

# Oddělitelnost množin

---

## III. Některá užití věty o oddělitelnosti

In: Jaroslav Morávek (author); Milan Vlach (author): Oddělitelnost množin. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 32–68.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403680>

### **Terms of use:**

© Jaroslav Morávek, 1969

© Milan Vlach, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## NĚKTERÁ UŽITÍ VĚTY O ODDĚLITELNOSTI

### III.1. O řešitelnosti soustav lineárních nerovností

V I. kapitole jsme ve speciálních případech zjistili, že spolu se soustavou lineárních nerovností tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots, & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (19)$$

je užitečné uvažovat ještě soustavu lineárních nerovností tvaru

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \dots + y_ma_{m1} &\geq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \dots + y_ma_{m2} &\geq 0, \\ \dots, & \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \dots + y_ma_{mn} &\geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Platí totiž tato věta (sr. konec odstavce I.1):

**Věta 4.** *Soustava lineárních nerovností (19) má nezáporné řešení právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  soustavy (20) nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m \geq 0.$$

**Důkaz. 1.** Předpokládejme, že soustava (19) má nezá-



$\xi_m$ ) prostoru  $R^m$ , jejichž souřadnice mají tyto vlastnosti: existuje takový bod  $K = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  prostoru  $R^n$ , že platí

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \xi_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \xi_2, \\ \dots & \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= \xi_m, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ \dots & \dots, \\ & x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Jinými slovy: množina  $K_2$  je množina bodů prostoru  $R^m$  tvaru

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n),$$

kde  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

Množiny  $K_1$  a  $K_2$  jsou neprázdné konvexní mnohostěny. V případě množiny  $K_1$  je to zřejmé, v případě množiny  $K_2$  je to jednoduchý důsledek věty 1. Protože neexistuje nezáporné řešení soustavy (19), nemají množiny  $K_1$  a  $K_2$  společné body a jsou v důsledku věty 3 oddělitelné. Existují tedy taková čísla  $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ , přičemž alespoň jedno z čísel  $a_1, a_2, \dots, a_m$  je různé od nuly, že pro každý bod  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  množiny  $K_1$  je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_m\xi_m < b$$

a pro každý bod  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  množiny  $K_2$  je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_m\xi_m > b.$$

Odtud však plyne, že číslo  $b$  je záporné, neboť bod  $(0, 0, \dots, 0)$  patří do množiny  $K_2$ , takže platí

$$a_1 0 + a_2 0 + \dots + a_m 0 > b.$$

Dále dokážeme, že čísla  $a_1, a_2, \dots, a_m$  jsou nezáporná: Je-li pro nějaké  $i_0$   $a_{i_0} < 0$  a položíme-li

$$\xi_1 = b_1, \xi_2 = b_2, \dots, \xi_{i_0-1} = b_{i_0-1}, \xi_{i_0+1} = b_{i_0+1}, \dots, \xi_m = b_m,$$

$$\xi_{i_0} = \min \left[ b_{i_0}, \frac{b - a_1 b_1 - \dots - a_{i_0-1} b_{i_0-1} - a_{i_0+1} b_{i_0+1} - \dots - a_m b_m}{a_{i_0}} \right],$$

patří bod  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  do množiny  $K_1$  (viz zavedení množiny  $K_1$ ), a musí tedy platit

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m < b.$$

Přímým výpočtem však zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} & a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m = \\ & = a_{i_0} \xi_{i_0} + (a_1 \xi_1 + \dots + a_{i_0-1} \xi_{i_0-1} + a_{i_0+1} \xi_{i_0+1} + \dots + \\ & \quad + a_m \xi_m) \geq \\ & \geq b - a_1 b_1 - \dots - a_{i_0-1} b_{i_0-1} - a_{i_0+1} b_{i_0+1} - \dots - \\ & \quad - a_m b_m + \\ & \quad + (a_1 b_1 + \dots + a_{i_0-1} b_{i_0-1} + a_{i_0+1} b_{i_0+1} + \dots + \\ & \quad + a_m b_m) = b, \end{aligned}$$

takže předpoklad  $a_{i_0} < 0$  vede ke sporu.

Dokážeme nyní, že

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, \dots, y_m = a_m$$

je takové nezáporné řešení soustavy (20), že platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m < 0,$$

tj. že není splněna podmínka věty 4. Poslední nerovnost však plyne z toho, že číslo  $b$  je záporné a že bod  $(b_1,$

$b_2, \dots, b_m$ ) patří do množiny  $K_1$ . Zbývá tedy dokázat, že  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  je řešením soustavy (20).

Předpokládejme, že existuje index  $j_0$  tak, že platí

$$y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \dots + y_m a_{mj_0} < 0$$

a položíme  $x_j = 0$  pro  $j \neq j_0$ ,

$$x_{j_0} = \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \dots + y_m a_{mj_0}}.$$

Potom bod  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ , kde

$$\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

$$\dots$$

$$\xi_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

patří do množiny  $K_2$ , takže platí

$$y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + \dots + y_m \xi_m > b.$$

Avšak přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že platí

$$\begin{aligned} & y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + \dots + y_m \xi_m = \\ & = y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \\ & + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \\ & \dots \\ & + y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) = \\ & = y_1 a_{1j_0} \cdot \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \dots + y_m a_{mj_0}} + \\ & + y_2 a_{2j_0} \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \dots + y_m a_{mj_0}} + \\ & \dots \\ & + y_m a_{mj_0} \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \dots + y_m a_{mj_0}} = b. \end{aligned}$$







**pustná řešení** úlohy lineární optimalizace a pro přípustná řešení dávající největší hodnotu funkce (24) se vžil název **optimální řešení** úlohy lineární optimalizace.

Uvedme na tomto místě alespoň jeden příklad úlohy z praxe, která vede na úlohu lineární optimalizace. K výrobě různých druhů produkce je potřeba užít jistých technologických postupů a určitých surovin a úlohou je rozhodnout, jaká množství jednotlivých druhů produkce máme vyrobit, abychom při použití daných technologických postupů nepřekročili dané zásoby potřebných surovin a abychom přitom dosáhli co největšího zisku.

