5. kapitola

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

V minulé kapitole jsme hovořili o funkcích, jejichž hodnoty jsou komplexní čísla. Viděli jsme, že pokud hodnoty proměnné zůstanou v oboru čísel reálných, nejde vcelku o nic nového. Rozdělíme-li takovou funkci na její reálnou a imaginární část, dostaneme prostě dvě reálné funkce.

Zajímavější případ však nastane, jestliže obě množiny v definici funkce jsou množiny komplexních čísel. Hovoříme pak o komplexních funkcích komplexní proměnné nebo stručněji o funkcích komplexní proměnné.

Definice. *Jsou-li M, K množiny komplexních čísel a je-li každému číslu z množiny M přiřazeno určitým předpisem právě jedno číslo z množiny K, říkáme, že je určena funkce (komplexní funkce komplexní proměnné) na množině M.*

Ostatní názvy užíváme stejně jako pro reálné funkce (obor, proměnná, hodnota funkce atd.). Přiřazení čísel obou množin nazýváme často zobrazením množiny M do množiny K.

Příklad 32. Rovnice $f(z) = |z|$ definuje funkci, která každému komplexnímu číslu z přiřazuje jeho prostou hodnotu. Co je oborem a množinou hodnot této funkce? Popište množinu hodnot funkce geometricky! Kolik existuje komplexních čísel z takových, že $f(z) = m$ (m je komplexní číslo)?

Řešení. Prostá hodnota je definována pro každé komplexní číslo. Je tedy oborem funkce celá množina komplexních čísel. Hodnotou funkce může však být jen nezáporné (reálné) číslo. Můžeme tedy říci, že funkcí $f(z) = |z|$ je celá rovina zobrazena na kladnou poloosu x (včetně počátku).

Je-li m komplexní číslo s nenulovou imaginární částí nebo číslo záporné, neexistuje žádné číslo z takové, že $f(z) = m$; je-li $m = 0$, existuje právě jedno takové číslo, $z = 0$. Je-li m kladné, je $f(z) = m$ pro všechna komplexní čísla, pro něž $|z| = m$; takových čísel je nekonečně mnoho. Všechna jsou znázorněna vektory o stejné velikosti, tj. vektory, jejichž koncový bod (při umístění v počátku) leží na kružnici o středu v počátku a poloměru m.

Příklad 33. Rovnice $g(z) = z + \mathrm{i}$ definuje funkci, jejímž oborem je celá množina komplexních čísel.

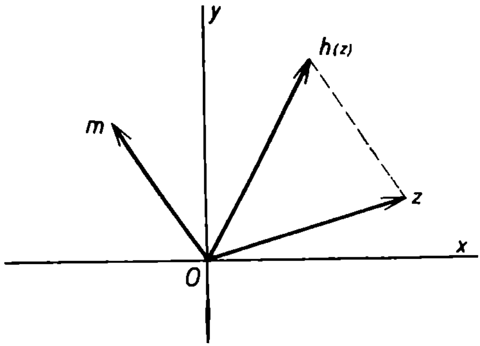
(a) Pro která čísla z je $g(z)$ reálné číslo?
(b) Pro které hodnoty proměnné je $g(z)$ ryze imaginární?
(c) Jak je zobrazena reálná a imaginární osa?

Řešení. (a) Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je $g(z) = x + (y + 1)\mathrm{i}$. Číslo $g(z)$ je reálné právě tehdy, je-li $\mathrm{Im}\, g(z) = 0$ čili $y = -1$. Funkce $g(z)$ nabývá tedy reálných hodnot pro všecka komplexní čísla, jejichž imaginární část je rovna -1.

(b) Má-li být $g(z)$ ryze imaginární číslo, musí být podle předešlého $x = 0$. Obrazem ryze imaginárního čísla je opět číslo ryze imaginární.

