II.

ŘADY

1. Mnohočleny a řady. Při odvozování různých vzorců pro binomické koeficienty, Stirlingova čísla atd. jsme v předchozí kapitole využívali mj. početních operací s mnohočleny: sčítání, násobení a umocňování. Nemluvili jsme však zatím nikde o dělení nebo odmocňování. Důvod je jasný, obecně nelze vždy dělit mnohočlen mnohočlenem tak, aby výsledek byl opět jen mnohočlen, tzn. beze zbytku. V této souvislosti se mnohočleny chovají podobně jako celá čísla, která také nemůžeme mezi sebou libovolně dělit, chceme-li zůstat stále v oboru celých čísel. Ostatně stejně jako pro celá čísla byla i pro mnohočleny vypracována teorie dělitelnosti; tvoří zajímavý oddíl algebry. A odmocňování mnohočlenů je ještě složitější záležitost.

Na druhé straně by nám však jistě možnost použití dalších operací s mnohočleny dovolila získat nové výsledky. Vezměme jen např. dvojčlen $1 + x$. Při studiu binomických koeficientů jsme byli omezeni na jeho celé nezáporné mocniny. Kdybychom jím uměli vždy dělit anebo vypočítat jeho druhou odmocninu, mohli bychom studovat i jeho záporné, popříp. i lomené mocniny. Avšak neexistuje mnohočlen, jehož součin s dvojčlenem $1 + x$ by byl identicky roven jedné — to by bylo $(1 + x)^{-1}$ —, ani mnohočlen, jehož druhou mocninou by byl dvojčlen $(1 + x)$.

Jde-li o čísla, pomáháme si z nesnází s dělením a odmocňováním tím, že číselný obor rozšiřujeme zavedením čísel racionálních (zlomků), nebo ještě dále čísel reálných;

omezení při dělení se pak redukují na jediné: zákaz dělení nulou a odmocňovat můžeme v oboru nezáporných reálných čísel bez omezení.

Pokusíme se teď provést něco podobného s mnohočleny. Daný obor si rozšíříme přidáním nových prvků tak, abychom si dělení a odmocňování zjednodušili. Postup, kterého přitom užijeme, nevyřeší sice všechny problémy s dělením, ale pro naše účely postačí.

Již při definici stupně mnohočlenu se setkáváme s jakousi nedůsledností: pro určení stupně mnohočlenu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n \tag{1}$$

není rozhodující, kolik členů v (1) skutečně vypíšeme, ale jen to, který z nich je „poslední nenulový“. Je to něco podobného jako při psaní desetinných zlomků, kdy také můžeme na konec připsat nuly, aniž by se hodnota zlomku změnila:

$$0{,}1 = 0{,}100 = 0{,}1000000 \ .$$

Je zřejmé, že každý mnohočlen v jedné proměnné je zcela určen posloupností svých koeficientů, avšak dvě různě dlouhé posloupnosti, lišící se jen počtem nul „na konci“, odpovídají témuž mnohočlenu:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_0 + a_1x +$$
$$+ a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \ . \ x^{n+1} + \ldots + 0 \ . \ x^{n+m} \ .$$

Abychom tyto nedůslednosti odstranili, umluvíme se, že napříště zásadně *každému* mnohočlenu přiřadíme *nekonečnou posloupnost koeficientů*; ovšem jen konečný počet jich bude nenulových. Obdobně upravíme též zápis mnohočlenů a místo (1) budeme zásadně psát

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{2}$$

bez udání posledního vypsaného členu. Tím nám odpadne starost o to, zda v (1) není náhodou $a_n = 0$, zjednoduší se pravidla zápisu při sčítání mnohočlenů (stupeň součtu může být totiž nižší než stupně sčítanců) atd. Skutečně podstatná bude pro mnohočleny pouze ta vlastnost, že ve vyjádření (2) je vždy jen *konečný počet* nenulových koeficientů.

Na první pohled tu jde jen o zcela formální úpravu zápisu mnohočlenů. Snadno se totiž přesvědčíme, že pravidla pro počítání s mnohočleny nejsou touto změnou nijak dotčena. Hlubší význam přechodu k vyjádření (2) však tkví v tom, že nám umožňuje provést ono slíbené rozšíření oboru mnohočlenů o nové prvky. K mnohočlenům přidáme i všechny takové výrazy tvaru (2), v nichž je *nekonečně mnoho nenulových* koeficientů. Prvkům tohoto širšího oboru budeme říkat *řady*. Mezi ně počítáme samozřejmě také všechny mnohočleny.

Rozšíření oboru o nové prvky bude ovšem mít plný význam teprve tehdy, jestliže se nám podaří zavést pro ně vhodné početní operace, resp. rozšířit i na nové prvky — řady — vztahy a operace zavedené v původním užším oboru mnohočlenů. To bude nyní naším prvním úkolem.

Pro zjednodušení budeme v dalším při zápisu řad, stejně jako to běžně děláme u mnohočlenů, vynechávat členy s nulovými koeficienty a nevypisovat koeficienty rovné jedné. Místo

$$1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + \ldots + 0x^{2n-1} + 1x^{2n} + \ldots$$

budeme psát

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

apod. Pro označování řad budeme též užívat obdobných symbolů jako pro mnohočleny, např. $A(x) = \Sigma a_k x^k$ apod.

A nakonec ještě jednu *výstrahu*. I když analogie mezi řadami a mnohočleny je zjevná a je vlastně smyslem celé naší teorie, přesto jsou řady něco zcela nového, co vlastně ještě pořádně neznáme (zatím jsme si je pouze definovali), a proto na ně nesmíme ukvapeně přenášet bez řádné definice a bez důkazu všechno, co známe o mnohočlenech. Zacházet s řadami se musíme znovu učit od začátku.

2. Počítání s řadami. Nejprve musíme definovat rovnost mezi řadami; učiníme tak zcela přirozeným způsobem. Platí

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots =$$
$$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots$$

právě když $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., tzn. když $a_k = b_k$ pro všechna nezáporná celá k. Každá řada je tedy zcela jednoznačně určena posloupností svých koeficientů. Naše definice rovnosti řad je přitom plně ve shodě s rovností zavedenou pro mnohočleny. V případě, že dané dvě řady jsou mnohočleny, rovnají se jako řady právě tehdy, rovnají-li se jako mnohočleny ve smyslu obvyklé definice. Jde tedy skutečně o *rozšíření* vztahu rovnosti z mnohočlenů na všechny řady.

Operaci *sčítání řad* zavedeme rovněž obdobně jako u mnohočlenů. Bude

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) + \tag{3}$$
$$+ (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots) =$$
$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k + \ldots ,$$

právě když $c_k = a_k + b_k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vztah rovnosti i operace sčítání řad jsou celkem jednoduše vyjádřeny pomocí rovnosti a sčítání jednotlivých koeficientů. Není proto nijak těžké si ověřit, že mají všechny patřičné vlastnosti. Rovnost řad je reflexivní, symetrická a tranzitivní relace, tzn. že pro libovolné řady $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ platí

$$A(x) = A(x) \; ; \tag{R}$$

$$\text{jestliže } A(x) = B(x) \,, \quad \text{potom } B(x) = A(x) \; ; \tag{S}$$

$$\text{jestliže } A(x) = B(x) \quad \text{a} \quad B(x) = C(x) \,, \tag{T}$$

$$\text{potom } A(x) = C(x) \; ;$$

pro sčítání řad platí zákony asociativní a komutativní:

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = [A(x) + B(x)] + C(x) \,, \tag{A}$$

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x) \,. \tag{K}$$

Úlohu neutrálního prvku (nuly) při sčítání hraje řada, jež má všechny koeficienty nulové; značíme ji $0(x)$

$$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

Podrobnější ověření všech těchto skutečností je tak snadné, že si je dovolíme přenechat čtenáři. Rovněž snadno uvidíme, že pro řady, které jsou mnohočleny, se sčítání řad shoduje se sčítáním mnohočlenů. Výsledek je stejný, ať použijeme kterékoliv z obou definic.

Další operací, kterou potřebujeme rozšířit na řady, je *násobení*. Bude

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) \,. \\ &. \, (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots) = \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_kx^k + \ldots \,, \end{aligned} \tag{4}$$

právě když

$$d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} \tag{5}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Také tato definice je ve shodě s definicí operace násobení mnohočlenů. Jsou-li dané dvě řady mnohočleny, tj. mají-li obě jen konečný počet nenulových koeficientů, je i jejich součin podle (4) mnohočlenem, a je to právě ten mnohočlen, který bychom dostali vynásobením obou daných mnohočlenů podle definice násobení mnohočlenů.

Již ze symetrie výrazu (5) vidíme, že násobení řad je operace komutativní. Platí vždy

$$A(x) \,.\, B(x) = B(x) \,.\, A(x) \; ; \tag{K}$$

ověření asociativnosti násobení řad, tj. vztahu

$$A(x) \,.\, [B(x) \,.\, C(x)] = [A(x) \,.\, B(x)]C(x) \; , \tag{A}$$

je o něco složitější, resp. zdlouhavější, ale v podstatě i při něm jde jen o elementární úpravy algebraických výrazů. Postup je ostatně stejný jako při ověřování asociativnosti násobení mnohočlenů.

Také distributivní zákon (vzhledem ke sčítání), tj. platnost vztahu

$$A(x) \,.\, [B(x) + C(x)] = A(x) \,.\, B(x) + A(x) \,.\, C(x) \, , \tag{D}$$

se snadno ověří.

Vcelku tedy můžeme říci, že početní operace sčítání a násobení řad jsou zcela přirozeným rozšířením obou těchto operací z oboru mnohočlenů a že si při rozšiřování zachovávají své vlastnosti (A), (K), (D).