Předpokládejme, že se jedná o  $n$  druhů produkce a že k výrobě je třeba  $m$  druhů surovin. Označme symbolem  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) zisk z výroby každého jednotkového množství produkce  $j$ -tého druhu a symbolem  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) zásobu  $i$ -té suroviny. Jsou-li technologické postupy takové, že k výrobě jednotkového množství  $j$ -té produkce je potřeba množství  $a_{ij}$   $i$ -té suroviny a označíme-li  $x_j$  hledané množství produkce  $j$ -tého druhu, pak

podmínky nepřekročení zásob jednotlivých surovin lze vyjádřit soustavou (23);

zisk z výroby lze vyjádřit vzorcem (24);

podmínku největšího zisku lze vyjádřit podmínkou (25).

Jak jsme již zjistili v I. kapitole, soustava lineárních nerovností nemusí mít žádné řešení, nemusí tedy existovat ani přípustné řešení úlohy lineární optimalizace. Jako cvičení by si měl čtenář ukázat, že i v případě, kdy soustava (23) má řešení, nemusí mít nezáporné řešení. Ukážeme si, že i v případě, kdy úloha lineární optimalizace má přípustné řešení, nemusí mít optimální řešení.

Můžeme k tomu užít soustavy (2) z I. kapitoly, tj. soustavy

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\leq -2, \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -4, \end{aligned}$$

jejíž množina řešení je znázorněna na obr. 3, ze kterého je patrné, že tato množina není omezená. Je také zřejmé, že zvolíme-li pevně hodnotu neznámé  $x_2 = \hat{x}_2$  tak, že je  $\hat{x}_2 > 0$ , bude existovat taková hodnota neznámé  $x_1 = \hat{x}_1$ , že kromě dvojice čísel  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  bude řešením uvažované soustavy i každá dvojice čísel  $(\bar{x}_1, \hat{x}_2)$ , pro kterou platí  $\bar{x}_1 > \hat{x}_1$ . Odtud však plyne, že bude-li funkce  $f(x_1, x_2)$  mít např. tvar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

můžeme vhodnou volbou hodnot proměnných dosáhnout toho, aby funkce  $f(x_1, x_2)$  nabývala hodnoty větší než jakékoliv předem zadané číslo a nemůže tedy funkce  $f$  nabývat na množině přípustných řešení své největší hodnoty.

Platí však tato věta.

**Věta 8.** *Existuje-li přípustné řešení úlohy (23), (24), (25) a existuje-li takové číslo  $M$ , že pro všechna přípustná řešení  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq M,$$

*potom existuje i optimální řešení.*

**Důkaz.** Množina všech nezáporných řešení  $(x_1, x_2, \dots, \dots, x_n)$  soustavy (23) je konvexním mnohostěnem  $K$  v prostoru  $R^n$ . Podle věty 1 je množina  $\bar{K}$  všech bodů  $Z = (z_1)$  prostoru  $R^1$ , pro které existuje takový bod  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mnohostěnu  $K$ , že platí

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

konvexním mnohostěnem v  $R^1$ . Podle příkladu 3 kapitoly II je tedy  $\bar{K}$  buď (a) prázdná množina, nebo (b) prostor  $R^1$ ,



Úlohu (23'), (24'), (25') nazýváme úlohou *duální* k úloze (23), (24), (25).

Všimněme si toho, že obě úlohy jsou zadány systémem čísel

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_1, \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, b_2, \\ \dots, \dots, \dots, \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, b_m, \\ c_1, c_2, \dots, c_n, \end{array}$$

a toho, že duální úloha je úlohou lineární optimalizace stejného typu jako úloha (23), (24), (25), neboť soustavu (23') můžeme převést na soustavu

$$\begin{array}{l} - a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \dots - a_{m1}y_m \leq - c_1, \\ - a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \dots - a_{m2}y_m \leq - c_2, \\ \dots, \dots, \dots, \\ - a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \dots - a_{mn}y_m \leq - c_n \end{array}$$

a podmínku (25') na tvar

$$- g(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max.$$

Kromě toho čtenář snadno nahlédne, že vytvoříme-li k duální úloze úlohu duální, dostaneme úlohu původní; proto často hovoříme o dvojici *vzájemně duálních* úloh.

**Věta 9.** *Je-li  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  přípustné řešení úlohy (23), (24), (25) a je-li  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  přípustné řešení duální úlohy, pak platí nerovnost*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m.$$

**Důkaz.** Užijeme-li postupně nerovností (23') a (23), dostaneme



úlohy (23) – (25) a  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  optimální řešení úlohy (23') – (25'), pak platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m.$$

**Důkaz.** Je zřejmé, že stačí dokázat existenci takových nezáporných řešení  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_m)$  soustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \dots - a_{m1}y_m &\leq -c_1, \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \dots - a_{m2}y_m &\leq -c_2, \\ \dots, \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \dots - a_{mn}y_m &\leq -c_n, \end{aligned} \quad (27)$$

že platí

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (28)$$

Protože však pro každé přípustné řešení platí podle věty 9 nerovnost

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

stačí místo (28) požadovat splnění podmínky

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \leq c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

a ta je ekvivalentní s podmínkou

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \leq 0. \quad (29)$$

Máme tedy dokázat, že soustava  $m + n + 1$  nerovností (26), (27), (29) o  $m + n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$  má nezáporné řešení.

Předpokládejme, že tato soustava nemá nezáporné řešení, potom podle věty 4 existují taková nezáporná čísla  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \lambda$ , že platí

$$\begin{aligned}
 & a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \dots + a_{m1}\xi_m - c_1\lambda \geq 0, \\
 & a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{m2}\xi_m - c_2\lambda \geq 0, \\
 & \dots, \\
 & a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \dots + a_{mn}\xi_m - c_n\lambda \geq 0, \quad (30) \\
 & -a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \dots - a_{1n}\eta_n + b_1\lambda \geq 0, \\
 & -a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \dots - a_{2n}\eta_n + b_2\lambda \geq 0, \\
 & \dots, \\
 & -a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \dots - a_{mn}\eta_n + b_m\lambda \geq 0,
 \end{aligned}$$

a zároveň

$$b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \dots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n < 0. \quad (31)$$

