *Dané přirozené číslo je dělitelné číslem 2^k právě tehdy, když je číslem 2^k dělitelné číslo zapsané posledním k–číslím v zápisu daného čísla.*

T_{22} *Dělíme-li číslem 5^k jednak aspoň k-ciferné přirozené číslo y, jednak číslo vyznačené jeho posledním k-čislím, pak při obojím dělení dostaneme týž zbytek.*

Důsledek. *Dané přirozené číslo je dělitelné číslem 5^k právě tehdy, když je číslem 5^k dělitelné číslo zapsané posledním k-čislím v zápisu daného čísla.*

Tak např. číslo $y = 790235$ při dělení číslem $2^1 = 2$ dává (podle věty T_{21}) týž zbytek jako číslo 5 při dělení dvěma, tj. 1; při dělení čísla y číslem $2^2 = 4$ dostaneme týž zbytek jako při dělení čísla 35 číslem 4, tj. 3; při dělení čísla y číslem $2^3 = 8$ dostaneme týž zbytek jako při dělení čísla 235 číslem 8, tj. 3; při dělení čísla y číslem $2^4 = 16$ dostaneme týž zbytek jako při dělení čísla $0235 = 235$ číslem 16, tj. 11. Dělíme-li číslo y postupně čísly $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$ dostaneme podle věty T_{22} zbytky 0, 10, 110, 235.

Nechť je dáno určité přirozené číslo zápisem v dekadické soustavě, který odpovídá dekadickému rozvoji

$$c_n . 10^n + c_{n-1} . 10^{n-1} + \ldots + c_2 10^2 + c_1 10 + c_0, \quad (4,7)$$

kde čísla $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1, c_0$ jsou určena jednotlivými ciframi zápisu čísla v desítkové soustavě. Utvořme nyní funkci proměnné z, která vznikne z výrazu (4,7), když v něm místo čísla 10 v mocninách 10^n píšeme všude z. Dostaneme tedy funkci

$$R(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0. \quad (4,8)$$

Dosadíme-li $z = 1$ do výrazu $R(z)$, dostaneme číslo $R(1)$, pro něž platí $R(1) = c_n . 1^n + c_{n-1} . 1^{n-1} \ldots + c_2 . 1^2 + c_1 . 1 + c_0 = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} + c_n$. Toto číslo $R(1)$ je tedy součtem všech čísel, která jsou označena jednotlivými ciframi daného čísla při jeho zápisu v desítkové soustavě. Někdy se pro označení tohoto čísla užívá názvu ciferný součet, který není dost vhodný, poněvadž může snadno vést k nesprávnému názoru, že je možno sčítat cifry (číslice). Název je však přípustný, když přijmeme následující definici.

D$_9$ *Ciferný součet daného čísla nazýváme součet všech čísel, která jsou označena jednotlivými ciframi zápisu daného čísla (v desítkové soustavě).*

Funkční hodnoty R(10) i R(1), které představují dané číslo a jeho ciferný součet, jsou v určitém vzájemném vztahu, jehož využijeme pro kritéria dělitelnosti přirozených čísel čísly 3 a 9. Číslo 1 a číslo $10 = 3.3 + 1$ patří do téže zbytkové třídy ${}^1C_3$ a proto čísla R(1) a R(10) musí patřit podle věty **T$_{18}$** rovněž do stejné zbytkové třídy ${}^rC_3$. Poněvadž číslo 1 a číslo $10 = 9.1 + 1$ patří do téže zbytkové třídy ${}^1C_9$, musí do téže zbytkové třídy ${}^rC_9$ patřit též čísla R(1) a R(10). Tak jsme ukázali odvození následujících vět **T$_{23}$** a **T$_{24}$**, které mají vám už známé důsledky.

T$_{23}$ *Dělíme-li číslem 3 dané číslo i jeho ciferný součet, pak v obojím případě dostaneme stejný zbytek.*

Důsledek: *Přirozené číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je třemi dělitelný jeho ciferný součet.*

T$_{24}$ *Dělíme-li číslem 9 dané číslo i jeho ciferný součet, pak v obojím případě dostaneme stejný zbytek.*

Důsledek: *Přirozené číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když je devíti dělitelný jeho ciferný součet.*

Jestliže do vzorce (4,8) dosadíme $z = -1$, dostaneme funkční hodnotu $R(-1) = c_n.(-1)^n + c_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + c_2(-1)^2 + c_1.(-1)^1 + c_0 = c_0 - c_1 + c_2 + \ldots + (-1)^{n-1}.c_{n-1} + (-1)^n.c_n = (c_0 + c_2 + c_4 + \ldots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \ldots)$.

Číslo -1 a číslo $10 = 11 - 1$ patří do téže zbytkové třídy ${}^{-1}C_{11}$ a proto podle věty $\mathbf{T}_{18}$ patří čísla R(-1) a R(10) do stejné zbytkové třídy ${}^{r}C_{11}$. Odtud plyne snadnou úvahou následující věta $\mathbf{T}_{25}$ i její důsledek.