Mezi mnohočleny, jež jsou zvláštním případem řad, patří také mnohočleny nultého stupně, tj. reálná čísla — konstanty. Každé reálné číslo c můžeme tedy napsat též ve tvaru řady

$$c = c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

s jediným nenulovým (pokud $c \neq 0$) koeficientem. Poněvadž umíme již násobit řadu řadou, umíme také násobit řadu reálným číslem. Podle (4) a (5) bude

$$c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) =$$
$$= ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \ldots + ca_kx^k + \ldots$$

Vezmeme-li zde speciálně $c = 1$, vidíme, že řada

$$1(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

hraje úlohu *neutrálního prvku při násobení* (jednotka v oboru řad). Pro libovolnou řadu $A(x)$ platí

$$1(x) \, . \, A(x) = A(x) = A(x) \, . \, 1(x) \, .$$

Zvolíme-li naopak $c = -1$, můžeme definovat pojem *řady opačné* k dané řadě $A(x)$. Bude to řada

$$-A(x) = (-1) \, . \, A(x) \, ,$$

kterou z $A(x)$ dostaneme změnou znaménka u *všech* jejích koeficientů. Je zřejmé, že platí

$$A(x) + [-A(x)] = 0(x) \, , \quad -[-A(x)] = A(x)$$

pro každou řadu $A(x)$. Pomocí opačné řady pak již snadno definujeme operaci *odečítání*; odečíst řadu $A(x)$ znamená přičíst řadu k ní opačnou.

Zvláštní úlohu při násobení hraje také nulová řada $0(x)$. Pro libovolnou řadu $A(x)$ totiž platí $A(x) \, . \, 0(x) = 0(x)$. Velmi důležité je však tvrzení obrácené:

Jestliže součin dvou řad $A(x) \, . \, B(x)$ je roven nulové řadě $0(x)$, pak je $A(x) = 0(x)$ nebo $B(x) = 0(x)$.

Skutečně, mějme dvě řady

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots$$

a

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots ,$$

takové, že $A(x) \,.\, B(x) = 0(x)$, a předpokládejme, že $B(x) \neq \neq 0(x)$. Máme tedy dokázat, že je $A(x) = 0(x)$. Ježto $B(x) \neq 0(x)$, nejsou všechny koeficienty b_k řady $B(x)$ rovny nule. Budiž b_m první nenulový koeficient řady $B(x)$, tzn. že je buď $m = 0$, $b_0 \neq 0$, anebo $m > 0$, $b_m \neq 0$ a $b_k = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Pro koeficienty d_k součinu $D(x) = A(x) \,.\, B(x)$ platí ovšem vzorec (5). Počítejme podle něho koeficient d_m, který je nutně roven nule, protože podle předpokladu je $D(x) = A(x) \,.\, B(x) = 0(x)$. Máme tedy

$$0 = d_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \ldots + a_mb_0 = a_0b_m ,$$

neboť $b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$. Avšak $b_m \neq 0$, a tedy nutně $a_0 = 0$. Podobně pro koeficient d_{m+1} bude

$$0 = d_{m+1} = a_0b_{m+1} + a_1b_m + a_2b_{m-1} + \ldots a_{m+1}b_0 = a_1b_m ,$$

takže také $a_1 = 0$ atd. Stejným způsobem, resp. obecně indukcí dokážeme, že $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$; to však znamená, že je $A(x) = 0(x)$, ale to jsme měli právě dokázat.

Čtenář, který je obeznámen s příslušnými algebraickými pojmy, si patrně již uvědomil význam právě dokázaného tvrzení. Spolu s uvedenými vlastnostmi rovnosti, sčítání a násobení totiž tato věta znamená, že řady v naší definici tvoří — podobně jako mnohočleny — *obor integrity*. (Blíže o tom viz citovaný již svazek č. 26 Školy mladých matematiků — K. Hruša, *Polynomy v moderní algebře*, anebo knihu V. Kořínek, *Základy algebry*, NČSAV, Praha 1953.)

Podívejme se teď na možnost *dělení*. Také zde budeme nejprve definovat pojem řady *reciproké* („převrácené") k dané řadě a dělení řadou pak zavedeme jako násobení řadou reciprokou. Mějme tedy dánu řadu

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{6}$$

a hledejme k ní řadu

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots \tag{7}$$

takovou, aby jejich součin byl

$$A(x) \,.\, B(x) = 1(x) \equiv 1 \,.$$

Ze vzorce (5) vidíme ihned, že musí především platit $a_0b_0 = 1$. To je však možné jenom tehdy, je-li $a_0 \neq 0$, jinak nenajdeme žádné vyhovující číslo b_0. Dostali jsme tak jednu *nutnou podmínku* pro to, aby k dané řadě (6) mohla existovat reciproká řada (7). Lze však ukázat, že tato podmínka je také *postačující*. Jakmile v (6) je $a_0 \neq 0$, dovedeme řadu (7) určit. Skutečně, její koeficienty b_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) počítáme postupně z (5) porovnáním se známými koeficienty řady $1(x)$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1} \,, \\ b_1 &= -a_1a_0^{-2} \,, \\ b_2 &= a_1^2a_0^{-3} - a_2a_0^{-2} \,, \end{aligned}$$

atd.

Příklad 1. Hledejme řadu reciprokou k řadě

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots \tag{8}$$

(s koeficienty vesměs rovnými jedné). Podmínka nenulovosti koeficientu a_0 je tu splněna, můžeme tedy počítat koeficienty b_k reciproké řady naznačeným postupem. Budou to $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = -1 + 1 = 0, \ldots$ atd., obecně $b_k = 0$ pro $k = 2, 3, 4, \ldots$ Hledanou řadou reciprokou k (8) je tedy řada — mnohočlen

$$1 + (-1)x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots = 1 - x .$$

Poněvadž operace násobení řad je komutativní, vidíme, že je-li (7) řada reciproká k řadě (6), je také (6) řada reciproká k řadě (7). Příklad 1 nám tak zároveň ukazuje, že (8) je řada reciproká k řadě — mnohočlenu $1 - x$.

Jak jsme si již před chvílí řekli, umožňuje pojem reciproké řady zavést operaci dělení řady řadou. Omezení dané podmínkou nenulovosti absolutního členu v řadě — děliteli je sice obdobné zákazu dělení nulou v oboru reálných čísel, je však přece jen přísnější. Z dělení jsou vyloučeny nejen nulová řada $O(x)$, ale vůbec všechny řady s nulovým absolutním členem, tedy podstatně více. I toto omezení je sice možné odstranit přidáním dalších nových prvků k našim řadám, avšak tím by se zkomplikovala další teorie, a to pro naše účely celkem zbytečně. Spokojíme se proto s řadami tak, jak jsme si je zavedli; musíme si jen uvědomovat, že tvoří sice obor integrity, nikoli však těleso.

Každopádně jsme však dosáhli, pokud se týče dělení, přechodem od mnohočlenů k řadám nesporného pokroku: zmizely problémy s dělitelností. Z toho, že násobení řad je skutečně rozšířením násobení mnohočlenů (pro řady, které jsou mnohočleny, obě definice dávají týž výsledek), plyne také, že i dělení řad — mnohočlenů vede v případě, kdy dělenec je dělitelný dělitelem, ke stejnému výsledku jako dělení mnohočlenu mnohočlenem.

Příklad 2. Z elementární algebry víme např., že

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 .$$

Dělme tedy řadu-mnohočlen

$$1 - x^2 = 1 + 0x + (-1)x^2 + 0x^3 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

řadou-mnohočlenem

$$1 - x = 1 + (-1)x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

K této řadě je však podle příkladu 1 reciproká řada (8), takže výsledkem našeho dělení bude součin

$$(1 - x^2)(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)\,.$$

Provedeme-li zde násobení, dostaneme podle (5) skutečně jako výsledek řadu-mnohočlen

$$1 + x = 1 + 1x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

Z příkladů 1 a 2 mj. vidíme, že součin dvou řad může být mnohočlenem i tehdy, jestliže oba činitelé mnohočleny nejsou. Ostatně řada reciproká k řadě-mnohočlenu aspoň prvého stupně není nikdy mnohočlenem; stačí si totiž uvědomit, že součin dvou mnohočlenů je vždy mnohočlen, jehož stupeň je roven součtu stupňů obou činitelů.

Naopak řady reciproké k mnohočlenům nultého stupně (tzn. k nenulovým konstantám) jsou opět nenulové konstanty (převrácené hodnoty daných), tedy mnohočleny nultého stupně:

$$\begin{aligned}&(c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots)\,.\\ &.\,(1/c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots) =\\ &= 1 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots = \mathit{1}(x)\,.\end{aligned}$$

K nulové řadě $\mathit{0}(x)$ ovšem reciproká řada neexistuje; ostatně $\mathit{0}(x)$ ani není mnohočlen nultého stupně (nulový mnohočlen nemá žádný stupeň).

Cvičení

Znásobte řady

1. $(1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^k + \ldots)\,.$
   $.\,(1 - x + x^2 - + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots)\,,$

2. $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + \ldots + 4x^k + \ldots)\,.$
$.\,(1 - 2x^2 + 2x^4 - + \ldots + (-1)^k\, 2x^{2k} + \ldots)$;

3. $(1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^k + \ldots)\,.$
$.\,(1 - 2x + 2x^2 - + \ldots + (-1)^k\, 2x^k + \ldots)$.

Najděte řadu reciprokou k řadě

4. $1 + 2x + x^2 + 0x^3 + \ldots + 0x^k + \ldots = (1 + x)^2$;

5. $$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k\,.$$

6. V oboru řad proveďte dělení

$(1 + x^2) : (1 + x)$.

