Analytická geometrie a nerovnosti

1. kapitola. Předběžné poznámky. Polorovina

In: Karel Havlíček (author): Analytická geometrie a nerovnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 4–14.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403616

1. kapitola

PŘEDBĚŽNÉ POZNÁMKY POLOROVINA

Zopakujme si nejdřív některé věci, které známe ze školy. Příslušná tvrzení si uvedeme většinou bez důkazů a očíslujeme si je jako věty, abychom se na ně mohli v dalším textu snadno odvolávat.

Především poznamenáváme, že slovo číslo znamená všude v této knížce *číslo reálné;* přídavné jméno reálné budeme pro stručnost vynechávat. Čísla budeme označovat malými písmeny latinské abecedy, tedy a, b, c, ..., k, ..., q, ..., x, y, z. Tak tomu je hned v prvních větách, jejichž obsah jistě snadno pochopíte, zvláště když si příslušná čísla znázorníte jako body na ose číselné, tj. na přímce.

Symbol $a < b$ ovšem znamená, že číslo a je menší než číslo b; podobně $c > d$ znamená, že číslo c je větší než číslo d. Je vám známo, že jsou-li a, b dvě pevně zvolená čísla, pak pro ně platí právě jeden ze vztahů

$$a < b,\ a = b,\ a > b. \tag{1,1}$$

Symboly $>$, $<$ představují tzv. *ostré* nerovnosti. Vedle toho zavádíme v matematice i *neostré* nerovnosti; symbol $a \leqq b$ znamená, že číslo a je menší nebo rovno číslu b. Srozumitelnější je, když řekneme, že symbol $a \leqq b$ znamená, že pro čísla a, b platí buď první, nebo druhý ze vztahů (1,1). Někdy totiž nemůžeme předem říci, který z obou uvedených vztahů $a < b$ a $a = b$ platí; víme jen, že neplatí vztah třetí, že neplatí $a > b$; to právě zapisujeme stručně symbolem $a \leqq b$. Podobně zápis $a \geqq b$ znamená, že neplatí $a < b$, že tedy je buď $a > b$, nebo $a = b$. Neostré nerovnosti nebyly dřív tak často užívány jako dnes, a proto starší lidé na ně nejsou zvyklí; těžko pak chápou například správnost zcela pravdivého zápisu $4 \leqq 4$, ačkoliv neříká nic jiného, než že číslo 4 není větší než 4.

Přistupme už k prvním větám.

Věta 1,1. *Je-li $a < b$, $b < c$, je také $a < c$.*

Věta 1,2. *Je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$ pro každé c.*

Věta 1,3. *Je-li $a < b$, je také $a - c < b - c$ pro každé c.*

Obě poslední věty si snadno zapamatujeme tímto heslem: smysl nerovnosti zůstane zachován, přičteme-li (nebo odečteme-li) na každé její straně totéž číslo.

Věta 1,4. *Je-li $a < b$, $c < d$, je také $a + c < b + d$.*

To se často vyjadřuje slovy, že nerovnosti stejného smyslu je dovoleno sčítat.

Věta 1,5. *Je-li $a < b$ a $c > 0$, je také $ac < bc$.*

Aspoň zde si uveďme důkaz. Z předpokladu $a < b$ plyne podle věty 1,3, že je $b - a > 0$. Součin obou kladných čísel $(b - a)$. c je ovšem číslo kladné, je tedy $(b - a) . c > 0$ a podle věty 1,2 je pak $bc > ac$, jak tvrdí naše věta.

Větu 1,5 si zapamatujeme slovy, že smysl nerovnosti zůstane zachován, znásobíme-li obě její strany týmž *kladným* číslem. Naproti tomu násobení *záporným* číslem má za následek obrácení smyslu nerovnosti, jak je přesně formulováno v další větě, jejíž důkaz provedete snadno podle předcházejícího sami.

Věta 1,6. *Je-li* $a < b$, $c < 0$, *je* $ac > bc$.

Dělení nerovnosti nějakým číslem $d \neq 0$ je už v podstatě obsaženo ve větách 1,5 a 1,6, protože dělit číslem d znamená totéž jako násobit číslem $c = \frac{1}{d}$. Uvedeme to už stručně:

Věta 1,7. *Je-li* $a < b$, $d > 0$, *je* $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.

Věta 1,8. *Je-li* $a < b$, $d < 0$, *je* $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$.

Někdy lze výhodně použít této věty:

Věta 1,9. *Je-li* $0 < b < a$, *je* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Zde si stačí k důkazu uvědomit, že $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ a že z daných předpokladů plyne $a - b > 0$ i $ab > 0$.