Ukážeme nejdříve, že nemůže být  $\lambda = 0$ . Je-li totiž  $\lambda = 0$ , dostaneme, na základě (30), soustavu nerovností

$$\begin{aligned}
 & a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \dots + a_{m1}\xi_m \geq 0, \\
 & a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{m2}\xi_m \geq 0, \quad (32a) \\
 & \dots, \\
 & a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \dots + a_{mn}\xi_m \geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \dots - a_{1n}\eta_n \geq 0, \\
 & -a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \dots - a_{2n}\eta_n \geq 0, \quad (32b) \\
 & \dots, \\
 & -a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \dots - a_{mn}\eta_n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Podle předpokladu věty existuje přípustné řešení  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  úlohy (23)–(25) a přípustné řešení  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  úlohy (23')–(25'). Vynásobíme-li  $j$ -tou nerovnost soustavy (32a) číslem  $x_j$  a vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme











nout, zda toto řešení je optimální. Je-li  $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$  optimální, musí podle věty 12 platit pro libovolné optimální řešení  $(y_1, y_2, y_3)$  úlohy (33'), (34')

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &= 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= 4, \\ 4y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení, a to  $y_1 = \frac{11}{10}, y_2 = \frac{9}{20}, y_3 = \frac{1}{4}$ .

Avšak snadno zjistíme, že pro přípustná řešení  $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}\right)$  úloh (33), (34) a (33') (34') platí

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13}{2} = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3,$$

takže podle věty 10 jsou tato přípustná řešení i optimální.

### III.3. O prahových funkcích

V tomto odstavci uvedeme jednu aplikaci pojmů z teorie lineárních nerovností a pojmu oddělitelnosti množin, přičemž tato aplikace se vztahuje k teoretické i k technické kybernetice.

Představme si následující situaci. Určitá skupina sestávající z  $n$  osob se sešla proto, aby rozhodla hlasováním o přijetí nějakého návrhu. Předpokládáme kvůli jednoduchosti, že se nikdo nemůže zdržet hlasování, tedy každý musí hlasovat buď pro návrh, nebo proti němu. Přitom

hlasy jednotlivých účastníků mohou mít různou „váhu“ (např. v závislosti na autoritě, kterou mají podle své odborné způsobilosti, nebo v závislosti na mocenském postavení, které zaujímají v uvažované skupině). Dále budeme předpokládat, že hlasující osoby jsou očíslovány v nějakém pevně zvoleném pořadí a že váhu  $j$ -tého člena lze vyjádřit nezáporným číslem  $A_j$ . Jeden z používaných způsobů pro zhodnocení výsledku provedeného hlasování spočívá v následujícím: Jestliže  $j$ -tý člen skupiny (s vahou hlasu  $A_j$ ) hlasuje pro návrh, představujeme si, že jeho příspěvek pro přijetí návrhu je  $A_j$ ; v opačném případě pokládáme jeho příspěvek pro přijetí návrhu za nulový. Po skončeném hlasování sečteme příspěvky jednotlivých členů a získaný součet porovnáme s jistou hodnotou  $B$ , kterou považujeme za „celkový počet hlasů“, který je nutný a postačující pro přijetí daného návrhu. Jestliže je součet příspěvků (hlasů) jednotlivých členů větší nebo roven než  $B$ , považujeme návrh za přijatý, v opačném případě konstatujeme, že návrh přijat nebyl.

Není těžké si rozmyslet, že lze tuto situaci popsat zavedením jisté funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , přičemž každá proměnná  $x_j$  nabývá pouze dvou hodnot 0 a 1. Přitom položíme  $x_j = 1$  v tom případě, jestliže  $j$ -tá osoba hlasuje pro návrh a  $x_j = 0$  jestliže  $j$ -tá osoba hlasuje proti návrhu. Funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  může nabývat dvou hodnot, a sice hodnoty 1, jestliže návrh byl přijat, a hodnoty 0, jestliže návrh nebyl přijat. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je definována tímto předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 1, \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n \geq B$$

a

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0, \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n < B.$$

**Příklad 6.** Položíme  $n = 5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$ ,  $A_3 = 3$ ,  $A_4 = 4$  a  $B = 3$ . Funkce  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  je definována předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 1, \text{ jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \geq 3 \quad (*)$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0, \text{ jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 < 3.$$

Sestrojíme nyní tabulku hodnot této funkce.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$
0 0 0 0	0	1 0 0 0	0
0 0 0 1	1	1 0 0 1	1
0 0 1 0	1	1 0 1 0	1
0 0 1 1	1	1 0 1 1	1
0 1 0 0	0	1 1 0 0	1
0 1 0 1	1	1 1 0 1	1
0 1 1 0	1	1 1 1 0	1
0 1 1 1	1	1 1 1 1	1

Popíšeme konstrukci tabulky. V levém sloupci jsou zapsány všechny uspořádané čtveřice  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ , kde  $\xi_j = 0$  nebo  $\xi_j = 1$  pro  $j = 1, 2, 3$  a  $4$ . Snadno zjistíme, že počet těchto čtveřic je  $2^4 = 16$ . (Každé  $\xi_j$  nabývá dvou hodnot a tedy celkový počet čtveřic je  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ .) Celkový počet čtveřic v naší tabulce je 16, přičemž žádná čtveřice se nevyskytuje dvakrát. Z toho tedy vyplývá, že v tabulce se vyskytují všechny čtveřice, přičemž každá právě jednou. Na pořadí, ve kterém vypisujeme čtveřice, sice nezáleží (pokud ovšem odpovídajícím způsobem uspořádáme hodnoty funkce), poznamenejme však pro úplnost, že při konstrukci tabulky jsme použili tzv. **lexikografického uspořádání**. Lexikografické uspořádání je v našem případě definováno takto: Necht  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  a  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$  jsou dvě libovolné čtveřice z nul a jedniček. Čtveřice  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  je před čtveřicí  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ , jestliže nastává alespoň jeden z těchto případů:

1.  $\xi_1 = 0, \tau_1 = 1$  (ostatní  $\xi_j$  a  $\tau_j$  mohou být libovolná),
2.  $\xi_1 = \tau_1, \xi_2 = 0, \tau_2 = 1$  ( $\xi_3, \xi_4, \tau_3$  a  $\tau_4$  mohou být libovolná),
3.  $\xi_1 = \tau_1, \xi_2 = \tau_2, \xi_3 = 0, \tau_3 = 1$  ( $\xi_4$  a  $\tau_4$  mohou být libovolná) nebo
4.  $\xi_1 = \tau_1, \xi_2 = \tau_2, \xi_3 = \tau_3, \xi_4 = 0$  a  $\tau_4 = 1$ .