7. Určete řadu $A(x)$, pro kterou platí

$A(x)\,(1 + x) =$
$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$

3. Mocniny řad. Násobíme-li danou řadu jí samotnou, bývá obvyklé nazývat součin *čtvercem* nebo *druhou mocninou* dané řady. Je-li dána řada

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \qquad (6)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\,,$$

je její druhou mocninou řada

$$A^2(x) = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \ldots + a'_kx^k + \ldots ,$$

kde ve shodě s (5) je

$$a'_k = a_0a_k + a_1a_{k-1} + \ldots + a_ka_0 = \sum_{j=0}^{k} a_ja_{k-j} , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5'}$$

Obdobně lze zavést i pojem třetí, čtvrté, ... atd., obecně n-té mocniny $A^n(x)$ dané řady $A(x)$

$$A^n(x) = A(x) \,.\, A^{n-1}(x) ,$$

přičemž $A^1(x) = A(x)$. Definici mocnin řady doplníme navíc úmluvou, že nultou mocninou libovolné řady budeme rozumět řadu $1(x)$. Počítání s mocninami řad je pak stejné jako s mocninami reálných čísel: $A^3(x) = A(x) \,.\, A^2(x) = A(x) \,.\, A(x) \,.\, A(x) = A^2(x) \,.\, A(x)$, $A^4(x) = A^3(x) \,.\, A(x) = A^2(x) \,.\, A^2(x) = [A^2(x)]^2$, atd. Vzhledem k asociativnosti a komutativnosti násobení řad je pojem n-té mocniny jednoznačný pro všechna celá nezáporná n a platí obvyklé vzorce

$$A^n(x) \,.\, A^m(x) = A^{n+m}(x) , \tag{9}$$

$$[A(x) \,.\, B(x)]^n = A^n(x) \,.\, B^n(x) , \tag{10}$$

$$[A^n(x)]^m = A^{nm}(x) , \tag{11}$$

pro všechna celá n, $m \geqq 0$.

Bylo by zřejmě výhodné rozšířit pojem mocniny řady i na případ *záporných* mocnitelů, přirozeně tak, aby vztahy (9) — (11) zůstaly stále v platnosti. Takové rozšíření je možné. Stačí totiž, abychom pod minus první mocninou $A^{-1}(x)$ dané řady $A(x)$ rozuměli řadu k ní reciprokou. Přitom ovšem musíme předpokládat, že reciproká řada existuje, tzn. že koeficient a_0 dané řady (6) je nenulový. Záporné mocniny tedy na rozdíl od kladných nebudou definovány pro všechny řady. V dalším budeme řadu reciprokou k $A(x)$ běžně značit $A^{-1}(x)$.

Obecná platnost (pro všechna celá n, m) vztahů (9) — (11) se snadno odvodí z asociativního a komutativního zákona pro násobení řad. Vezměme např. $-m > n > 0$; potom $A^m(x) = [A^{-1}(x)]^{-m} = [A^{-1}(x)]^n \, . \, [A^{-1}(x)]^{-m-n}$, takže

$$\begin{aligned} A^n(x) \, . \, A^m(x) &= A^n(x) \, . \, [A^{-1}(x)]^n \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = \\ &= [A(x) \, A^{-1}(x)]^n \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = \\ &= 1^n(x) \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = A^{m+n}(x) \ , \end{aligned}$$

a podobně v ostatních případech.

Příklad 3. Počítejme druhou mocninu řady (8). Podle vzorce (5′) pro koeficienty čtverce řady dostaneme

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)^2 = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)x^k + \ldots \end{aligned}$$

Zároveň můžeme tvrdit, že tato řada je reciproká k řadě-mnohočlenu $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$; vyplývá to ze vztahu $[A^2(x)]^{-1} = A^{-2}(x) = [A^{-1}(x)]^2$, který platí pro libovolnou řadu $A(x)$, k níž existuje reciproká řada $A^{-1}(x)$.

Máme-li takto definovány celé mocniny řad, kladné i záporné, je zcela přirozená otázka, zda a jak lze zavést mocniny s libovolným racionálním mocnitelem, zejména tedy, zda a jak lze definovat druhou, třetí atd. *odmocninu* z dané řady.

Samotná definice druhé odmocniny z řady nepůsobí potíže. Je-li dána řada

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \ , \tag{7}$$

pak její druhou odmocninou rozumíme přirozeně takovou řadu

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots, \tag{6}$$

pro kterou platí $A^2(x) = B(x)$. Jaké podmínky však musí řada $B(x)$ splňovat, aby se dala řada $A(x)$ nalézt? Z porovnání koeficientů řady $B(x)$ a řady $A^2(x)$ — viz vzorec (5′) — plyne především rovnost $b_0 = a_0^2$. Odtud je ihned vidět, že

1) je-li $b_0 < 0$, neexistuje žádná řada $A(x)$ (s reálnými koeficienty!), která by vyhovovala vztahu $A^2(x) = B(x)$;

2) je-li $b_0 = 0$, je nutně také $a_0 = 0$;

3) je-li $b_0 > 0$, pak a_0 může být buď $\sqrt{b_0}$, nebo $-\sqrt{b_0}$.

Podívejme se dále na případ 3). Porovnáním dalších koeficientů b_k se vzorcem (5′) dostáváme postupně

$$a_1 = b_1/2a_0 \ ,$$
$$a_2 = (b_2 - a_1{}^2)/2a_0 \ ,$$
$$a_3 = (b_3 - 2a_1a_3)/2a_0$$

atd.; ve jmenovateli všech těchto výrazů je vždy $2a_0$, tedy číslo od nuly různé, v čitateli pak jsou výrazy obsahující jen koeficienty b_k dané řady a koeficienty a_k s nižším indexem, tedy určené již v předcházejících krocích. V případě 3), když $b_0 > 0$, můžeme tedy postupně nalézt všechny koeficienty a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) hledané řady $A(x)$. Ze vzorce (5′) pak vyplyne $A^2(x) = B(x)$.

Zbývá tedy probrat ještě případ 2), kdy $b_0 = 0$. Víme již, že nutně $a_0 = 0$, avšak podle (5′) máme pro b_1 rovnost $b_1 = 2a_0a_1$, takže

2a) jestliže $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$, nelze najít řadu $A(x)$, která by vyhovovala vztahu $A^2(x) = B(x)$;

2b) jestliže $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, dostaneme opět porovnáním koeficientů při x^2 podmínku $b_2 = a_1^2$ a jsme v podstatě ve stejné situaci jako na začátku, jenže „o jeden index dále". Jestliže $b_2 < 0$, hledaná řada $A(x)$ neexistuje; jestliže $b_2 > 0$, lze postupně najít jak a_1 ($a_1 = \sqrt{b_2}$ nebo $a_1 = -\sqrt{b_2}$), tak také další koeficienty $a_2, a_3, \ldots$ (vzorce jsou obdobné jako v případě 3); jestliže $b_2 = 0$, pak máme znovu dvě možnosti podle toho, zda je $b_3 \neq 0$ (řada $A(x)$ neexistuje), anebo $b_3 = 0$ — pak rozhoduje znaménko koeficientu b_4 atd.

Můžeme stručně shrnout celý rozbor. K tomu, aby k dané řadě $B(x)$ existovala řada $A(x)$ taková, že $A^2(x) = B(x)$, je *nutné a stačí*, aby *první nenulový* koeficient řady $B(x)$ měl *sudý index* a byl *kladný*.

Podobně jako u reálných čísel plyne z rovnosti $A^2(x) = B(x)$ také $[-A(x)]^2 = (-1)^2 A^2(x) = B(x)$, takže spolu s $A(x)$ je také $-A(x)$ — řada opačná k řadě $A(x)$ — druhou odmocninou řady $B(x)$. Odpovídá to dvojí možné volbě koeficientu a_0 (resp. prvního nenulového koeficientu a_m, je-li $b_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1$, $b_{2m} \neq 0$). Z podmínky $a_0^2 = b_0$ (resp. $a_m^2 = b_{2m}$) dostaneme buď $a_0 = \sqrt{b_0}$, ($a_m = \sqrt{b_{2m}}$), nebo $a_0 = -\sqrt{b_0}$, ($a_m = -\sqrt{b_{2m}}$); volbou znaménka koeficientu a_0 (resp. a_m) jsou už další koeficienty řady $A(x)$ jednoznačně určeny.

Příklad 4. Pokusme se najít druhou odmocninu $A(x)$ řady (8). Podmínka existence je tu splněna, koeficient s indexem nula (tedy sudým) řady (8) je kladný (totiž roven jedné). Z první podmínky $a_0^2 = 1$ vezměme $a_0 = +1$ (volba znaménka). Potom dále vychází $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$, $a_3 = \frac{5}{16}$, ... Pro koeficienty a_k hledané řady existuje obecný vzorec

$$a_k = 4^{-k} \binom{2k}{k} \; ; \tag{12}$$

odvodíme si ho ještě později jinou cestou.

Jak rozbor podmínek, tak i konkrétní výpočet koeficientů při hledání druhé odmocniny z řady je dosti složitý; pro třetí a vyšší odmocniny nebude situace o nic lepší. Existuje však naštěstí ještě jiná, výhodnější metoda hledání odmocnin z dané řady. Ukážeme si ji později, až si dále rozšíříme výběr nástrojů, kterých umíme při zacházení s řadami používat.

Cvičení

Určete druhé odmocniny z řad

8. $1 - 2x + 3x^2 - + \ldots + (-1)^k (k+1)x^k + \ldots$
9. $1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - \ldots =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [x^{3k} + x^{3k+1}] \; .$$

10. Dokažte, že $[-A(x)]^k = (-1)^k A^k(x)$ pro všechna celá k.
11. Zjednodušte diskusi podmínek existence druhé odmocniny řady tím, že z ní vytknete vhodnou sudou mocninu x. Řadu $B(x)$ vyjádříte tedy jako součin jiné řady a mnohočlenu tvaru x^{2m}.

4. Binomická řada. Vraťme se teď na chvíli znovu k tématu, kterým jsme se zabývali ve druhém odstavci první kapitoly, k binomickým koeficientům. Vlastní obsah tzv. binomické věty jakožto tvrzení o platnosti vzorce (I.3), resp. (I.4) tkví v rovnosti koeficientů mnohočlenu $(1 + x)^n$ a výrazů (I.2). Je přitom lhostejné, *kterým směrem* postupujeme, zda *definujeme* čísla $\binom{n}{k}$ vzorcem (I.2) a *pak dokážeme*, že koeficienty v $(1 + x)^n$ jsou právě tato čísla $\binom{n}{k}$, anebo zda *obráceně* definujeme čísla $\binom{n}{k}$ jako koeficienty v $(1 + x)^n$ a pak dokážeme, že pro ně platí vyjádření (I.2).