(c) Čísla na reálné ose mají nulovou imaginární část. Odpovídající funkční hodnoty mají tedy imaginární část rovnou jedné. Jsou zobrazeny vektory, které mají druhou složku rovnu jedné. Koncové body takových vektorů vyplní přímku $y = 1$. Čísla na imaginární ose mají reálnou část rovnu nule. Přičtením imaginární jednotky se jejich reálná část nezmění, takže funkční hodnota je opět ryze imaginární číslo. Říkáme, že funkcí g se zobrazuje imaginární osa na sebe.

Příklad 34. Jaké geometrické transformaci odpovídá funkce $h(z) = z + m$, je-li m dané komplexní číslo?



Obr. 7

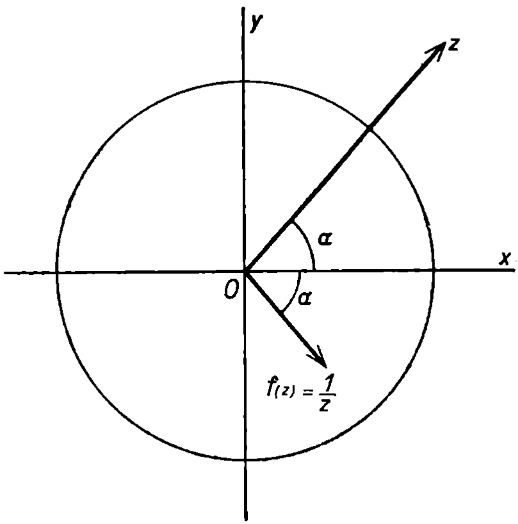
Řešení. Znázorníme-li m a z vektory umístěnými v počátku, je $h(z)$ znázorněno součtem těchto vektorů (viz obr. 7). To znamená, že koncový bod vektoru z je posunut ve směru vektoru m o vzdálenost rovnou velikosti tohoto vektoru. Funkce $h(z)$ odpovídá tedy posunutí o $|m|$ ve směru vektoru, znázorňujícího číslo m. (Srovnej s předešlým příkladem: Tam šlo o posunutí o jednotku délky ve směru imaginární osy.)

Příklad 35. Funkce $f(z)$ je definována vztahem $f(z) = 1/z$. Jaký je obor funkce a množina jejích hodnot? Je-li z znázorněno vektorem velikosti v, který svírá úhel α s kladným směrem reálné osy, jaký vektor znázorňuje číslo $f(z)$?

Řešení. Číslo $f(z)$ je řešením rovnice $zx = 1$, v níž za neznámou považujeme x. Jak víme, má tato rovnice řešení s výjimkou případu $z = 0$. Oborem funkce $f(z)$ je tedy množina komplexních čísel $z \neq 0$. Naopak, je-li dáno komplexní číslo $m \neq 0$, existuje číslo z tak, že $1/z = m$ čili $f(z) = m$. Jinými slovy, funkce $f(z)$ nabývá všech hodnot s výjimkou nuly.

Abychom mohli blíže zkoumat hodnotu $f(z)$, napíšeme je v algebraickém tvaru. K tomu stačí vynásobit je číslem komplexně sdruženým k z. Dostáváme

$$f(z) = 1/z = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$



Obr. 8

Tento výsledek říká, že prostá hodnota $f(z)$ je převrácenou prostou hodnotou proměnné z a že směr vektoru znázorňujícího $f(z)$ je dán argumentem čísla $\bar{z}$. Víme, že vektory znázorňující komplexně sdružená čísla jsou souměrné podle reálné osy. Číslo $f(z)$ je tedy znázorněno vektorem velikosti $1/|z|$, který svírá s kladným směrem reálné osy úhel $360° - \alpha$. (Viz obr. 8.)

Z toho, co jsme odvodili, vyplývá tento obecnější závěr: Funkce $f(z) = 1/z$ zobrazuje kružnici se středem v počátku a o poloměru r na kružnici se středem v počátku a poloměrem $1/r$; kružnice s jednotkovým poloměrem se ovšem zobrazuje sama na sebe.

Příklad 36. Definujte funkci $G(z)$, která každému komplexnímu číslu přiřazuje číslo s dvojnásobnou prostou hodnotou a s argumentem větším o 45°.