Z analytické geometrie si připomeneme některé tvary rovnice přímky. Užijeme jen pravoúhlých kartézských souřadnic x, y v rovině, přičemž se zásadně smluvíme na tom, že souřadnicovou osu x budeme kreslit vodorovně; z geometrického hlediska to není nutné, víme, že souřadnicové osy můžeme různě otáčet okolo počátku do nových poloh, ale v souvislosti s nerovnostmi se naše vyjadřování velmi zjednoduší, zvolíme-li osu x vodorovnou a osu y pak ovšem svislou. (Viz obr. 1.) Každá z těchto os souřadnicových není nic jiného než osa číselná; obě tyto osy mají společný počátek 0, totiž bod, jehož obě souřadnice jsou rovny nule. Na vodorovné ose x vynášejme souřadnice obyčejným měřítkem tak, že ze dvou bodů bude vlevo bod s menší souřadnicí a vpravo bod s větší souřadnicí. Tak vlevo od počátku jsou na ose x vyznačeny body, jejichž souřadnice x je záporná, vpravo od počátku jsou body s kladnou souřadnicí x. Na svislé ose y jsou podobně body s kladnou souřadnicí y zobrazeny nad počátkem a body se zápornou souřadnicí pod počátkem.

Má-li bod A v této soustavě souřadnice x, y, zapíšeme to stručně symbolem $A\,[x; y]$, nebo budeme hovořit jen o bodu $[x; y]$ atp. Je zřejmé, že body s kladnou souřadnicí y leží nad osou x, kdežto body ležící pod osou x mají souřadnici y zápornou. Podobně body ležící vpravo od osy y mají souřadnici x kladnou, body ležící vlevo od osy y mají souřadnici x zápornou. Toto pohodlné užívání slov „vlevo", „vpravo", „nad" a „pod" je umožněno právě tím, že jsme osu x zvolili vodorovnou.

Základním tvarem rovnice přímky bude pro nás v této knížce známý tvar směrnicový

$$y = k\,x + q, \tag{1,2}$$

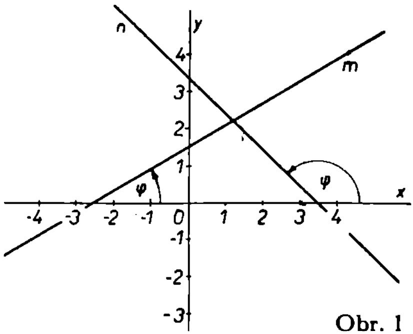
kde k a q jsou konstanty a x, y jsou proměnné souřadnice běžného bodu příslušné přímky. Nezapomeňme, že touto rovnicí lze vyjádřit každou přímku v rovině s výjimkou přímek rovnoběžných s osou y. Přitom číslo q se nazývá úsek vyťatý naší přímkou na ose y, neboť průsečík této přímky s osou y je bod $[0; q]$, jak se snadno přesvědčíte dosazením $x = 0$ do rovnice (1,2). Zvláště tedy přímka procházející počátkem a různoběžná s osou y má rovnici

$$y = k\,x\,; \tag{1,3}$$

Číslo k, vystupující v rovnicích (1,2) a (1,3), se nazývá *směrnice* příslušné přímky; ve škole se dokazuje, že je to tangens směrového úhlu φ této přímky, tedy

$$k = tg\varphi \; ; \tag{1,4}$$

v obr. 1 je názorně vyznačen směrový úhel φ přímky m a přímky n.



Obr. 1

Vodorovné přímky, tj. přímky rovnoběžné s osou x, jsou zřejmě charakterizovány tím, že jejich směrnice je rovna nule, tedy $k = 0$. Je-li $k \neq 0$, pak už příslušná přímka není vodorovná; to se projevuje tím, že souřadnice y bodu, který probíhá tuto přímku, se různě mění; buď roste, nebo klesá. Ale tím už jsme přivedeni k nerovnostem. Abychom si to přesně vyjádřili (viz dále věty 1,10 a 1,11), uvědomíme si, že pro $k \neq 0$ je na pravé straně rovnice (1,2) nebo (1,3) *funkce lineární* (proměnná x je tu v první mocnině). Znázorníte-li si graficky nějakou takovou funkci nebo třeba i jinou funkci (např. $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, atd.), víte, že někdy s rostoucím x roste v určitém úseku také y, tj. roste hodnota funkce; v tom případě mluvíme o funkci *rostoucí* (v určitém úseku). Jestliže při rostoucím x klesá příslušné y, nazývá se taková funkce *klesající* (v určitém úseku). Pro lineární funkci dokážeme snadno tyto dvě věty:

Věta 1,10. *Je-li* $k > 0$, *je lineární funkce daná rovnicí* (1,2) *všude rostoucí.*

Důkaz. Zvolme $x_1 < x_2$ a označme

$$y_1 = kx_1 + q, \; y_2 = kx_2 + q \, .$$

Protože je $k > 0$, je podle věty 1,5 také $kx_1 < kx_2$ a dále podle věty 1,2 také $kx_1 + q < kx_2 + q$ čili $y_1 < y_2$. Vzrostlo-li tedy x z x_1 na x_2, vzrostlo také příslušné y z y_1 na y_2.

