DODATOK

A. Logika a množiny

Výrokom nazývame takú gramatickú vetu (či niekoľko viet), ktorá má zmysel a niečo tvrdí či popiera. Môže byť zapísaná slovne, alebo formulou, prípadne oboma. Príklady: „Pre dĺžky a, b, c strán pravouhlého trojuholníka s preponou c platí $a^2 + b^2 = c^2$"; „$(x + y)^2 = x^2 - 2\,xy$, pre všetky párne čísla x, y" — sú výroky, prvý z nich je (v e-rovine) pravdivý, druhý je nepravdivý. Naopak veta „Dunaj je múdre veľkomesto" je bezo zmyslu.

Výroky označujeme „tučnými" veľkými literami: **A**, **B**, **E**, **L**, **U**, apod. Nech **A**, **B** sú výroky, potom symbol

$\neg$ **A** značí výrok: *nie je pravda že platí* **A**;

A $\Rightarrow$ **B** značí výrok:

ak platí **A**, *potom platí aj* **B**; *(implikácia)*

A $\Leftrightarrow$ **B** značí výrok:

A *platí práve vtedy keď aj* **B**; *(ekvivalencia)*

Výrok **A** $\Leftrightarrow$ **B** je pravdivý v dvoch prípadoch: buď **A** aj **B** sú pravdivé, alebo **A** aj **B** sú nepravdivé. Ak jeden z výrokov **A**, **B** je pravdivý a druhý nepravdivý, potom výrok **A** $\Leftrightarrow$ **B** je nepravdivý, čiže výrok $\neg$ **A** $\Leftrightarrow$ **B** je pravdivý.

Výrok **A** $\Rightarrow$ **B** je nepravdivý jedine v tom prípade, ak je **A** pravdivý a **B** nepravdivý; vo všetkých ostatných prípadoch je pravdivý. Z pravdy nie je možné dokázať nepravdu. Ale pozor! Výrok **A** $\Rightarrow$ **B** je pravdivý aj v tom prípade, ak predpoklad, tj. výrok **A**, je nepravdivý a záver, tj. výrok **B**, je pravdivý. Je totižto dobre možné z nepravdy dokázať pravdu. Napríklad z výroku (zjavne vadného) $2 = 10$ obdržíme postupne povolenými úpravami: $[2 = 10] \Rightarrow$ $\Rightarrow [2 - 6 = 10 - 6] \Rightarrow [-4 = 4] \Rightarrow [(-4)^2 = 4^2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [16 = 16]$. Dobre si poslednú úvahu premyslite, je častým zdrojom logických chýb.

Čitateľovi prospeje, ak si dobre rozmyslí nasledujúce vzťahy platné medzi ľubovolnými výrokmi **A**, **B**:

a) výrok $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ je pravdivý práve vtedy, keď je pravdivý aj výrok $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, aj výrok $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$;

b) Výrok $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ je pravdivý práve vtedy, keď je pravdivý aj výrok $\neg\, \mathbf{B} \Rightarrow \neg\, \mathbf{A}$;

c) Výrok $\neg\, (\neg\, \mathbf{A})$ je pravdivý práve vtedy, keď aj výrok **A**, tj. platí $\neg\, (\neg\, \mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}$.

Predpokladáme, že čitateľovi pojem *množiny* nie je celkom neznámy. K zápisu množín používame svorkové zátvorky $\{\ \}$.

Ak a, b, C, Q_1 sú akékoľvek objekty, potom množinu, ktorá sa skladá práve z týchto štyroch objektov, značíme $\{a, b, C, Q_1\}$. Teda symbol $\{X\}$ označuje množinu, ktorá obsahuje jediný prvok — objekt X. Napríklad ak p je priamka (úsečka, kružnica, apod.) potom na p často hľadíme ako na množinu bodov X pre ktoré $X \in p$. Avšak symbolom $\{p\}$ označujeme množinu, ktorá obsahuje jediný prvok a to priamku (úsečku, kružnicu a pod.) p. Bod $X \in p$ nie je prvkom množiny $\{p\}$, čiže $X \notin \{p\}$.

Symbolom $\emptyset$ označujeme *prázdnu množinu*, tj. množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok.

Ak M, N sú dve (nie nutne rôzne) množiny, potom symbolom $\mathsf{M} \cup \mathsf{N}$ označujeme ich *zjednotenie* tj. množinu tých X, pre ktoré platí buď $X \in \mathsf{M}$, alebo $X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{M} \cap \mathsf{N}$ označujeme ich *prienik* tj. množinu tých X, pre ktoré platí aj $X \in \mathsf{M}$, aj $X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$ označujeme výrok: M *je podmnožina* množiny N, tj. výrok $X \in \mathsf{M} \Rightarrow X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{p}: \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ označujeme zobrazenie p z množiny M do množiny N tj. predpis, podľa ktorého každému prvku $X \in \mathsf{M}$ je možné a to jednoznačne priradiť prvok množiny N. Tento prvok označujeme potom $\mathsf{p}(X)$.

Poznamenajme, že v texte tejto knižočky sa zobrazenie vyskytuje v článku 3.3, pričom tri tam vystupujúce zobrazenia sú značené σ, p a P.

B. Polodotyčnica (v e-rovine).

Nech T je koncový bod kruhového oblúka a, ležiaceho na kružnici $k(S, r)$. Nech t je dotyčnica ku kružnici k vedená v bode T. Zvoľme bod $P \in a$ tak, aby stredový uhol $\sphericalangle\, TSP$ prislúchajúci oblúku $\widehat{TP} \subset a$ bol uhlom ostrým. Potom polpriamku $t_1 \equiv TQ$, kde $Q \equiv t \cap PS$, nazveme *polodotyčnicou oblúka a v bode T*. Pri tejto definícii je nepodstatné, či koncový bod T sám k oblúku a náleží, alebo nenáleží.