Řešení. Pamatujete se na násobení komplexních čísel vyjádřených v goniometrickém tvaru? Poznali jste, že součin dvou komplexních čísel má argument rovný součtu argumentů obou činitelů. Toho zde můžeme použít! Vynásobíme-li číslo z číslem $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, zvětšíme tím jeho argument o úhel α.

V našem případě požadujeme $\alpha = 45°$, tedy $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$. Budeme tedy násobit číslem $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.

Definujme tedy funkci $G_1(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)z$. To však nestačí! Snadno si ověříte, že $|G_1(z)| = |z|$. My však chceme prostou hodnotu zdvojnásobit. Prostá hodnota součinu se rovná součinu prostých hodnot. Vynásobíme-li

$G_1(z)$ reálným číslem 2, nezměníme jeho argument, ale $|2G_1(z)| = 2|G_1(z)| = 2|z|$.

Naše funkce je tedy definována předpisem

$$G(z) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) z$$

nebo

$$G(z) = \sqrt{2}\,(1 + i)z.$$

V geometrii říkáme, že jsme provedli rotaci (otočení) o 45° a dilataci („roztažení") v poměru 2 : 1.

Příklad 37. Stanovte obor funkce $f(z) = \dfrac{i - z}{i + z}$. Je-li $\operatorname{Im} z > 0$, dokažte, že $|f(z)| < 1$. Je-li z reálné, je $|f(z)| = 1$.

Řešení. Výraz $\dfrac{i - z}{i + z}$ má smysl pro všechna komplexní čísla z s výjimkou $z = -i$, kdy jmenovatel je nula. Oborem funkce je tedy množina všech komplexních čísel s výjimkou $z = -i$.

Vypočtěme nyní $|f(z)|$, jestliže $z = x + iy$:

$$|f(z)| = \left|\frac{i - z}{i + z}\right| = \left|\frac{i - x - yi}{i + x + yi}\right| = \frac{|-x + (1 - y)i|}{|\;x + (1 + y)i|} =$$

$$= \left[\frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^2 + 1 + y^2 - 2y}{x^2 + 1 + y^2 + 2y}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li z číslo reálné, je ovšem $y = 0$ a tedy $|f(z)| = 1$. Je-li $\operatorname{Im} z = y > 0$, je čitatel zlomku zřejmě menší než

jmenovatel. Ve jmenovateli přičítáme totiž kladné číslo $2y$, zatímco v čitateli totéž kladné číslo odčítáme.*)
Celý zlomek je tedy menší než jedna (je-li y kladné), což jsme měli dokázat.

Podrobnou diskusí bychom zjistili, že funkce $f(z) = \frac{i - z}{i + z}$ zobrazuje reálnou osu na jednotkovou kružnici se středem v počátku bez bodu $z = -1$**). Horní polovina Gaussovy roviny je touto funkcí zobrazena na vnitřek této kružnice. Obdobným způsobem se můžeme přesvědčit, že dolní polorovina je zobrazena body vně jednotkové kružnice.

Příklad 38. Funkce $g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ je definována pro všechna komplexní čísla různá od nuly. Dokažte:
(a) Je-li $g(z_1) = g(z_2)$, je buď $z_1 = z_2$, nebo $z_1 = 1/z_2$.
(b) Je-li $|z| = 1$, je $g(z)$ reálné číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
(c) Pro reálnou hodnotu proměnné je $g(z)$ opět reálné číslo a platí $|g(z)| \geqq 1$.

Řešení. (a) Rovnost $g(z_1) = g(z_2)$ znamená

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

což převedeme ekvivalentními úpravami postupně na tvar

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1},$$

*) Proveďme tento postup přesně podle pravidel o počítání s nerovnostmi: Protože $y > 0$, je $0 > -2y$. Přičteme-li na obou stranách nerovnosti totéž číslo $x^2 + 1 + y^2$, dostaneme $x^2 + 1 + y^2 > x^2 + 1 + y^2 - 2y$. Stejným způsobem z nerovnosti $2y > 0$ dostaneme $x^2 + 1 + y^2 + 2y > x^2 + 1 + y^2$. Transitivní zákon dává pak nerovnost $x^2 + 1 + y^2 + 2y > x^2 + 1 + y^2 - 2y$.