Tento druhý postup nyní uplatníme při definici čísel $\binom{-n}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$. Podle naší úmluvy je $\binom{n}{k} = 0$ pro $0 \leqq n < k$, takže při pevném $n \geqq 0$ jsou čísla $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ právě koeficienty řady (mnohočlenu) $(1 + x)^n$, což není nic jiného než n-tá mocnina *řady* (mnohočlenu) $1 + x$. Je proto zcela přirozené *definovat* čísla $\binom{-1}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, jako koeficienty řady reciproké k řadě $1 + x$ a obecně pak čísla $\binom{-n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$ jako koeficienty řady reciproké k řadě $(1 + x)^n$, anebo — což je podle (10) totéž — jako koeficienty řady, která je n-tou mocninou řady reciproké k řadě $1 + x$.

Řadu reciprokou k $1 + x$ najdeme snadno známým způsobem; je to řada

$$1 - x + x^2 - + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots, \qquad (13)$$

takže podle naší definice bude

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Řadu (13) nyní umocníme. Podle (5′) dostaneme

$$\binom{-2}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (-1)^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^k = (-1)^k (k+1) ,$$

tedy

$$(1 + 2x + x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)x^k =$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^k (k+1)x^k + \ldots$$

Zcela stejně jako v případě kladných mocnin odvodíme ze vzorců pro násobení řad obecný vztah

$$\binom{-n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{-r}{j} \binom{-n+r}{k-j}, \qquad 0 \leqq r \leqq n ; \tag{15}$$

speciálně tedy při $r = 1$ platí

$$\binom{-n-1}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{-n}{j} (-1)^{k-j} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{j} ,$$

takže

$$(-1)^k \binom{-n-1}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{j} . \tag{16}$$

Pomocí vzorce (16) můžeme už celkem snadno počítat postupně všechna čísla $\binom{-n}{k}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, podobně jako počítáme $\binom{n}{k}$ při $0 \leqq k \leqq n$ z Pascalova trojúhelníka. V následující tabulce je pro názornost uvedeno několik hodnot čísel $\binom{-n}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$; $n = 1, 2, \ldots, 8$:

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 1$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
2	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9
3	1	−3	6	−10	15	−21	28	−36	45
4	1	−4	10	−20	35	−56	84	−120	165
5	1	−5	15	−35	70	−126	210	−330	495
6	1	−6	21	−56	126	−252	462	−792	1287
7	1	−7	28	−84	210	−462	924	−1716	3003
8	1	−8	36	−120	330	−792	1716	−3432	6435

Analogickým způsobem se dá z rovnosti řad

$$(1 + x)^{-n-1} . (1 + x) = (1 + x)^{-n}$$

odvodit vzorec odpovídající vzorci (I.5), totiž

$$\binom{-n-1}{k} + \binom{-n-1}{k-1} = \binom{-n}{k} \qquad (17)$$

platný pro $n \geqq 0$, $k > 0$. Vzorec (17) lze ostatně získat též ze (16) odečtením.

Vedle rekurentních vzorců (16) a (17) bychom ovšem také rádi měli explicitní vyjádření čísel $\binom{-n}{k}$ obdobné vzorci (I.2). Takové vyjádření skutečně existuje; dokážeme si teď, že platí

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}, \quad n > 0,\ k \geqq 0. \qquad (18)$$

Důkaz povedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ vzorec (18) platí, neboť $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ podle (14) a $\binom{k}{k} = 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$. Předpokládejme tedy, že (18) platí pro určité $n = m \geqq 1$ a dokažme, že potom platí také pro $n = m + 1$. Podle (16) však je

$$\binom{-m-1}{k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-m}{j} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j}.$$

Ale podle (I.14′) je součet na pravé straně roven právě číslu $\binom{m+k}{k}$, takže

$$\binom{-m-1}{k} = (-1)^k \binom{m+1+k-1}{k},$$

což není nic jiného nežli rovnost (18) pro $n = m + 1$, kterou jsme právě měli dokázat. Platí tedy (18) pro všechna přirozená n.

Příklad 5. Počítejme $\binom{-7}{4}$ podle (18). Víme, že

$$\binom{-7}{4} = (-1)^4 \binom{10}{4} = \binom{10}{4} = 10 \,.\, 3 \,.\, 7 = 210$$

ve shodě s hodnotou uvedenou v předchozí tabulce.

Vzorec (I.2) se dá poněkud zjednodušit zkrácením číslem $(n-k)!$ S použitím označení zavedeného ve třetím paragrafu první kapitoly můžeme psát

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{F_k(n)}{k!}\,. \tag{19}$$

Je-li $k > n$, platí vzorec (19) rovněž, neboť se pak v čitateli jako jeden z činitelů objeví i číslo $n - n = 0$, takže pak $\binom{n}{k} = 0$ ve shodě s naší úmluvou. Ale i pro $n < 0 \leqq k$ platí (19); je-li $n = -m$, $m > 0$, je podle vzorce (18)

$$\binom{n}{k} = \binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} =$$

$$= (-1)^k (m+k-1)(m+k-2)\dots(m+k-k)\frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!}(-m)(-m-1)\dots(-m-k+1) =$$

$$= \frac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{F_k(n)}{k!}\,.$$

Ve shodě s našimi definicemi čísel $\binom{n}{k}$ tak můžeme psát

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots \tag{20}$$

pro libovolné celé n. Je-li $n \geqq 0$, je (20) mnohočlen, neboť $\binom{n}{k} = 0$ pro všechna $k > n$; je-li $n < 0$, není řada (20) mnohočlenem, neboť všechny její koeficienty jsou pak nenulové. Tím se liší případ záporných mocnin řady $1 + x$

od jednoduššího a známého případu kladných mocnin dvojčlenu $1 + x$.

Příklad 6. Poněvadž $(1 + x)^n (1 + x)^{-n} = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, musí pro každé kladné k platit

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j} \binom{-n}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n}{k-j}, \tag{21}$$

jak vyplývá z porovnání koeficientů při x^k.

Příklad 7. Podobně jako v příkladě 4 v první kapitole porovnejme koeficienty v řadách

$$(1 + x)^{-n} (1 - x)^{-n} = (1 - x^2)^{-n}. \tag{22}$$

Dostaneme tak jednak rovnost

$$\binom{n+k-1}{k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n+2k-j-1}{2k-j},$$

jednak

$$\sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n+2k-j}{2k-j+1} = 0;$$

obě jsou platné pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

Řadám tvaru (20) říkáme *binomické řady*. Jejich speciálním případem jsou tedy i známé mnohočleny $(1 + x)^n$, $n \geqq 0$, mocniny dvojčlenu – binomu $1 + x$ (odtud jejich název). Upozorňujeme však pro jistotu hned teď, že jsme zatím nikde nemluvili o hodnotě řady, o dosazování reálných hodnot za proměnnou x do řady, o substitucích atd. O tom všem pojednáme až v dalších odstavcích. Proto také je třeba rozumět např. rovnostem tvaru (22) zatím jen ve smyslu násobení řad jakožto formální operace s jejich koeficienty.

Vzorec (19) je zcela obecné vyjádření koeficientů $\binom{n}{k}$ pro libovolné celé n a nezáporné celé k. To nás celkem přirozeně vede k myšlence *definovat* výrazem (19) čísla $\binom{n}{k}$ i pro necelé hodnoty n, tzn. položit pro libovolné reálné číslo p a celé $k \geqq 0$

$$\binom{p}{k} = \frac{1}{k!} F_k(p) \,. \tag{19'}$$

Bude nás teď především zajímat, jak se chová řada, která má za koeficienty tato čísla $\binom{p}{k}$, tedy řada

$$B_p(x) = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \ldots + \binom{p}{k} x^k + \ldots \tag{23}$$

Speciálními případy (pro *celé* hodnoty p) řad (23) jsou ovšem naše už známé binomické řady (20), resp. též mnohočleny $(1 + x)^n$. Proto i řady (23) budeme nazývat *binomickými řadami*.

Mějme dvě binomické řady tvaru (23), $B_p(x)$ a $B_q(x)$, a počítejme koeficienty jejich součinu $B_p(x) \,.\, B_q(x)$. Podle (5) je koeficient při x^n v tomto součinu dán součtem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} F_k(p)\, F_{n-k}(q) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(p)\, F_{n-k}(q) \; .$$

Ten však je podle vzorce (I.62) roven právě

$$\frac{1}{n!} \; F_n(p+q) = \binom{p+q}{n} \; ,$$

takže zcela obecně platí

$$B_p(x) \, . \, B_q(x) = B_{p+q}(x) \tag{24}$$

pro všechna reálná p, q. Speciálně pak z (24) plyne také $B_p(x) \, . \, B_p(x) = B_p{}^2(x) = B_{2p}(x)$, resp. obecně $B_p{}^m(x) = B_{mp}(x)$ pro každé reálné p a přirozené m. Je-li r racionální číslo, $r = p/q$ (p, q přirozená), platí tedy také

$$B_r{}^2(x) = B_p(x) = (1+x)^p \; ,$$

takže můžeme řadu $B_r(x)$ pokládat za q-tou odmocninu z řady $B_p(x)$, tj. z mnohočlenu $(1+x)^p$, a můžeme psát

$$B_r(x) = (1+x)^r \tag{25}$$

pro všechna kladná racionální čísla r. Přechodem k reciprokým řadám pak snadno odvodíme platnost (25) i pro záporná r. Při $r = 0$ je ovšem $\binom{0}{k} = 0$ pro všechna $k > 0$ a $B_0(x) = 1(x) = (1+x)^0$; (25) tedy platí pro *všechna racionální r.*

Příklad 8. Ve (23) zvolme $p = \frac{1}{2}$. Podle (25) bude řada

$$B_{\frac{1}{2}}(x) = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots \tag{26}$$

vlastně druhou odmocninou (ve smyslu odstavce 3) z mnohočlenu $1 + x$. Koeficienty v (26) jsou čísla

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-k\right)}{k!} =$$

$$= \frac{1(-1)(-3)\ldots(-2k+3)}{k!\,2^k} =$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k-3)}{k!\,2^k}\,.$$

$$.\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2k-2)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2k-2)} =$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k-2)}{k!\,2^k\,.\,2^{k-1}(k-1)!} =$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,.\,k!\,(k-1)!}\,.$$

Příklad 9. Podívejme se ještě na řadu reciprokou k řadě (26); bude jí podle (24) řada

$$B_{-\frac{1}{2}}(x) = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots \tag{27}$$

Pro její koeficienty dostaneme stejným postupem jako v případě řady (26) vyjádření

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,\ldots\, (2k-1)}{k!\, 2^k} =$$

$$= (-1)^k \frac{2k!}{2^{2k} k!\, k!} = \left(\frac{-1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} .$$

Píšeme-li v (27) všude $-x$ místo x, dostaneme řadu

$$B_{-\frac{1}{2}}(-x) = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 - + \tag{28}$$

$$+ \ldots + (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots ,$$

jejíž koeficienty jsou zřejmě

$$(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = 4^{-k} \binom{2k}{k} .$$

Podle (24) máme přitom $B_{-\frac{1}{2}}^2(x) = B_{-1}(x)$, což je podle (14) právě řada (13). Píšeme-li v ní $-x$ místo x, dostaneme řadu $B_{-\frac{1}{2}}^2(x) = B_{-1}(-x) = (1-x)^{-1}$, tedy řadu (8).