Čtenář si snadno ověří, že pořadí čtveřic v tabulce skutečně odpovídá lexikografickému uspořádání 1–4.

Při konstrukci lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic lze použít následujícího mechanického postupu:

- (i) Na první místo v tabulce napíšeme čtveřici  $(0, 0, 0, 0)$ .
- (ii) Předpokládejme, že po jistém počtu kroků jsme přišli k čtveřici  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . Může nastat právě jeden z těchto pěti případů:

$\alpha$ )  $\xi_4 = 0$ . V tomto případě za čtveřici  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$  napíšeme čtveřici  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)$ .

$\beta$ )  $\xi_4 = 1, \xi_3 = 0$ . V tomto případě za čtveřici  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_1, \xi_2, 0, 1)$  bude následovat čtveřice  $(\xi_1, \xi_2, 1, 0)$ .

$\gamma$ ) Platí  $\xi_4 = 1, \xi_3 = 1, \xi_2 = 0$ . V tomto případě bude za čtveřici  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_1, 0, 1, 1)$  následovat čtveřice  $(\xi_1, 1, 0, 0)$ .

$\delta$ ) Platí  $\xi_4 = 1, \xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 0$ , tj. daná čtveřice je  $(0, 1, 1, 1)$ . Za tuto čtveřici napíšeme čtveřici  $(1, 0, 0, 0)$ .

$\epsilon$ ) Platí  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_2 = \xi_1 = 1$ . Čtveřice  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1, 1, 1, 1)$  je poslední čtveřicí; proces konstrukce tím končí.

Po této krátké exkurzi do čistě kombinatorických otázek se vrátíme k funkci  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Funkce  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  je definována vztahy (\*) a její hodnoty lze přečíst z tabulky. Ze vztahů (\*) nebo z tabulky se lze přesvědčit o tom, že v uvažovaném příkladě je návrh přijat při všech možných hlasováních s výjimkou těchto tří případů:

1. Nikdo nehlasuje pro návrh; 2. pro návrh hlasuje pouze první účastník; 3. pro návrh hlasuje pouze druhý účastník. Idealizovaná situace s hlasováním nás přivádí k pojmu tzv. **prahové funkce**. Zatím jsme předpokládali, že čísla  $A_1, A_2, \dots$  a  $A_n$  jsou nezáporná; tento předpoklad souvisel s konkrétní povahou naší „hlasovací“ situace. Obecně však tento předpoklad nemá opodstatnění, neboť prahové funkce se vyskytují i v jiných aplikacích matematiky, jako např. v neurofyziologii, v slaboproudé elektrotechnice, při konstrukci počítačů aj.

**Definice prahové funkce:** **Prahovou funkcí  $n$  proměnných budeme rozumět funkci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definovanou na množině všech uspořádaných  $n$ -tic z jedniček a nul, a zobrazující tuto množinu do množiny  $\{0, 1\}$ , přičemž musí být splněna tato podmínka: Existují reálná čísla  $A_1, \dots, A_n$  a  $B$  tak, že platí:**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n \geq B, \\ 0, & \text{jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n < B. \end{cases} \quad (35)$$

Čísla  $A_1, \dots, A_n$  se nazývají **vahami** a číslo  $B$  **prahem**.

Z definice prahové funkce je patrné, že je to funkce dosti speciální struktury. V matematické logice a jejích aplikacích se definují tzv. **logické funkce**. Uvedeme tuto definici.

**Definice logické funkce.** **Logickou funkcí  $n$  proměnných** (označení  $F(x_1, \dots, x_n)$ ), **budeme rozumět zobrazení množiny všech uspořádaných  $n$ -tic z nul a jedniček do množiny  $\{0, 1\}$ .**

**Poznámka.** Termín logická funkce pochází od toho, že proměnné  $x_j$  i hodnotu funkce  $F(x_1, \dots, x_n)$  lze interpretovat jako logické výroky; přitom 1 interpretujeme jako pravdivý výrok „ano“ a 0 jako nepravdivý výrok „ne“. K ilustraci pojmu logické funkce viz cvičení 8 na konci



kapitoly a učebnice pro SVVŠ (8). Srovnáním obou dvou definic dostáváme tuto zřejmou větu:

**Věta 13.** *Každá prahová funkce je logickou funkcí.*

Obrácené tvrzení však neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

**Příklad 7.** Mějme logickou funkci  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , definovanou takto:  $\varphi(0, 0, 0) = \varphi(1, 1, 1) = 1$ ,  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ , jestliže  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$  a  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (1, 1, 1)$ . Dokážeme, že funkce  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  není prahová, tj. že neexistují čísla  $A_1, A_2, A_3$  a  $B$  tak, aby platilo

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + A_3 \cdot \xi_3 \geq B, \\ 0, & \text{jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + A_3 \cdot \xi_3 < B. \end{cases}$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby totiž taková čísla existovala, musela by splňovat nerovnosti

$$\begin{array}{rcl} A_1 + A_2 + A_3 & \geq B, & (\varphi(1, 1, 1) = 1), \\ 0 & \geq B, & (\varphi(0, 0, 0) = 1), \\ -A_1 & > -B, & (\varphi(1, 0, 0) = 0), \\ -A_2 & > -B, & (\varphi(0, 1, 0) = 0), \\ -A_3 & > -B, & (\varphi(0, 0, 1) = 0). \end{array}$$

Nyní druhou nerovnost vynásobíme dvěma a všechny nerovnosti takto vzniklého systému sečteme. Tím dostáváme nerovnost  $0 > 0$ , která však znamená spor.

Z příkladu 7 tedy vyplývá, že ne každá logická funkce je prahová. Na druhé straně, jestliže nějaká logická funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  je prahová, nejsou koeficienty a pravá strana ve vztazích (35) určeny jednoznačně. Ukážeme si tuto skutečnost na prahové funkci tří proměnných v následujícím příkladu. Důkaz v obecném případě si čtenář lehce provede samostatně.