**) Srov. pozn. k př. 30 na str. 48.

$$z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2},$$

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Aby součin na levé straně rovnice byl nula, musí být buď $z_1 = z_2$, nebo $1/(z_1 z_2) = 1$. Druhá rovnost ovšem znamená totéž jako $z_1 = 1/z_2$. (Připomeňme, že obor funkce neobsahuje nulu, takže z_1 i z_2 jsou čísla různá od nuly.)

(b) Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(x + y\mathrm{i} + \frac{1}{x + y\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(x + y\mathrm{i} + \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}\right).$$

Je-li nyní $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$,

je $g(z) = \frac{1}{2}(x + y\mathrm{i} + x - y\mathrm{i}) = x$ čili $g(z) = \operatorname{Re} z$. Protože $x^2 + y^2 = 1$, je zřejmé, že $|x| \leqq 1$, takže hodnota funkce $g(z)$ je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

(c) Je-li a reálné číslo, je $g(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ také reálné. Jak ale dokázat, že $|g(a)| \geqq 1$?

Použijeme známé věty, že druhá mocnina reálného čísla je nezáporná. Pro kladné a platí tedy například také

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqq 0.$$

Umocníme-li, dostaneme $a - 2 + \frac{1}{a} \geqq 0$ čili $a + \frac{1}{a} \geqq$ $\geqq 2$. Tím je nerovnost $|g(a)| \geqq 1$ dokázána pro kladná čísla a (použili jsme odmocniny z čísla a!). Avšak zřejmě platí $g(-a) = -g(a)$, takže $|g(-a)| = |g(a)|$. Tím je tvrzení (c) dokázáno v celé obecnosti.

V některých příkladech této kapitoly jsme se zabývali úlohami, které se týkaly geometrických vlastností funkcí komplexní proměnné, nebo přesněji vlastností zobrazení Gaussovy roviny, určeného takovou funkcí. Odtud je již jen krok k otázce, zda funkci komplexní proměnné můžeme graficky znázornit obdobně jako funkci reálné proměnné. Odpověď bohužel zní, že nikoliv. Již tehdy, když zkoumáme komplexní funkci reálné proměnné, máme se znázorněním funkce potíže (srov. př. 27).

Snažíme se proto získat názornější představu o průběhu funkce komplexní proměnné tím, že zkoumáme, jak daná funkce zobrazuje (mohli bychom říci „zkresluje") určité systémy čar, které jsou pro nás z nějakého hlediska důležité. Nejčastěji to bývá např. systém přímek rovnoběžných s některou souřadnou osou, systém soustředných kružnic se středem v počátku, systém paprsků procházejících počátkem apod. Někdy také naopak zkoumáme, jaké jsou vzory některých jednoduchých čar. Vraťme se z tohoto hlediska ještě k funkci z př. 38 (tzv. funkce Žukovského). Dokážeme, že obrazem systému soustředných kružnic se středem v počátku a poloměru $r \neq 1$ je systém konfokálních elips. Ohniska elips jsou body $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Kružnicím o poloměru r a $1/r$ odpovídá v tomto zobrazení táž elipsa.

Řešení. Kružnice o poloměru $r > 0$ se středem v počátku znázorňuje právě všechna komplexní čísla, jejichž prostá hodnota je r. Taková čísla můžeme psát v goniometrickém tvaru

$$z = r(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Jak víme, je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \alpha - \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vztahu, definujícího funkci $g(z)$, dostaneme

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos \alpha + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin \alpha\right].$$

Bod Gaussovy roviny, znázorňující číslo $g(z)$, má tedy souřadnice

$$x = \operatorname{Re} g(z) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos \alpha,$$

$$y = \operatorname{Im} g(z) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin \alpha.$$