Řada (28) je tedy druhou odmocninou z řady (8); tím jsme si dokázali vlastně obecnou platnost vzorce (12) pro její koeficienty, jak jsme o tom hovořili už v příkladě 4.

Omezenými algebraickými prostředky, které zde máme k dispozici, nedovedeme dokázat, že rovnost (25) *platí i pro jiná nežli racionální r*, ač ovšem řada $B_r(x)$ je i v tomto případě definována. *Nevíme* však *zatím*, jak bychom měli rozumět výrazu $(1 + x)^r$, nevíme totiž, *co znamená r-tá mocnina řady při iracionálním r.*

Cvičení

12. Určete koeficienty řady $B_{\frac{3}{2}}(x) = (1 + x)^{\frac{3}{2}}$ a ověřte, že je
$B_{\frac{3}{2}}^2(x) = B_3(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^2$.

13. Dokažte, že pro *libovolné reálné p* platí

$$\binom{p+1}{k+1} = \binom{p}{k+1} + \binom{p}{k}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

14. Ukažte, že také vzorce (I.7) a (I.14′) i výsledky cvičení 1 a 2 z první kapitoly zůstanou v platnosti, nahradíme-li v nich celé n libovolným reálným p. Stejná tvrzení platí i pro vzorce (15), (16) a (18), které jsme si zatím odvodili jen pro celá n.

5. Derivace řady. Rozšíření pojmu derivace z mnohočlenů na řady je takřka bezprostřední. Je-li dána řada

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\,, \tag{6}$$

nazveme její derivací řadu

$$\mathrm{D}A(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (k+1)a_{k+1}x^k + \\ + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \,. \tag{29}$$

Jde přitom o skutečné rozšíření. Je-li totiž daná řada (6) mnohočlenem, je její derivace (29) stejná jako derivace tohoto mnohočlenu podle definice podané v první kapitole.

Stejně snadno se přesvědčíme, že derivace řady se vzhledem k početním operacím chovají stejně jako derivace mnohočlenů; i pro ně platí pravidla 1, 2 a 3, tzn. vzorce

$$\mathrm{D}[A(x) + B(x)] = \mathrm{D}A(x) + \mathrm{D}B(x) \,, \tag{30}$$

resp. obecněji

$$\mathrm{D}[A_1(x) + A_2(x) + \ldots + A_m(x)] = \\ = \mathrm{D}A_1(x) + \mathrm{D}A_2(x) + \ldots + \mathrm{D}A_m(x) \,, \tag{30'}$$

$$\mathrm{D}[cA(x)] = c\mathrm{D}A(x) \,, \quad c = \text{konst.}, \tag{31}$$

$$\mathrm{D}[A(x) \,.\, B(x)] = A(x)\,\mathrm{D}B(x) + \mathrm{D}A(x) \,.\, B(x) \,, \tag{32}$$

resp.

$$\mathrm{D}[A_1(x)\,A_2(x) \ldots A_m(x)] = \mathrm{D}A_1(x) \,.\, A_2(x) \ldots A_m(x) + \\ + A_1(x)\,\mathrm{D}A_2(x) \,.\, A_3(x) \ldots A_m(x) + \\ + \ldots + A_1(x)\,A_2(x) \ldots A_{m-1}(x)\,\mathrm{D}A_m(x) \,. \tag{32'}$$

Odtud plyne pak pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathrm{D}A^m(x) = mA^{m-1}(x)\,\mathrm{D}A(x) \,, \tag{33}$$

srv. obdobně (I.33). Z rovností $A(x) \,.\, A^{-1}(x) = \mathit{1}(x)$ a $\mathrm{D}\mathit{1}(x) = \mathit{0}(x)$ dostáváme pro derivaci řady $A^{-1}(x)$ reciproké k dané řadě $A(x)$ vzorec

$$\mathrm{D}A^{-1}(x) = -A^{-2}(x)\,\mathrm{D}A(x)\ , \tag{34}$$

takže (33) platí pro *všechna* celá m (včetně záporných). Vzorec (33) lze dokonce zobecnit i na případ libovolných racionálních exponentů r

$$\mathrm{D}A^{r}(x) = rA^{r-1}(x)\,\mathrm{D}A(x)\ . \tag{33'}$$

Podrobné ověření vzorců (30) — (34) přenecháváme pro pocvičení čtenáři.

Příklad 10. Pro naše známé binomické řady $B_p(x) = (1+x)^p$ platí

$$\mathrm{D}B_r(x) = rB_{r-1}(x) = r(1+x)^{r-1} \tag{35}$$

pro všechna racionální r. Platnost prvé rovnosti v (35) lze ovšem dokázat — a to dokonce pro libovolné reálné (tedy i iracionální) r — také přímo z (19) a (I.20) bez odvolávání se na (33').

Také pojem *druhé, třetí, ...* atd. *derivace* se dá pro řady zavést stejně jako pro mnohočleny:

$$\mathrm{D}^k A(x) = \mathrm{D}[\mathrm{D}^{k-1}A(x)]\ , \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{36}$$

přičemž $\mathrm{D}^1 A(x) = \mathrm{D}A(x)$ a $\mathrm{D}^0 A(x) = A(x)$. Platí ovšem opět

$$\mathrm{D}^m[\mathrm{D}^n A(x)] = \mathrm{D}^{m+n}A(x)\ , \quad m, n \geqq 0\ , \tag{37}$$

a

$$\mathrm{D}^k A(x) = \sum_{j=k}^{\infty} F_k\,(j)\,a_j x^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} F_k(j+k)a_{j+k}x^j, \tag{38}$$

kde řadu $A(x)$ předpokládáme danou výrazem (6). Také vzorce (I.39) a (I.40) a Leibnizův vzorec (I.41) se dají přenést z mnohočlenů na řady

$$\mathrm{D}^k[A(x) + B(x)] = \mathrm{D}^k A(x) + \mathrm{D}^k B(x)\ , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{39}$$

$$\mathrm{D}^k[cA(x)] = c\mathrm{D}^k A(x)\ , \qquad c = \text{konst.} \tag{40}$$

$$\mathrm{D}^k[A(x)\,.\,B(x)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{D}^j A(x)\,.\,\mathrm{D}^{k-j} B(x)\ . \tag{41}$$

Příklad 11. Hledejme řadu $A(x)$, pro kterou by platilo

$$\mathrm{D}^k A(x) = A(x) \tag{42}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ Stačí ovšem uvažovat jen $k = 1$; z (29) dostáváme podmínku $ka_k = a_{k-1}$, tzn. $a_k = a_0/k!$. Je-li zde $a_0 = 0$, je hledanou řadou nulová řada $O(x)$, která ovšem podmínce (42) také vyhovuje. Při $a_0 = 1$ vychází pak řada

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \tag{43}$$

Ihned vidíme, že všechny řady, jež vyhovují (42), jsou konstantní násobky řady $E(x)$ z (43).

6. Hodnota řady. Na první pohled by se mohlo zdát, že můžeme být s výsledky pokusu o rozšíření oboru mnohočlenů na řady jedině spokojeni. Potíže s dělením a odmocňováním se zmenšily a jiné operace (jako např. derivování) se nijak podstatně nezkomplikovaly. Ale na světě nebývá nic zadarmo a za zjednodušení v jednom směru zaplatíme komplikacemi, které se objeví jinde.

S mnohočleny jsme totiž prováděli zcela běžně ještě jednu operaci, kterou jsme si dosud nedefinovali pro řady, a to *dosazení určité* (reálné) *hodnoty* za proměnnou x.

A právě zde narazíme v případě řad na bohužel dosti podstatnou obtíž. Dosazením reálného čísla za x do mnohočlenu dostaneme vždy součet jen *konečného* počtu sčítanců, který tedy dovedeme spočítat. V případě řady budeme mít po dosazení za x takových sčítanců nekonečně mnoho, ale v aritmetice reálných čísel jsme si nekonečné součty nedefinovali a nevíme, co znamenají.

K základům matematické analýzy, které se u nás probírají až na vysoké škole, patří také teorie nekonečných řad, která umožňuje dát rozumný smysl právě takovým „součtům nekonečně mnoha sčítanců". Je však nemyslitelné, abychom si zde, v malé knížce určené zcela jiným cílům, probírali podrobněji tak obsáhlé téma, jako je teorie nekonečných řad. Musíme si proto vypomoci jinak. Budeme muset přijmout bez důkazu některá základní tvrzení. Budou to pro nás jakési „axiómy teorie dosazování do řad". Snažíme se je ovšem volit tak, aby operace dosazení do řady měla pokud možno „rozumné" vlastnosti, co možná blízké vlastnostem operace dosazení do mnohočlenu. Bohužel není možné zařídit, aby se každé reálné číslo dalo dosadit do každé řady; musíme se spokojit s jistým rozumným *optimem*, když maximum je nedosažitelné.