**Příklad 8.** Vyšetřujeme prahovou funkci tří proměnných  $\psi(x_1, x_2, x_3)$  definovanou takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \geq 2, \\ 0, & \text{jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 2. \end{cases}$$

Není těžké ověřit, že funkce  $\psi(x_1, x_2, x_3)$  je definována též např. takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } 10 \cdot \xi_1 + 11 \cdot \xi_2 + 12 \cdot \xi_3 \geq 20, \\ 0, & \text{jestliže } 10 \cdot \xi_1 + 11 \cdot \xi_2 + 12 \cdot \xi_3 < 20. \end{cases}$$

Poslední dva příklady nás přivádějí k myšlence, že jedna z nejdůležitějších otázek, které vznikají v teorii prahových funkcí, je následující: Je dána logická funkce  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  proměnných. Máme rozhodnout, zda tato funkce je prahová, a v kladném případě nalézt alespoň jedno vyjádření ve tvaru (35). Tato otázka je v celé své šíři značně složitá a lze říci, že doposud nebyla ani zdaleka uspokojivě dořešena. V našem výkladu se omezíme na to, že ukážeme, jak poslední otázka souvisí s pojmem oddělitelnosti, a jako důsledek vyslovíme jedno kritérium. Logická funkce je podle definice definována na množině všech uspořádaných  $n$ -tic  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , kde  $\xi_j = 0$  nebo  $\xi_j = 1$  pro  $j = 1, 2, \dots, n$ . Každá taková  $n$ -tice je bodem  $n$ -rozměrného prostoru  $R^n$ . Všecky tyto body tvoří jistou konečnou množinu v  $R^n$ . Označme poslední množinu symbolem  $B^n$ <sup>1)</sup>. Označme dále symbolem  $F^{-1}(0)$  množinu všech bodů  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  z  $B^n$ , pro něž platí  $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ , a symbolem  $F^{-1}(1)$  množinu všech bodů  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , pro něž platí  $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1$ , tj. symbolicky (tohoto typu symboliky bylo již použito v odst. II. 2):

<sup>1)</sup> Množina  $B^n$  je množinou vrcholů  $n$ -rozměrné jednotkové krychle (viz [1] str. 69–70).

$$F^{-1}(0) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^n \mid F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0\}$$

$$F^{-1}(1) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^n \mid F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1\}.$$

(Množiny  $F^{-1}(0)$  resp.  $F^{-1}(1)$  se obvykle nazývají vzory 0 resp. 1 při zobrazení pomocí funkce  $F$ .)

Nyní je jasné, že zadáním funkce  $F(x_1, \dots, x_n)$  jsou jednoznačně určeny množiny  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$ , a obráceně, ze znalosti množin  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$  lze jednoznačně určit funkci  $F$ . (K určení funkce  $F$  stačí ovšem znát kteroukoliv jednu z množin  $F^{-1}(0)$  nebo  $F^{-1}(1)$ ).

Předpokládejme nyní, že  $F(x_1, \dots, x_n)$  je prahová funkce a necht' platí

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1, \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n \geq B, \quad (35)$$

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n < B.$$

Poslední vztahy lze přepsat ekvivalentním způsobem takto:

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in F^{-1}(1), \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n \geq B, \quad (35')$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in F^{-1}(0), \text{ jestliže } A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n < B.$$

Tím je však dokázána následující

**Věta 14.** *Funkce  $F(x_1, \dots, x_n)$  je prahová právě tehdy, jestliže nastává alespoň jeden z těchto dvou případů:*

- a) alespoň jedna z množin  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$  je prázdná,
- b) množiny  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$  jsou neprázdné a oddělitelné.

Abychom mohli vyslovit zajímavější kritérium pro to, že funkce  $F$  je prahová, zavedeme pojem **konvexního obalu** konečné množiny bodů prostoru  $R^n$ . V dalším textu používáme často pro součet  $a_1 + a_2 + \dots + a_r$  symbo-

lického zápisu  $\sum_{j=1}^r a_j$ .

**Definice:** Necht'  $A$  je konečná neprázdná množina

bodů prostoru  $R^n$ . Necht množina  $A$  obsahuje body

$$\begin{aligned} & (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \\ & (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{aligned}$$

**Konvexním obalem množiny  $A$**  (označení  $K(A)$ ) budeme rozumět množinu definovanou takto:  $K(A)$  obsahuje všechny ty body  $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ , pro které existuje  $k$ -tice čísel  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  tak, že  $\lambda_\alpha \geq 0$

$$\left( \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha = 1, x_j = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \cdot x_j^{(\alpha)} \right) \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n \text{ a}$$

$$\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha = 1.$$

**Příklad 8.** Necht body  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  jsou vrcholy konvexního mnohoúhelníka  $M$ . Položme  $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)\}$ , takže  $P$  je jistá konečná množina. Snadno lze ukázat, že platí

$$K(P) = M.$$

Platí zřejmé

**lemma**

$$\text{Platí } K(A) \supset A.$$

*Důkaz přenecháváme čtenáři.* (Návod: Položte  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{\alpha-1} = 0, \lambda_\alpha = 1, \lambda_{\alpha+1} = 0, \dots, \lambda_k = 0$  postupně pro  $\alpha = 1, 2, \dots, k$ ).

**Věta 15.** *Konvexní obal  $K(A)$  je konvexní mnohostěn v  $R^n$ .*

**Důkaz.** Uvažujme množinu  $S$  těch bodů  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^k$ , pro jejichž souřadnice platí  $\lambda_x \geq 0$  ( $x = 1, 2, \dots, k$ )

a  $\sum_{x=1}^k \lambda_x = 1$ .  $S$  je zřejmě konvexním mnohostěnem v  $R^k$ .

Zobrazení definované vzorcí

$$x_j = \sum_{x=1}^k \lambda_x \cdot x_j^{(x)}$$

je lineární zobrazení  $R^k$  do  $R^n$ , které zobrazuje  $S$  na  $K(A)$ .  
K zakončení důkazu nyní zbývá použít věty 1.