C. Poznámka o uhloch (v e-rovine).

Nech $\sphericalangle\, AVB$ a $\sphericalangle\, CVD$ sú dva pravé uhly so spoločným vrcholom V. Nech naviac $AV = BV = CV = DV$. Uhly $\sphericalangle\, AVB$ a $\sphericalangle\, CVD$ nazveme súhlasne orientované, ak otočenie okolo bodu V, ktoré prevedie bod C do bodu A prevedie aj bod D do bodu B. V opačnom prípade povieme, že uhly $\sphericalangle\, AVB$ a $\sphericalangle\, CVD$ sú opačne orientované. Ak veľkosť uhla $\sphericalangle\, AVC$ označíme α, potom veľkosť uhla

$\sphericalangle BVD$ je rovná α v prípade, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle$ CVD sú súhlasne orientované a $180° - \alpha$ v prípade, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVD$ sú nesúhlasne orientované.

D. Mocnosť bodu ke kružnici (v e-rovine).

Nech je daná kružnica $k(S, r)$ a bod M. Číslo $MS^2 - r^2$ nazveme mocnosť bodu M ku kružnici $k(S, r)$. Platí nasledujúca

Veta o mocnosti bodu ku kružnici.

Nech $P \not\equiv Q$ sú priesečníky priamky p s kružnicou $k(S, r)$ a nech M je bod priamky p. Potom číslo $MP \cdot MQ$ je rovné

a) mocnosti bodu M ku kružnici $k(S, r)$ práve keď M leží zvonka, alebo na kružnici k,

b) zápornej hodnote mocnosti bodu M ku kružnici $k(S, r)$ práve keď M leží vnútri, alebo na kružnici k.

V prípade a) je mocnosť bodu M ku k rovná tiež číslu MT^2, kde T je dotykový bod (ktorejkoľvek) dotyčnice vedenej bodom M ku k. Mocnosť bodu M ku k je rovná nule práve keď $M \in k$ a číslu $-r^2$ práve keď $M \equiv S$.

Dôkaz. Prípady $S \equiv M$ a $M \in k$ sú evidentné. Nech teda $S \not\equiv M \in k$, $S \in p$. Nech A, B sú priesečníky priamky SM s kružnicou k. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať také značenie bodov A, B, P a Q, že body M, A, P a S ležia v jednej polrovine vyťatej priamkou BQ. Pretože veľkosti uhlov $\sphericalangle PQA$, $\sphericalangle PBA$ sú rovnaké podľa vety o obvodovom uhle, sú trojuholníky MPB a MAQ podobné. Preto je $MP : MB = MA : MQ$, odkiaľ

$$MP.MQ = MA.MB = |(MS - r).(MS + r)| = \\ = |MS^2 - r^2|.$$

Číslo v poslednej absolútnej hodnote je mocnosť M ku k; toto číslo je zrejme kladné ak M leží zvonka a záporné ak M leží vnútri k. Posledné tvrdenie vety: $MT^2 = MS - r^2$ je okamžite zrejmé podľa Pytagorovej vety. Veta o mocnosti je dokázaná.

E. Poznámka ku kružnici (v e-rovine).

Dokážeme nasledovnú vetu.

Veta. Nech M je vonkajší bod kružnice $k(S,r)$ a nech Q je vnútorný bod kružnice k ležiaci na polpriamke SM. Nech konečne T je jeden z priesečníkov kolmice vedenej bodom Q ku MS s kuržnicou k. Potom priamka MT je dotyčnicou ku kružnici $k$práve vtedy, ak platí $SQ.SM = = ST^2$.

Dôkaz. Ak posledná rovnica platí, potom podľa euklidovej vety o strane je uhol STM pravý a teda $MT \perp TS$ je dotyčnicou ku k s dotykovým bodom T. Ak naopak je MT dotyčnicou, potom znovu podľa euklidovej vety o strane platí horný vzťah.

F. Veta Pappova (v e-rovine).

Nech sú dané dve rôzne priamky p a p' a nech a, b, c, d, sú priamky, vzájomne rôznobežné so spoločným priesečníkom $V \notin p \cup p'$. Priesečníky priamok a, b, c, d s priamkou p resp. p' označme v poradí A, B, C, D resp. A', B', C', D'. Potom platí:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'}.$$

Dôkaz. Nech v je vzdialenosť bodu V od priamky p a označme α, β, γ, σ veľkosti uhlov AVD, BVC, AVC, BVD v poradí. Obsah trojuholníka AVD môžeme vyjadriť dvoma rôznymi spôsobmi. Tak dostaneme rovnosť $AD.v = 2\,AV.DV \sin\alpha$. Podobné rovnosti napíšeme pre trojuholníky BVC, AVC, BVD. Potom

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.v}{AD.v} : \frac{BC.v}{BD.v} =$$

$$= \frac{AV.CV \sin\gamma}{AV.DV \sin\alpha} : \frac{BV.CV \sin\beta}{BV.DV \sin\sigma} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} : \frac{\sin\beta}{\sin\sigma}.$$

Rovnakú úpravu prevedieme aj pre pravú (čiarkovanú) stranu dokazovanej rovnosti. Pretože výsledok v obidvoch úpravách je ten istý rovnajú sa aj obidva upravované výrazy. Veta je dokázaná. Poznamenajme, že poloha priamok p, p' môže byť buď rovnobežná, alebo rôznobežná. V poslednom prípade môže napríklad bod A splynúť s A', teda $A \equiv A' \equiv p \cap p'$.