Jako první, celkem přirozený „axióm" přijmeme konvenci, že *součet nekonečně mnoha nulových sčítanců se vždy rovná nule.* To má hned dvě výhody:

1) Je-li daná řada $A(x)$ mnohočlenem, má jen konečný počet nenulových koeficientů. Dosadíme-li do ní za x jakoukoliv pevnou reálnou hodnotu q, dostaneme součet, v němž je konečný počet sčítanců nenulových (a ten umíme spočítat) a nekonečně mnoho sčítanců nulových (a jejich součet je tedy roven nule). Celkový výsledek (součet oněch nenulových sčítanců) je pak zřejmě stejný jako výsledek dosazení téže hodnoty q do mnohočlenu $A(x)$ v obvyklém

smyslu. Operace dosazení do řady se tak jeví jako skutečné *rozšíření* operace dosazení do mnohočlenu.

2) Do *každé* řady můžeme za x dosadit nulu. Výsledkem dosazení $x = 0$ do řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je pak podle našeho „axiómu" nutně $A(0) = a_0$. Odtud a z (38) vyplývají už pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ rovnosti $\mathrm{D}^k A(0) = k!\, a_k$. I pro řady platí *MacLaurinova formule*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k A(0) \,. \tag{44}$$

Má-li mít operace dosazení i v obecném případě rozumný smysl, musí *respektovat početní operace s řadami* stejně, jako je respektuje operace dosazení do mnohočlenu; to bude náš druhý „axióm". Jestliže je tedy q reálné číslo, které smíme dosadit do daných řad $A(x)$ a $B(x)$ — což znamená, že příslušné součty mají určité hodnoty $A(q)$ a $B(q)$ — pak smíme q dosadit za x také do součtu $C(x) = A(x) + B(x)$ obou daných řad a do jejich součinu $D(x) = A(x) \,.\, B(x)$, a přitom musí platit $C(q) = A(q) + B(q)$ a $D(q) = A(q) \,.\, B(q)$.

Všimněme si dvou konkrétních důsledků druhého „axiómu". Každé reálné číslo q smíme dosadit do mnohočlenu $B(x) = b + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$ a vždy je $B(q) = b =$ konst. Smíme-li tedy dosadit q do dané řady $A(x)$, smíme je dosadit též do jejího konstantního násobku $bA(x) = B(x) \,.\, A(x)$ a jako výsledek dostaneme číslo $bA(q)$.

Druhý důsledek se týká reciprokých řad. Jestliže k dané řadě $A(x)$ existuje reciproká řada $A^{-1}(x)$ — k tomu, jak víme, je nutné a stačí, aby bylo $A(0) \neq 0$ — platí $A(x) \,.\, A^{-1}(x) = 1(x)$. Je-li tedy q číslo, které smíme dosadit *jak do* $A(x)$, *tak také do* $A^{-1}(x)$, musí pro příslušné hodnoty platit $A(q) \,.\, A^{-1}(q) = 1(q) = 1$, takže nutně

$A^{-1}(q) = [A(q)]^{-1}$. Této vlastnosti operace dosazení využíváme např. k určování hodnot řad reciprokých k mnohočlenům.

Příklad 12. Poněvadž víme, že řada (8) je reciproká k řadě-mnohočlenu $1 - x$, bude hodnota řady (8) po dosazení $x = q$, tj. hodnota součtu $1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots$ rovna vždy $(1 - q)^{-1}$, a to pro každé reálné číslo q, které smíme do řady (8) dosadit. Kdybychom do řady (8) dosadili $x = 1$, měla by nám jako hodnota řady vyjít převrácená hodnota nuly, což není možné. Z toho už vidíme, že $x = 1$ zřejmě nesmíme do řady (8) dosazovat. Máme tu příklad řady, do které (na rozdíl od mnohočlenů) nelze dosadit cokoliv.

Jako třetí, opět celkem přirozený „axióm" přijmeme zásadu, podle níž *o existenci a hodnotě součtu rozhodují* zcela *hodnoty jednotlivých sčítanců* (v daném pořadí) vzniklých dosazením reálné hodnoty, avšak nezáleží ani na dosazované hodnotě, ani na tom, do které řady se operace dosazení provádí.

V dalším budeme většinou vycházet z následující konkrétnější formulace této zásady:

Mějme dány dvě řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ a nechť q je reálné číslo, které smíme dosadit za x do řady $A(x)$, tzn. že existuje hodnota $A(q)$ součtu $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_k q^k + \ldots$ Jestliže nyní pro jisté reálné číslo p platí $a_k q^k = b_k p^k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, pak smíme dosadit číslo p za x do řady $B(x)$ a platí $B(p) = A(q)$.

V některých případech by ovšem tato formulace byla příliš speciální; tak např. z ní přímo nevyplývá, že dosazením hodnoty $\frac{1}{2}$ za x do řady

$$B(x) = \Sigma b_k x^k = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots ,$$

kde $b_k = 0$ pro lichá k, dostaneme týž výsledek jako dosazením hodnoty $x = \frac{1}{4}$ do řady (8), která má všechny koeficienty (tedy i s lichými indexy) nenulové, takže požadovaná rovnost $a_k q^k = b_k p^k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ tu zřejmě neplatí. Poněvadž však podle prvního „axiómu" rozhodují o existenci a hodnotě součtu jen *nenuloví* sčítanci a poněvadž — po vynechání nulových sčítanců — dostaneme v obou případech stejný součet, totiž $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^k} + \ldots$, můžeme na základě naší *obecné zásady* tvrdit, že obojí dosazení bude *stejně oprávněné* a povede také ke *stejné výsledné hodnotě* (uvidíme později, ke které). Obdobně budeme postupovat i v jiných případech.

Uvedeme si ještě jeden důsledek našeho nového „axiómu".

Do každé řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ smíme za x dosadit právě ta čísla, která smíme dosadit do řady $D(x) = x\,A(x) = \Sigma a_k x^{k+1}$.

Skutečně, řada $D(x)$ je součinem řady $A(x)$ a mnohočlenu $M(x) = x$, a proto již podle druhého „axiómu" smíme do řady $D(x)$ dosadit každé číslo q, které smíme dosadit do řady $A(x)$. Že do $A(x)$ smíme vždy dosadit nulu, víme již z prvního „axiómu". Budiž tedy $q \neq 0$ číslo, které smíme dosadit do řady $D(x)$ a vezměme nyní řadu $C(x)$, která je součinem řady $D(x)$ a mnohočlenu $N(x) = 1/q = $ konst. Číslo q smíme (podle druhého „axiómu") dosadit do $C(x)$; dostaneme tak součet

$$C(q) = \frac{1}{q} a_0 q + \frac{1}{q} a_1 q^2 + \frac{1}{q} a_2 q^3 + \ldots + \frac{1}{q} a_k q^{k+1} + \ldots = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_k q^k + \ldots ,$$

ale to je právě součet, který vznikne dosazením q za x do řady $A(x)$. Hodnota $A(q)$ tedy existuje a je $A(q) = C(q)$.

K dosud uvedeným „přirozeným" požadavkům kladeným na operaci dosazení do řady musíme připojit ještě několik dalších tvrzení základního významu, možná už méně názorných. V analytické teorii nekonečných řad se sice většinou dokazují, resp. odvozují z jednodušších, ale my si je zde zahrneme mezi nedokazované „axiómy". Z estetického hlediska by jistě bylo žádoucí, aby zejména těchto „s nebe spadlých axiómů" bylo co nejméně, ale aby se z nich naopak dalo odvodit co nejvíce a aby přitom byly navzájem nezávislé. Poněvadž nám však zde nejde o systematické vybudování skutečné axiomatické teorie nekonečných řad, budeme se důsledně starat pouze o to, aby náš systém „axiómů" byl bezesporný. Vzájemná závislost „axiómů" nám pak nebude příliš vadit, půjde nám vždy spíše o to, abychom co nejpohodlněji dospěli k žádoucím výsledkům a abychom v konkrétních případech uměli bez velkých potíží rozhodnout, které hodnoty do dané řady smíme dosazovat a jaký bude výsledek.

Jedním z nejdůležitějších kritérií možnosti dosazení je následující *princip majorizace* při porovnávání dvou řad.

Mějme znovu dány dvě řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = = \Sigma b_k x^k$ a nechť pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$. Budiž $q \neq 0$ číslo, které smíme dosadit do řady $B(x)$ — tzn., že součet $b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + + \ldots + b_k q^k + \ldots$ má určitou hodnotu $B(q)$. Potom do řady $A(x)$ smíme dosadit *mj.* každé číslo p, pro které je $|p| < |q|$.

Poněvadž vždy platí $|b_k| \leqq |b_k|$, vidíme, že do řady $B(x)$, do které smíme dosadit číslo $q \neq 0$, smíme dosadit také každé číslo p, které je v absolutní hodnotě menší než $|q|$. Odtud již bezprostředně vyplývá obecný tvar množiny hodnot, které do určité řady smíme dosadit. Z tohoto hlediska se řady zřejmě dělí do těchto tří kategorií:

1) Řady, do nichž smíme dosadit kterékoliv reálné číslo. Tyto řady budeme nazývat *celistvé*; patří k nim mj. všechny mnohočleny.

2) Řady, do nichž smíme dosadit pouze nulu. Tyto řady budeme nazývat *banální.*

3) Ostatní řady, které nejsou ani celistvé, ani banální. Pro každou takovou řadu existuje kladné číslo ϱ tak, že do řady smíme dosazovat reálná čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než ϱ a nesmíme dosazovat čísla s absolutní hodnotou větší nežli ϱ (odpovídající součet by neměl smysl). O samotných číslech ϱ a $-\varrho$ se přitom obecně nedá nic tvrdit.