Nyní jsme schopni zformulovat a dokázat větu:

**Věta 16.** *Logická funkce  $F(x_1, \dots, x_n)$  je prahovou funkcí právě tehdy, jestliže je splněna následující podmínka: Buď platí  $F^{-1}(0) = \emptyset$ , nebo  $F^{-1}(1) = \emptyset$ , nebo množiny  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$  jsou obě neprázdné a platí*

$$K(F^{-1}(0)) \cap K(F^{-1}(1)) = \emptyset. \quad (36)$$

**Důkaz:** A. *Postačitelnost podmínky.* Necht' je splněna podmínka věty. Rozlišíme tyto dvě možnosti:

1. Platí buď  $F^{-1}(0) = \emptyset$ , nebo  $F^{-1}(1) = \emptyset$ . V tomto případě je funkce  $F$  prahová na základě věty 14.

2. Platí  $F^{-1}(0) \neq \emptyset$  a  $F^{-1}(1) \neq \emptyset$  a tedy též vztah (35'). Konvexní mnohostěny  $K(F^{-1}(0))$  a  $K(F^{-1}(1))$  jsou tedy na základě věty 3 oddělitelné, tj. existují čísla  $A_1, A_2, \dots, A_n$  a  $B$  tak, že platí:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n < B \text{ pro } (\xi_1, \dots, \xi_n) \in K(F^{-1}(0)) \\ \text{a} \\ A_1 \cdot \xi_1 + \dots + A_n \cdot \xi_n \geq B \text{ pro } (\xi_1, \dots, \xi_n) \in K(F^{-1}(1)) \end{array} \right\} (37)$$

Jestliže si však uvědomíme, že platí (lemma)

$K(F^{-1}(0)) \supset F^{-1}(0)$  a  $K(F^{-1}(1)) \supset F^{-1}(1)$ , přicházíme k závěru, že množiny  $F^{-1}(0)$  a  $F^{-1}(1)$  jsou také oddělitelné, což bylo třeba dokázat.

**B. Nutnost podmínky.** Necht funkce  $F$  je prahová, tj. necht existují čísla  $A_1, \dots, A_n$  a  $B$  tak, že platí vztahy (35). Jestliže jedna z množin  $F^{-1}(0)$  nebo  $F^{-1}(1)$  je prázdná, není již co dokazovat. Předpokládejme tedy, že platí  $F^{-1}(0) \neq \emptyset$  a  $F^{-1}(1) \neq \emptyset$ . Dokážeme, že platí nerovnosti (37), čímž bude důkaz dokončen. Dokážeme, že platí první ze vztahů (37). Druhý se dokáže zcela analogicky. Necht množina  $F^{-1}(1)$  obsahuje body

$$(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \dots, (x_1^{(\kappa)}, \dots, x_n^{(\kappa)}), \dots, (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

Podle předpokladu platí  $A_1 \cdot x_1^{(\kappa)} + \dots + A_n \cdot x_n^{(\kappa)} \geq B$  (38)

pro  $\kappa = 1, 2, \dots, k$ . Budiž nyní  $(x_1, \dots, x_n) \in K(F^{-1}(1))$ . Z nerovností (38) dostáváme

$$\begin{aligned} A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n &= A_1 \cdot \sum_{\kappa=1}^k \lambda_{\kappa} \cdot x_1^{(\kappa)} + \dots + \\ &+ A_n \cdot \sum_{\kappa=1}^k \lambda_{\kappa} \cdot x_n^{(\kappa)} = \sum_{\kappa=1}^k \lambda_{\kappa} (A_1 \cdot x_1^{(\kappa)} + \dots + A_n \cdot x_n^{(\kappa)}) \geq \\ &\geq \sum_{\kappa=1}^k \lambda_{\kappa} \cdot B = B \cdot \sum_{\kappa=1}^k \lambda_{\kappa} = B, \end{aligned}$$

což bylo třeba dokázat.

Z podaného důkazu však vyplývá následující věta, která má daleko obecnější platnost, než pouze v teorii prahových funkcí.

**Věta 17.** *Nechť  $A$  a  $B$  jsou dvě neprázdné konečné množiny bodů v prostoru  $R^n$ . Potom množiny  $A$  a  $B$  jsou oddělitelné právě tehdy, jestliže platí*

$$K(A) \cap K(B) = \emptyset.$$

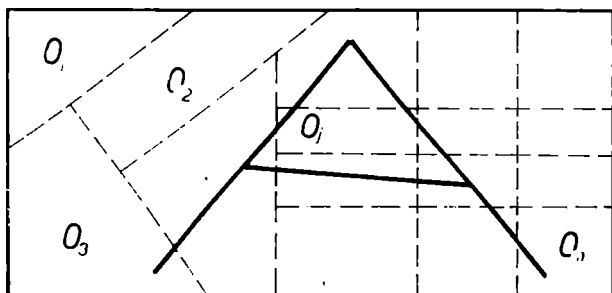
### III.4. O rozlišování objektů

Téma tohoto odstavce se úzce přimyká k tématu předcházejícího odstavce. Povíme si něco o klasifikaci údajů. V procesu současné vědeckotechnické revoluce se velká pozornost věnuje výzkumům souvisejícím s perspektivou automatického řešení tzv. intelektuálních úloh, jejichž řešení mohl podle tradičních názorů provádět pouze člověk. Tak např. již byly podniknuty některé více či méně úspěšné pokusy použití samočinných počítačů při hře v šachy, k předpovědím počasí, k rozlišování zvuků řeči, k automatickému čtení rukopisů, k nalézání diagnóz v medicíně aj.

Mnohé z těchto úloh vyžadují schopnost klasifikovat (rozlišovat) velké množství údajů, popisujících zkoumané objekty, popřípadě celé situace. Všimněme si např. principu, na kterém pracují smyslové orgány člověka a živočichů. Jestliže pozorujeme nějaký předmět, probíhá v podstatě tento proces: Jednotlivé světelné signály přicházejí na sítnici oka a přinášejí informaci o rozměrech, tvaru, velikosti, vzdálenosti, barvě a prostorovém umístění objektu. Tato informace se přenáší prostřednictvím nervové soustavy do příslušných center a tam se vytváří obraz pozorovaného objektu. Tento mechanismus zrakového vnímání nám umožňuje rozlišovat velmi mnoho navzájem různých objektů (rozlišíme stůl, knihu, člověka atd.). Jako ilustraci matematických metod a problémů, které vznikají v sou-

vislosti s problematikou rozlišování objektů, popíšeme jistý jednoduchý matematický model, který budeme nazývat **klasifikátorem objektů**.