Je-li $r = 1$, dostáváme ihned $y = 0$, což se shoduje s výsledkem př. 38 (b). Je-li $r > 1$, je

$$\cos \alpha = 2x/\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad \sin \alpha = 2y/\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Dosadíme-li z těchto vztahů do známé rovnosti

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

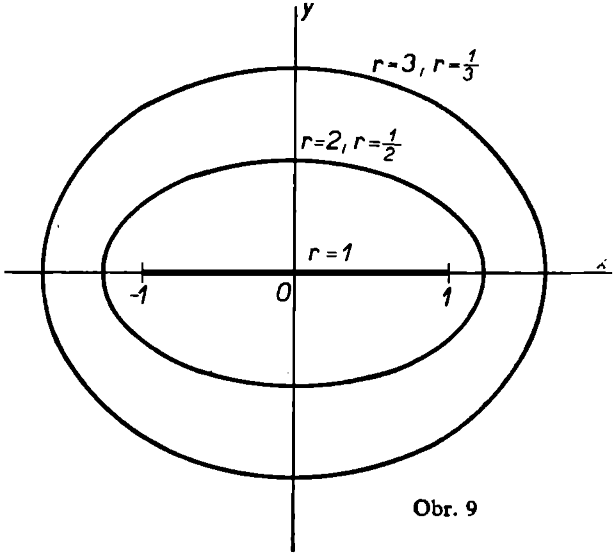
dostáváme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a = \left(r + \frac{1}{r}\right)/2$, $b = \left(r - \frac{1}{r}\right)/2$. Jak víte, je tato rovnice rovnicí elipsy se středem v počátku a s poloosami a, b. Použijeme-li ještě vztah $c^2 = a^2 - b^2$, kde c znamená vzdálenost ohniska elipsy od jejího středu, dostaneme snadno, že $c^2 = 1$.

Ohniska elipsy nezávisí tedy na volbě poloměru r; jsou to vždy body $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Pro $r < 1$ je úvaha zcela obdobná, stačí zaměnit čísla r a $1/r$. Číslo $r - \frac{1}{r}$ je ovšem v tom případě záporné, takže poloosy elips jsou $a = \left(r + \frac{1}{r}\right)/2$, $b = -\left(r - \frac{1}{r}\right)/2$. (Viz obr. 9.)



Obr. 9

Podobně se může čtenář sám přesvědčit, že každá přímka procházející počátkem a svírající s kladným směrem reálné osy úhel α ($\alpha \neq k\pi/2$) se zobrazuje na hyperbolu

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

Ohniska těchto hyperbol jsou opět body $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

Reálná osa se zobrazuje na dvě polopřímky ležící na ose x, jejichž počáteční body jsou opět $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Imaginární osa se zobrazuje sama na sebe. (Funkce $g(z)$ není ovšem definována pro $z = 0$. Můžeme však za obraz počátku považovat nevlastní bod.)

Cvičení

1. Určete obor funkce $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Pro které hodnoty proměnné platí $f(z) = z$?

$[z \neq -1; z = \mathrm{i}$ a $z = -\mathrm{i}.]$

2. Funkce $g(z) = z^2$ je definována pro všechna komplexní čísla. Je-li argument čísla z roven α, jaký je argument čísla $g(z)$? Co platí o hodnotách funkce $g(z)$, je-li proměnná ryze imaginární číslo?

[Argument je 2α; hodnota funkce je reálná.]

3. Definujte funkci, přiřazující každému komplexnímu číslu z číslo, jehož reálná část je dvojnásobkem prosté hodnoty proměnné, imaginární část je rovna jedné.

$[f(z) = 2|z| + \mathrm{i}.]$

4. Funkce $f_1(z)$, $f_2(z)$ jsou definovány předpisy $f_1(z) = |z|$, $f_2(z) = \operatorname{Re} z$. Vysvětlete, jak dostanete graficky funkční hodnoty těchto funkcí pro libovolnou danou hodnotu proměnné!

[Pro f_1 otočením bodu z okolo počátku na kladnou část reálné osy; pro f_2 kolmým promítnutím bodu z na reálnou osu.]