Věta 1,11. *Je-li* $k < 0$, *je lineární funkce daná rovnicí* (1,2) *všude klesající.*

Důkaz je stejný jako v předcházejícím případě, jenom se místo věty 1,5 užije věty 1,6; pro $x_1 < x_2$ vyjde pak $y_1 > y_2$.

V obr. 1 jsou znázorněny oba případy uvedené ve větách 1,10 a 1,11. Přímka m tam nakreslená má směrový úhel φ ostrý, je zde tedy podle vzorce (1,4) $k > 0$; vskutku, roste-li x (tj. postupujeme-li po ose x zleva doprava), zvětšuje se neustále i souřadnice y příslušného bodu přímky m, funkce je rostoucí. Přímka n má $k < 0$ a znázorňuje na obr. 1 lineární funkci klesající.

Nahradíme-li v rovnici (1,2) znamení rovnosti znamením nerovnosti, přejde tato rovnice v nerovnost; vzniká otázka, jaký geometrický význam má taková nerovnost, čili které body mají tu vlastnost, že jejich souřadnice x, y splňují příslušnou nerovnost. Prozkoumáme to hned podrobně.

Věta 1,12. *Horní polorovina vyťatá přímkou o rovnici* (1,2) *je množina* (tj. souhrn) *všech bodů* $[x; y]$, *jejichž souřadnice splňují nerovnost*

$$y \geqq kx + q \qquad (1,5)$$

a obráceně každý bod, jehož souřadnice splňují tuto nerovnost, patří do zmíněné horní poloroviny.

Důkaz je bezprostřední. Je-li $M\ [x; y]$ vnitřní bod naší horní poloviny, leží pod ním na hraniční přímce m jediný bod $M_0\ [x; y_0]$, který má stejně velkou souřadnici x jako bod M (viz obr. 2); je tedy $y > y_0$ a zároveň $y_0 = kx + q$, neboť bod M_0 leží na přímce m o rovnici (1,2). Odtud vychází $y > kx + q$. Protože body dané hraniční přímky počítáme také k polorovině jí vyťaté, musíme i tyto body k naší polorovině přidat, a proto musíme ve vzorci (1,5) připustit neostrou nerovnost. Celý tento myšlenkový postup lze obrátit, čímž je věta 1,12 dokázána.

Všimněte si, že celá tato úvaha spočívá na tom, že svislá přímka vedená bodem M protíná hraniční přímku m poloroviny právě v jednom bodě M_0; to je umožněno tím, že přímka m o rovnici (1,2) není rovnoběžná s osou y. Jinak bychom ostatně nemohli mluvit o „horní" polorovině, vyťaté touto přímkou.

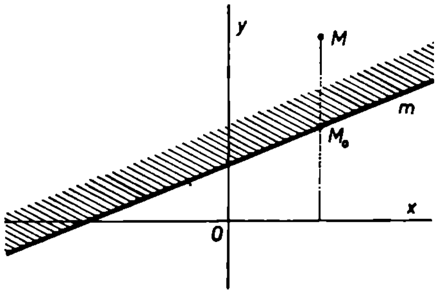
Pro dolní polorovinu, určenou přímkou m, tj. pro polorovinu opačnou k té, o níž hovoří věta 1,12, dokážete už obdobně sami tuto větu:

Věta 1,13. *Dolní polorovina vyťatá přímkou o rovnici* (1,2) *je množina všech bodů* $[x; y]$, *jejichž souřadnice splňují nerovnost*

$$y \leqq kx + q \tag{1,6}$$

a obráceně každý bod, jehož souřadnice splňují tuto nerovnost, patří do zmíněné dolní poloroviny.

Svislá přímka, kterou jsme nutně ve větách 1,12 a 1,13 vynechali, určuje ovšem také dvě poloroviny; jejich analytické vyjádření najdete snadno sami a dostanete tento výsledek:



Obr. 2

Věta 1,14. *Levá polorovina určená hraniční přímkou o rovnici $x = c$ (kde c je konstanta) je množina všech bodů, pro něž je $x \leqq c$, a pravá polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů, pro něž je $x \geqq c$.*

Analytické vyjádření polorovin pomocí příslušných nerovností budeme potřebovat i v případě, kdy hraniční přímka není určena rovnicí ve směrnicovém tvaru, ale kdy je určena jakoukoli lineární rovnicí. Velmi jednoduché případy přímek rovnoběžných s osami souřadnic však už přitom vynecháme, protože jsou zahrnuty ve větách 1,12 až 1,14.