Představme si, že máme k dispozici jistou obdélníkovou destičku a kousek křídly. Křídou můžeme na destičku kreslit různé obrazce — objekty, např. písmena latinské abecedy. Člověk držící křidu napíše nějaké písmeno, potom toto písmeno smaže a napíše nějaké jiné písmeno atd. Naším úkolem je diskutovat existenci zařízení, které by umožňovalo automaticky rozhodovat, které písmeno je na destičce vyobrazeno. Situace je zde totiž komplikována tím, že různí lidé píší např. písmeno *a* různě a dokonce ani týž člověk nenapíše dvakrát za sebou dvě stejná písmena *a*. Zařízení, které chceme navrhnout, musí především „umět číst“ napsaná písmena. Každé písmeno na destičce je



Obr. 7

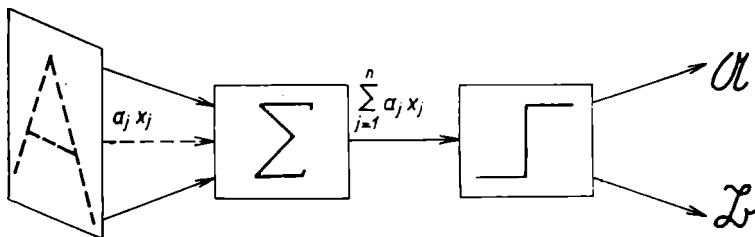
zobrazeno vlastně tím, že některé body na destičce jsou bílé (leží na nich vrstva křídly), ostatní jsou černé. Dokonalé zařízení by tedy muselo reagovat na jednotlivé body destičky, což je ovšem neuskutečnitelný a zcela fiktiv-



ní požadavek, odporující základním fyzikálním faktům.

Abychom našli východisko z této situace, rozdělíme obdélníkovou tabulku na konečný počet oblastí, označených řekněme  $O_1, O_2, \dots, O_n$  (viz obr. 7.). Nyní každému objektu na destičce přiřadíme jistou podmnožinu množiny  $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ , a sice množinu těch oblastí, jejichž vnitřkem prochází čára objektu. Dále předpokládáme, že oblast  $O_j$  odpovídá jisté zařízení, které vytváří signál hodnoty  $a_j$ , jestliže vnitřkem oblasti prochází čára písmene, a vytváří signál nula v opačném případě. Jestliže je tedy na destičce jistý objekt, vznikne jistá množina signálů. Tyto signály, pomocí nichž je objekt zakódován, přicházejí dále do centrálního zařízení, jehož úkolem je provést klasifikaci objektu.

Protože nám jde o pouhé vysvětlení principů, přijmeme dále ještě tento zjednodušující předpoklad: Zařízení bude rozlišovat navzájem pouze dvě třídy objektů, např. typ  $A$  od typu  $B$ . Nakonec nám tedy zbývá popsat schema práce



Obr. 8

centrálního zařízení. Toto zařízení bude sestávat ze dvou „sériově zapojených“ částí: **zařízení na sčítání signálů** a **klasifikující zařízení**. Zařízení na sčítání signálů přijímá jednotlivé signály z destičky a na jeho výstupu se

objevuje signál, jehož hodnota je rovna součtu hodnot jednotlivých signálů. Klasifikující zařízení srovnává hodnotu signálu-součtu s jistou danou hodnotou  $a$ , nazývanou **práhem**: Jestliže je hodnota signálu větší nebo rovna než práh, patří objekt do jedné třídy, v opačném případě patří objekt do druhé třídy. Schematicky je popsán klasifikátor znázorněn na obr. 8.

Nyní napíšeme nerovnosti, popisující funkci klasifikátoru. Za tím účelem oblasti  $O_j$  přiřadíme dvouhodnotovou proměnnou  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), přičemž položíme  $x_j = 1$ , jestliže objekt prochází vnitřkem  $O_j$  a  $x_j = 0$  v opačném případě. Tímto způsobem je tedy objekt na destičce popsán  $n$ -tíci  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Protože zařízení není schopno rozlišit jemnější rozdíly mezi objekty, můžeme jednoduše ztotožnit objekty na destičce s  $n$ -tíci  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Z tohoto důvodu budeme místo „objekt popsáný  $n$ -tíci  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ “ říkat prostě „objekt  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ “. Objekt nyní patří do první třídy, jestliže platí

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j \geq a, \quad (39)$$

a patří do druhé třídy, jestliže

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j < a. \quad (40)$$

Popsaný klasifikátor tedy rozdělí danou množinu objektů na dvě třídy.

Nyní budeme zkoumat množinu klasifikátorů popsáného typu při pevně zvoleném rozkladu na systém oblastí  $\{O_j\}$ , avšak při libovolně volitelných hodnotách **vah**  $a_j$  a práhu  $a$ .

Zformulujeme **problém syntézy klasifikátoru**. Je

dána jistá množina objektů  $\mathfrak{C} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \subset B^n$  (viz str. 56) a její rozklad na dvě podmnožiny:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B},$$

kde  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$ . Problém záleží v nalezení vah  $a_j$  a práhu  $a$  tak, aby odpovídající klasifikátor rozlišoval množinu  $\mathfrak{A}$  od  $\mathfrak{B}$ . (Množina  $\mathfrak{C}$  je obvykle vlastní podmnožinou<sup>1)</sup>  $B^n$ ).