Číslu ϱ se říká *poloměr* dané řady. Abychom mohli o poloměru mluvit ve všech případech, doplňujeme jeho definici tak, že pro banální řady klademe $\varrho = 0$ a pro celistvé řady $\varrho = \infty$ (∞ je ex definitione větší než každé reálné číslo). V matematické analýze se odvozuje postup, jak určit poloměr řady přímo z jejích koeficientů, užívá se však při něm nealgebraické operace limity. My se zde omezíme na jednodušší způsoby zjišťování poloměru řady; jsou založeny většinou na porovnání s řadou, jejíž poloměr už známe, s použitím *principu majorizace*. Ten si můžeme pomocí pojmu poloměru přeformulovat takto: *platí-li pro koeficienty a_k, b_k dvou daných řad $A(x)$, $B(x)$ nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, pak poloměr řady $A(x)$ není menší než poloměr řady $B(x)$.*

Chceme-li ovšem vzájemně porovnávat řady, musíme odněkud vyjít. Potřebujeme tedy znát poloměry aspoň některých základních řad; zatím vlastně jen víme, že mnohočleny jsou celistvé řady a mají tedy poloměr ∞. Velmi užitečnou úlohu zde sehraje znovu naše známá řada (8). Už z příkladu 12 víme, že její poloměr *nemůže být větší* než 1, protože $x = 1$ do ní *nesmíme* dosadit. Tvrzení, že její poloměr je *právě roven* 1, nemůžeme na základě dosud přijatých „axiómů" dokázat, takže bude tvořit samostatný další (pátý) „axióm", ale čtenáři, který již něco slyšel o geometrické posloupnosti (a tento pojem se na středních školách probírá), nebude připadat nijak nepřirozené; dosazením čísla q za x do řady (8) dostaneme součet členů nekonečné geometrické posloupnosti s kvocientem q.

Spolu s řadou (8) má podle principu majorizace poloměr rovný 1 také řada (13), neboli binomická řada $B_{-1}(x)$. Z druhého „axiómu" pak plyne, že všechny binomické řady $B_{-n}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mají poloměr aspoň rovný 1; poněvadž však $B_n(-1) = 0$, nemůže být vzhledem k (24) poloměr řad $B_{-n}(x)$ větší než 1, je tedy také právě roven 1. Binomické řady $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ jsou ovšem mnohočleny a mají poloměr ∞. K řadám $B_r(x)$ s necelým r se vrátíme ještě později.

Zatím se však podívejme na některé důležité důsledky principu majorizace. Jedním z nich je zřejmé tvrzení, že každá řada, jejíž všechny koeficienty jsou v absolutní hodnotě menší než 1, má poloměr rovný alespoň 1. To plyne z jejího srovnání s řadou (8). Platí však mnohem více; viděli jsme již u druhého „axiómu", že násobením řady nenulovou konstantou se její poloměr nemění. Proto každá řada s omezenými koeficienty, tj. každá řada (6), pro kterou existuje kladná konstanta K tak, že $|a_k| < K$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má poloměr aspoň rovný 1.

Z našeho třetího a čtvrtého „axiómu" však lze vyvodit ještě jeden velmi důležitý výsledek. Budiž a kladné číslo a vezměme řadu

$$C_a(x) = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^kx^k + \ldots \qquad (45)$$

Dosadíme-li do $C(x)$ za x číslo q/a, dostaneme součet

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots,$$

který, jak víme, má při $|q| < 1$ určitou hodnotu, totiž $C_\alpha(q/\alpha) = (1 - q)^{-1}$. Podle našeho třetího „axiómu" odtud plyne, že poloměr řady $C_\alpha(x)$ je aspoň (lze dokonce dokázat, že právě) roven $1/\alpha$. Mějme teď obecně řadu $A(x) = \Sigma a_k x^k$, pro jejíž koeficienty platí nerovnosti

$$|a_{k+1}| \leqq \alpha |a_k| \,, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{46}$$

kde α je kladné číslo. Poněvadž ze (46) snadno (např. indukcí) vyvodíme obecnou platnost nerovností

$$|a_k| \leqq \alpha^k |a_0| \,, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

vidíme podle principu majorizace (porovnáním řady $A(x)$ s řadou (45), resp. jejím $|a_0|$ násobkem), že řada $A(x)$ má také poloměr rovný aspoň $1/\alpha$.

Využijeme-li navíc ještě druhého „axiómu", můžeme svá tvrzení ještě dále zobecnit v tom smyslu, že platnost nerovností (46) nepožadujeme pro všechna nezáporná k, nýbrž teprve pro k větší než jisté pevné číslo m. Stejné zobecnění lze ostatně provést i se samotným principem majorizace. K tomu, aby řada $A(x) = \Sigma a_k x^k$ měla poloměr aspoň tak velký jako řada $B(x) = \Sigma b_k x^k$, stačí, aby pro jejich koeficienty platily nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$ pro $k = m + 1, m + 2, \dots$, kde m je pevné celé nezáporné číslo. Stačí totiž vyjádřit řadu $A(x)$ jako součet mnohočlenu

$$A_{m|}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \tag{47}$$

a řady

$$A_{|m}(x) = 0 + 0x + \dots + 0x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \\ + a_{m+2} x^{m+2} + \dots \tag{48}$$

Řada (48) splňuje již zřejmě podmínku vyslovenou v původní formulaci principu majorizace a má tedy poloměr aspoň tak velký jako řada $B(x)$, avšak přičtením mnohočlenu, tj. celistvé řady, se podle druhého „axiómu" její poloměr nezmenší. Z takto zobecněného principu majorizace pak už snadno odvodíme i zmíněné obecnější tvrzení o poloměru řady splňující podmínku (46) teprve pro $k > m$.

Příklad 13. V řadě $E(x)$ ze (43) je koeficientem při x^k číslo $1/k!$ Budiž a libovolné (tj. libovolně malé) kladné číslo. Pro $k > 1/a$ platí $(k + 1)^{-1} < k^{-1} < a$, a tedy

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} < a \frac{1}{k!},$$

takže řada $E(x)$ má poloměr rovný aspoň $1/a$. Poněvadž však a bylo libovolné, vidíme, že řada $E(x)$ je celistvá. Máme tu příklad celistvé řady, která není mnohočlenem. Řada $E(x)$ je velmi důležitá a v matematice se s ní často setkáváme. Její vlastnosti si ostatně ještě probereme podrobněji v dalších odstavcích.

Příklad 14. Derivací řady (8) je řada

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)x^k + \ldots,$$

která je však také její druhou mocninou, takže má — stejně jako řada (8) — poloměr rovný 1.

Ukážeme si teď, že zcela obecně pro *každou* řadu $A(x)$ platí:

Řada $A(x)$ a její derivace $\mathrm{D}A(x)$ mají stejný poloměr.

K důkazu tohoto tvrzení užijeme pomocné věty.

Ke každému číslu q s absolutní hodnotou $|q| < 1$ existuje kladné číslo K tak, že pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $|kq^k| \leqq K$.

Skutečně, stačí najít celé číslo m tak, aby platilo $m \leqq \leqq (1 - |q|)^{-1} < m + 1$, čili

$$\frac{m-1}{m} \leqq |q| < \frac{m}{m+1},$$

a pak již snadno dokážeme, že pro každé celé nezáporné k je $|kq^k| \leqq |mq^m|$, takže za číslo K můžeme vzít např. právě $K = m|q|^m$.

Budiž nyní $A(x) = \Sigma a_k x^k$ libovolná řada s poloměrem ϱ a $\mathrm{D}A(x)$ její derivace s poloměrem ϱ'. Stejný poloměr ϱ' má také řada $D(x) = x\mathrm{D}A(x)$. Ze srovnání řad $A(x)$ a $D(x)$ vyplývá podle principu majorizace nerovnost $\varrho' \leqq \varrho$. Předpokládejme, že skutečně je $\varrho' < \varrho$; z toho odvodíme spor. Je-li $\varrho' < \varrho$, lze najít dvě reálná čísla α a β tak, že je $\varrho' < < \alpha < \beta < \varrho$. Označme $q = \alpha/\beta$; je tedy $0 < q < 1$. Vezměme nyní řadu $C(x) = \Sigma k a_k q^k x^k$. K našemu číslu q lze najít $K > 0$ tak, že $|kq^k| \leqq K$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$; podle principu majorizace má tedy řada $C(x)$ poloměr aspoň rovný ϱ (jak plyne z jejího porovnání s K-násobkem řady $A(x)$, takže do ní můžeme dosadit $x = \beta$. Dostaneme tak součet $C(\beta) = \Sigma k a_k q^k \beta^k = \Sigma k a_k \alpha^k$. Avšak stejný součet dostaneme dosazením $x = \alpha$ do řady $D(x)$; to však podle našeho třetího „axiómu" znamená, že řada $D(x)$ má poloměr aspoň rovný α, ale $\alpha > \varrho'$. Není tedy možné, aby bylo $\varrho' < \varrho$, a proto musí platit rovnost $\varrho' = \varrho$, což jsme chtěli dokázat.

Je zřejmé, že stejný poloměr jako řada $A(x)$ má nejen její derivace $\mathrm{D}A(x)$, ale také všechny její vyšší derivace $\mathrm{D}^k A(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Týž poloměr má však také každá řada $C(x)$, pro kterou platí $\mathrm{D}C(x) = A(x)$. Je-li $A(x) = = \Sigma a_k x^k$, je

$C(x) = c_0 + a_0 x + (a_1/2)x^2 + \ldots + a_k(k+1)^{-1} x^k + \ldots,$
kde c_0 je libovolná konstanta; stejné tvrzení platí i pro řady $C_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, pro něž je $\mathrm{D}^k C_k(x) = A(x)$.

Příklad 15. Derivací řady

$$L(x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 - + \ldots + (-1)^{k+1}(1/k)x^k + \ldots \tag{49}$$

je řada (13), tj. binomická řada $B_{-1}(x)$ s poloměrem rovným 1. Má tedy také řada (49) poloměr rovný 1.

Vraťme se teď znovu na chvíli k binomickým řadám, resp. k otázce určení jejich poloměrů, kterou jsme předtím museli opustit. Zatím víme jen, že pro *celá kladná n* mají řady $B_n(x)$ poloměr ∞ (jsou celistvé), kdežto řady $B_{-n}(x)$ mají poloměr rovný 1.