Věta 1,15. *Předpokládejme, že v rovnici přímky*

$$ax + by + c = 0 \tag{1,7}$$

je $a > 0$, $b > 0$. Potom horní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, pro něž je

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{1,8}$$

a dolní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, pro něž je

$$ax + by + c \leqq 0\,. \tag{1,9}$$

Důkaz. Rovnici (1,7) přepišme na tvar $y = kx + q$ tím, že položíme $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$. Horní polorovina je pak podle věty 1,12 charakterizována nerovností (1,5), tj.

$$y \geqq -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$$

čili (viz větu 1,2)

$$\frac{ax}{b} + y + \frac{c}{b} \geqq 0.$$

Násobením číslem $b > 0$ na obou stranách dostáváme už odtud podle věty 1,5 žádanou nerovnost (1,8). Z věty 1,13 dostáváme užitím nerovnosti (1,6) stejným způsobem nerovnost (1,9). Protože myšlenkový postup lze v obou těchto případech obrátit, plyne z nerovností (1,8) a (1,9) charakterizace příslušných polorovin. Tím je věta 1,15 dokázána.

Věta 1,16. *Předpokládejme, že v rovnici přímky*

$$ax - by + c = 0 \tag{1,10}$$

je $a > 0$, $b > 0$. *Potom horní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů* $[x; y]$, *pro něž je*

$$ax - by + c \leqq 0, \qquad (1,11)$$

a dolní polorovina určená touto přímkou je množina všech bodů $[x; y]$, *pro něž je*

$$ax - by + c \geqq 0. \qquad (1,12)$$

Důkaz je v podstatě stejný jako u věty 1,15. Přepsáním rovnice (1,10) na směrnicový tvar teď dostáváme $y = kx + q$, kde $k = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{b}$ a odtud užitím vět 1,12 a 1,13 plynou opět nerovnosti (1,11) a (1,12).

Všimněte si rozdílu mezi větami 1,15 a 1,16. Větu 1,16 nebudeme v dalším potřebovat, je uvedena jen pro úplnost výkladu.

Pro další potřebu si připomeňme ze střední školy ještě vzorec pro rovnici přímky, která prochází daným bodem $[x_1; y_1]$ a má směrnici k, totiž

$$y - y_1 = k(x - x_1)\ ; \qquad (1,13)$$

proměnné souřadnice běžného bodu přímky jsou zde označeny x, y. Je-li přímka určena dvěma body $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$, je za předpokladu $x_1 \neq x_2$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1,14)$$

Příklady k tomu znáte ze školy, zde těchto vzorců použijte ve cvičeních 1,7 až 1,10.

Cvičení

1,1. Které z vět 1,1 až 1,4 zůstanou v platnosti, když je vyslovíme pro neostré nerovnosti místo pro ostré nerovnosti, tj. když některé nebo všechny symboly $<$ nebo $>$ v nich nahradíme symboly $\leqq$ nebo $\geqq$?

1,2. Zůstane ostrá nerovnost zachována, násobíme-li každou její stranu číslem nula?

1,3. Rozhodněte, zda je správná tato věta: Je-li $a \leqq b$, $c \geqq 0$, je $ac \leqq bc$.

1,4. Leží počátek v horní nebo v dolní polorovině vyťaté přímkou o rovnici a) $2x + 3y + 2 = 0$, b) $3x - 5y + 1 = 0$, c) $ax + by = 0$, kde $b \neq 0$?

1,5. Najděte analytické vyjádření polorovin vyťatých přímkou, danou tzv. úsekovou rovnicí $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde předpokládáme $p \neq 0$, $q \neq 0$. (Čísla p, q určují úseky vyťaté danou přímkou na osách souřadnicových.)

1,6. Jak se změní věty 1,12 až 1,16, nahradíme-li v nich všechny neostré nerovnosti ostrými nerovnostmi?

1,7. Přímka má směrový úhel $\varphi = 30°$ a prochází bodem $A\ [1; 3]$. Určete nerovnost charakterizující horní polorovinu vyťatou touto přímkou.

1,8. Určete nerovnost charakterizující dolní polorovinu vyťatou přímkou, která prochází body $[-4; 5]$ a $[1; 2]$.

1,9. Která polorovina je určena nerovností
a) $3x + 4y - 12 \geqq 0$, b) $x - y + 1 \geqq 0$, c) $x - 2 \leqq 0$.

1,10. Rozhodněte, zda lineární funkce znázorněná přímkou p je rostoucí nebo klesající a napište příslušnou rovnici v těchto případech: a) přímka p prochází body $[0; 0]$ a $[3; 1]$; b) přímka p má směrový úhel $\varphi = 135°$ a prochází bodem $[1; 0]$; c) přímka p prochází body $[-1; 2]$ a $[5; 2]$.