Je zřejmé, že k řešení posledního problému je nutno řešit soustavu lineárních nerovností (39), (40). My se však — podobně jako v předcházejícím odstavci — omezíme na otázku existence. Z věty 17 předchozího odstavce vyplývá následující

**Věta 18.** *Klasifikátor (tj. koeficienty  $a_1, \dots, a_n$  a  $a$ ) rozlišující dvě třídy objektů  $\mathfrak{A}$  a  $\mathfrak{B}$  existuje právě tehdy, jestliže je splněna jedna z těchto dvou podmínek:*

- a) alespoň jedna z množin  $\mathfrak{A}$  a  $\mathfrak{B}$  je prázdná,
- b) obě dvě množiny jsou neprázdné a platí

$$K(\mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{B}) = \emptyset.$$

Doufáme, že se nám v tomto odstavci alespoň částečně podařilo ukázat, v čem spočívá problematika rozlišování objektů. Poznamenejme, že celá problematika i metody řešení jsou podstatně složitější. Tak především obvykle jde o rozlišení několika tříd objektů, jak jsme ostatně uváděli na začátku tohoto odstavce. Za druhé v uvažovaném nejjednodušším případě se vytváří prostý součet signálů

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j, \text{ zatímco v obecném případě se používá i složi-}$$

---

<sup>1)</sup> Říkáme, že  $M$  je vlastní podmnožinou množiny  $N$ , jestliže  $M \subset N$  a  $M \neq N$ .

tějších (nelineárních) závislostí na proměnných  $x_j$ , což přirozeně má za následek zvětšení rozlišovacích schopností klasifikátoru.

Nakonec nejdůležitější poznámka. Množina rozlišovaných objektů nebývá zpravidla apriori známa, nebo obsahuje „příliš mnoho“ prvků, nebo je složitá apod. V takových případech se k syntéze klasifikátorů obvykle používá metod adaptace (učení). Tyto metody spočívají v tom, že na klasifikátor přichází v nějaké posloupnosti pouze jistá podmnožina „typických“ objektů, u nichž je známo předem, do které třídy příslušný objekt patří. Na základě učící posloupnosti objektů se určí parametry klasifikátoru.

## Cvičení

Ve cvičeních 1 – 5 je  $x_j \geq 0$ .

1. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned}2x_1 + 5x_2 &\leq 3, \\ -3x_1 + 8x_2 &\leq -5, \\ 3x_1 - 2x_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

nemá přípustné řešení.

2. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned}-3x_1 + 2x_2 &\leq -1, \\ x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

má přípustná řešení a nemá optimální řešení.

3. Bez přímých výpočtů dokažte, že úloha duální k úloze ze cvičení dvě nemá přípustné řešení.

4. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_3 + x_4 &\leq 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 + x_3 &\leq 1, \\
 x_1 + x_3 &\leq 1, \\
 x_3 + x_4 &\leq 3, \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \max
 \end{aligned}$$

má optimální řešení  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$ .

5. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned}
 -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\
 x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\
 x_1 + x_2 &\leq 5, \\
 x_1 - x_2 &\rightarrow \max
 \end{aligned}$$

má optimální řešení  $x_1 = 4, x_2 = 1$ .

6. V odstavci I.3 jsme definovali pojem konvexní množiny. Necht  $K$  je libovolná konvexní množina obsahující konečnou a neprázdnou množinu bodů  $M$  prostoru  $R^n$ . Potom platí  $K \supset K(M)$  (tento fakt se též někdy vyjadřuje slovně: Konvexní obal je „nejmenší“ konvexní množina obsahující danou množinu).

7.a) Určete počet prvků množiny  $B^n$  — viz str. 56. (Odpověď:  $2^n$ ).

b) Určete počet všech logických funkcí  $n$  proměnných. (Odpověď:  $2^{2^n}$ ). (Návod: Všimněte si, že tento počet se rovná počtu prvků množiny  $B^{2^n}$ ).

8. (Ilustrace pojmu logické funkce). Necht  $A, B, C$  označují libovolné výroky. Těmto výrokům přiřadíme dvouhodnotové proměnné  $x_A, x_B, x_C$  definované takto:  $x_A = 1$ , jestliže výrok **A** platí,  $x_A = 0$ , jestliže výrok **A** neplatí; zcela analogický je význam proměnných  $x_B$  a  $x_C$ . Necht nyní výrok **C** vznikne operací disjunkce (logického součtu), symbolicky to zapisujeme  $C = A \vee B$ , tj.  $C = A \vee B$  platí právě tehdy, jestliže platí alespoň jeden z výroků **A** nebo **B**. V tomto případě je  $x_C$  logickou funkcí proměnných  $x_A$  a  $x_B$ , položme

$$x_C = f_{A \vee B}(x_A, x_B).$$

a) Sestrojte tabulku hodnot funkce  $f_{A \vee B}(x_A, x_B)$ .

b) Ukažte, že platí

$$x_C = \max(x_A, x_B),$$
$$x_C = 1 - (1 - x_A)(1 - x_B) = x_A + x_B - x_A \cdot x_B.$$

c) Nalezněte logické funkce odpovídající dalším logickým operacím: konjunkce  $A \wedge B$ , implikace  $A \Rightarrow B$ , negace  $\text{non}A$  a ekvivalence  $A \Leftrightarrow B$ .

9. Přiřaďte každé uspořádané čtveřici z nul a jedniček  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 \cdot 2^3 + \xi_2 \cdot 2^2 + \xi_3 \cdot 2^1 + \xi_4.$$

Ukažte, že lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic odpovídá rostoucí posloupnosti čísel  $d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ .

10. Uvažujme množinu všech uspořádaných  $n$ -tic  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  z nul a jedniček. Každé  $n$ -tici  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  přiřadíme číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \cdot 2^{n-1} + \xi_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + \xi_n.$$

Na množině všech  $n$ -tic definujeme vztah lexikografického uspořádání: Budeme říkat, že  $n$ -tice  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  je před  $n$ -tici  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  a zapíšeme to symbolicky  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , jestliže

$$d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < d(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Ukažte způsob konstrukce lexikograficky uspořádané posloupnosti  $n$ -tic, analogický popsanému způsobu uspořádání čtveřic.

<sup>1)</sup> Výrok  $A \wedge B$  platí právě tehdy, jestliže platí oba dva výroky  $A$  a  $B$  současně;

Výrok  $A \Rightarrow B$  platí právě tehdy, jestliže buď  $A$  neplatí, nebo současně platí  $A$  i  $B$ ;

Výrok  $\text{non}A$  platí právě tehdy, jestliže neplatí  $A$ ;

Výrok  $A \Leftrightarrow B$  platí právě tehdy, jestliže výroky  $A$ ,  $B$  buď současně platí, nebo neplatí.