$\mathbf{T}_{25}$ *Dělíme-li číslem* 11 *dané číslo i součet čísel vyznačených jednotlivými ciframi na místech sudého řádu zmenšený o součet čísel vyznačených ciframi na místech lichého řádu daného čísla, pak oba zbytky jsou stejné.*

Důsledek: *Přirozené číslo je dělitelné jedenácti právě tehdy, když je jedenácti dělitelný součet čísel označených ciframi na místech sudého řádu zmenšený o součet čísel označených ciframi na místech lichého řádu.*

Tak např. číslo $s = 2597778$ je dělitelné 3 i 9, neboť číslo $8 + 7 + 7 + 7 + 9 + 5 + 2 = 45$ je dělitelné 3 a 9; poněvadž číslo $8 - 7 + 7 - 7 + 9 - 5 + 2 = 7$, musíme při dělení čísla s číslem 11 dostat zbytek 7.

Vět $\mathbf{T}_{24}$ a $\mathbf{T}_{25}$ můžeme využít k rychlému určení zbytků při dělení daných čísel čísly 9 a 11 při tzv. devítkové nebo jedenáctkové zkoušce správnosti nějakého numerického výpočtu, jak jsme je ukázali v příkladě 16 předcházející kapitoly. Ukážeme takovou zkoušku ještě na jednom jednoduchém příkladě.

Příklad 22. Proveďte devítkovou i jedenáctkovou zkoušku správnosti výpočtu součinu $3954 . 657 = 2957778$.

a) Při devítkové zkoušce zjistíme, že první činitel patří do zbytkové třídy ${}^{3}C_{9}$ a druhý do třídy ${}^{0}C_{9}$. Proto jejich součin patří do téže zbytkové třídy jako číslo $3 . 0 = 0$. Skutečně výsledek má ciferný součet $8 + 7 + 7 + 7 + 5 + 9 + 2 = 45$, který je dělitelný devíti. Tato zkouška podporuje domněnku o správnosti výpočtu daného součinu.

b) Při jedenáctkové zkoušce zjistíme, že první činitel součinu patří do zbytkové třídy ${}^{5}C_{11}$, neboť číslo $4 - 5 + 9 - 3 = 5$ patří do třídy ${}^{5}C_{11}$. Druhý činitel patří do zbytkové třídy ${}^{8}C_{11}$, neboť $7 - 5 + 6 = 8$ náleží do třídy ${}^{8}C_{11}$. Proto součin daných čísel musí patřit do téže třídy (mod 11) jako číslo $5 . 8 = 40$, které patří do třídy ${}^{7}C_{11}$. V úloze udaný výsledek 2957778 náleží (mod 11) do téže třídy jako číslo $8 - 7 + 7 - 7 + 5 - 9 + 2 = -1$, tj. do třídy ${}^{-1}C_{11}$, což je v rozporu se zjištěním, že součin patří do třídy ${}^{7}C_{11}$. Tento nesouhlas ukazuje, že výpočet nebyl správně proveden. Propočtením zjistíme, že daný součin $s = 3954 . 657 = 2597778$, který patří do třídy ${}^{7}C_{11}$, jak jsme již dříve zjistili.

Povšimněme si, že v úloze udaný nesprávný výsledek se od správného výsledku liší změněným pořadím dvou po sobě jdoucích číslic. V tom případě je ciferný součet obou čísel stejný a proto se chyba výpočtu při devítkové zkoušce neprojevila. Provedení devítkové a jedenáctkové zkoušky zvyšuje pravděpodobnost, že případná chyba v numerickém výpočtu bude objevena.

Cvičení

4,1 Určete neznámé z, pro něž platí následující rovnosti: a) $(624)_z = (2222)_5$; b) $(1004)_z = (20110)_3$; c) $(10203)_z = (1100110)_2$.

4,2. Jestliže zápisy dvou přirozených čísel v dekadické soustavě se liší jen pořadím, ve kterém jsou uspořádány cifry v obou zápisech, pak druhá mocnina rozdílu obou čísel je násobkem čísla 81. Dokažte toto tvrzení.

4,3. Úvahou o vlastnostech soustavy dyadické (dvojkové) dokažte, že užitím sady závaží 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g, 64g, 128g je možno zvážit každé těleso, jehož váha je vyjádřena v gramech celými čísly od 1 do 255.

4,4. V každé číselné soustavě o základu $z \geq 5$ značí zápisy $(144)_z$, $(441)_z$ čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel. Dokažte.

4,5. Ukažte, že je možné, aby selhala devítková i jedenáctková zkouška správnosti při kontrole nějakého výpočtu.

4,6. V číselné posloupnosti $\{a_n\}$ je člen a_n součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž menší je v desítkové soustavě zapsáno n trojkami. Dokažte, že zápis čísla a_n v desítkové soustavě má $2n$ cifer, z nichž prvních n cifer jsou samé jedničky, zatímco zbývající cifry jsou samé dvojky.