Jestliže r je číslo, které není celé (takže nutně $r \neq 0 \neq r - 1$), má podle naší věty o rovnosti poloměru řady a její derivace řada $B_r(x)$ stejný poloměr jako řada $rB_{r-1}(x)$ (viz vzorec (35)), a tedy podle druhého „axiómu" i jako řada $B_{r-1}(x)$. Stačí tudíž vyšetřit případ, kdy je $-1 < r < 0$. Tu však platí pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left|\binom{r}{k}\right| = \left|\frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}\right| = \frac{|r|}{1} \cdot \frac{1+|r|}{2} \cdots \frac{k-1+|r|}{k} \leqq 1 ,$$

neboť $|r| < 1$. Podle principu majorizace je tedy poloměr řady $B_r(x)$ alespoň rovný 1, jak vyplývá z porovnání s řadou (8).

Libovolná binomická řada má tedy poloměr $\geqq 1$; ukážeme si nejprve, že při racionálním $r < 0$ je poloměr řady $B_r(x)$ *právě roven* 1. Skutečně, podle (24) pro $r = p/q$, p, q celá, $p < 0 < q$ platí

$$[B_r(x)]^q = B_p(x) ,$$

takže řada $B_r(x)$ nemůže mít poloměr větší nežli řada $B_p(x)$, avšak p je celé záporné číslo, a tedy má $B_p(x)$ poloměr právě rovný 1.

Mějme nyní libovolné *iracionální* číslo q, $0 < q < 1$, a racionální číslo r takové, že $0 < r < q$. Pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ pak platí nerovnosti

$$\left|\binom{-q}{k}\right| = \frac{1}{k!}\, q(1 + q) \ldots (k - 1 + q) >$$

$$> \frac{1}{k!}\, r(1 + r) \ldots (k - 1 + r) = \left|\binom{-r}{k}\right|,$$

z nichž vyplývá, že řada $B_{-r}(x)$ má poloměr aspoň rovný poloměru řady $B_{-q}(x)$.

Shrneme-li všechny výsledky týkající se poloměrů binomických řad, vidíme, že jsou jen dvě možnosti: buď je řada $B_p(x)$ mnohočlenem (tj. řadou s poloměrem ∞, což nastane jen, je-li p celé nezáporné číslo), anebo má binomická řada $B_p(x)$ poloměr rovný 1 (pro všechna ostatní reálná p).

Na závěr tohoto paragrafu si dokážeme ještě jednu větu o poloměrech.

Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je řada s kladným poloměrem ϱ, potom řada

$$\tilde{A}(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!}\, x^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\, x^k \tag{50}$$

je *celistvá.*

Abychom dokázali, že řada $\tilde{A}(x)$ je celistvá, musíme dokázat, že do ní smíme dosadit libovolné reálné číslo $q > 0$.

Budiž c kladné reálné číslo menší nežli je poloměr ϱ řady $A(x)$, položme $\alpha = q/c$; tedy $q = \alpha c$. Ke kladnému číslu α najdeme celé m takové, aby bylo $m \leqq \alpha < m + 1$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ bude platit $\alpha^k/k! \leqq \alpha^m/m!$, jak se snadno přesvědčíme. Označme si $\alpha^m/m! = K$. Dosadíme-li $x = q$ do řady $\tilde{A}(x)$, dostaneme součet

$$\sum \frac{a_k}{k!} q^k = \sum \frac{a_k}{k!} \alpha^k c^k ,$$

avšak stejný součet dostaneme dosazením $x = c$ do řady s koeficienty $a_k \alpha^k/k!$ Poněvadž $|a_k \alpha^k/k!| \leqq K|a_k|$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má tato řada poloměr aspoň rovný ϱ, tedy jistě větší než c, takže do ní smíme dosadit $x = c$. Z toho ovšem podle našeho třetího „axiómu" plyne, že do řady $\tilde{A}(x)$ opravdu smíme dosadit $x = q$.

Cvičení

15. Zformulujte druhý „axióm" pomocí pojmu poloměru řady.
16. Pomocí MacLaurinovy formule (44) pro řady a vzorce (35) odvoďte vyjádření (19′) pro koeficienty obecné binomické řady.
17. Najděte poloměr řady $D(x) = \Sigma d_k x^k$, kde všechna čísla d_k jsou celá nezáporná a menší než 10, a ukažte pak, že ke každému reálnému číslu q, $0 < q < 1$, lze najít řadu $D_q(x)$ tohoto tvaru takovou, že $D_q(1/10) = q$.
18. Najděte poloměr řady $(1/2)x + (1/16)x^2 + (1/72)x^3 + \ldots + (1/k^2 2^k)x^k + \ldots$
19. Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je banální řada a K libovolné kladné číslo; pak lze najít index k takový, že $\sqrt[k]{|a_k|} > K$. Dokažte.

20. Nechť pro koeficienty a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) řady $A(x)$ platí: Ke každému kladnému číslu K lze najít celé číslo m tak, že pro $k > m$ je $\sqrt[k]{|a_k|} < K$. Potom $A(x)$ je celistvá řada. Dokažte.

7. Substituce. Obdobně jako v případě mnohočlenů (viz paragraf 5 první kapitoly) lze i pro řady definovat operaci *substituce*. Jsou-li $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ dvě řady, pak by – analogicky k (I.45) – výsledkem substituce řady $B(x)$ do řady $A(x)$ měl být výraz

$$A[B(x)] = \Sigma a_k B^k(x) = a_0 \,.\, 1(x) + \\ + a_1 B(x) + a_2 B^2(x) + \ldots + a_k B^k(x) + \ldots \tag{51}$$

Narazili jsme tu na podobnou potíž jako při definici operace dosazení: ve druhém odstavci jsme si zavedli sčítání řad jen pro případ *konečného počtu sčítanců.* Jsme tedy opět postaveni před problém, kdy a jak lze dát výrazu (51) rozumný smysl. Ve zcela obecném případě jsou s tím ovšem spojeny jisté netriviální problémy, kterým se však můžeme vyhnout, jestliže se omezíme jen na určité *speciální případy*, což pro naše účely plně postačí.

Jako první, nejjednodušší případ si vezmeme substituci mnohočlenů $N(x)$ tvaru $N(x) = cx$ do libovolné řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$. Píšeme-li podle (51) v $A(x)$ všude cx místo x, dostaneme řadu $A[N(x)] = A(cx)$, totiž

$$A(cx) = a_0 + a_1 cx + a_2 c^2 x^2 + \ldots + a_k c^k x^k + \ldots\,, \tag{52}$$

tedy řadu s koeficienty $a_k c^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Snadno uvidíme, že při $c \neq 0$ je poloměr řady $A(cx)$ právě $|c|^{-1}$-násobkem poloměru řady $A(x)$ (klademe ovšem $\infty |c|^{-1} = \infty$); je-li $c = 0$, je $A(cx)$ celistvá řada, totiž mnohočlen – konstanta $A(cx) \equiv a_0$.

Substituce tohoto typu s $c = -1$ jsme vlastně už občas prováděli; je tu $|c| = 1$, takže se při nich poloměr řady nemění.

Příklad 16. Řada $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots +$
$+ (-1)^k 2^k x^k + \ldots$
má poloměr rovný $\frac{1}{2}$. Je to vlastně binomická řada $B_{-1}(2x)$.

Druhým jednoduchým typem substituce je substituce mnohočlenu $N(x) = x^m$ ($m \geqq 1$, celé) do řady $A(x)$. Píšeme-li v $A(x)$ všude x^m místo x, dostaneme podle (51) řadu

$$A(x^m) = a_0 + a_1x^m + a_2x^{2m} + \ldots + a_kx^{km} + \ldots, \tag{53}$$

(koeficienty u těch mocnin x, jejichž exponent není násobkem čísla m, jsou v $A(x^m)$ rovny nule). Je zřejmé, že poloměr řady $A(x^m)$ je $\sqrt[m]{\varrho}$, kde ϱ je poloměr původní řady $A(x)$ (s konvencí $\sqrt[m]{\infty} = \infty$).

Příklad 17. Řada $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots$ je vlastně řada $B_{-1}(-x^2) = (1 - x^2)^{-1}$, a má tedy poloměr rovný 1.

V uvedených dvou speciálních typech substitucí byla situace o to jednodušší, že jsme ve výrazu (51) na první pohled poznali řadu s určitými koeficienty. Avšak již v případě obecné *lineární substituce* (tj. substituce mnohočlenu $N(x)$ prvního stupně) se v případě řad objevují komplikace, které jsme u lineárních substitucí do mnohočlenů nepoznali. Ukážeme si to na příkladě substituce mnohočlenu $N(x) = c + x$, $c \neq 0$, do dané řady.

Provedeme-li — zatím zcela formálně — substituci $N(x) = c + x$ do $A(x)$ podle (51), dostaneme

$$A(c + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c + x)^k = \tag{54}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{k-j}x^j \,.$$

To ovšem není řada, jak jsme na ni zvyklí, chtěli bychom ji mít „uspořádánu podle mocnin x". Proto si (54) přepíšeme na

$$A(c + x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} c^{k-j}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+j}{j} a_{r+j}c^r\right] . \tag{55}$$

Pro koeficient při x^j jsme tak dostali výraz, který lze chápat jako hodnotu řady

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r + 1)(r + 2) \ldots (r + j)a_{r+j}x^r \tag{56}$$

pro $x = c$, násobenou číslem $1/j!$. Avšak řada (56) není podle (38) nic jiného nežli j-tá derivace řady $A(x)$, tedy $D^jA(x)$, která má ovšem stejný poloměr ϱ jako řada $A(x)$ samotná. Předpokládejme, že tento poloměr je kladný, $\varrho > 0$ (tzn., že řada $A(x)$ není banální) a že $|c| < \varrho$. Potom ovšem smíme dosadit $x = c$ do každé řady $D^jA(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ a výraz (55) má rozumný smysl. Můžeme si jej ostatně přepsat na tvar

$$A(c + x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!)x^kD^kA(c) \,, \tag{57}$$

což není nic jiného nežli *Taylorova formule pro řady* (srv. vzorec (I.51)).

Zbývá ovšem ještě určit *poloměr* řady (57). Z vyjádření (54) resp. (51) můžeme ihned usoudit, že poloměr řady (57) nebude jistě menší nežli $\varrho - |c|$, a pokud je $\varrho = \infty$, bude i řada (57) celistvá. Může se však stát, že poloměr řady (57) je větší i nežli poloměr ϱ původní řady $A(x)$.

Příklad 18. Proveďme substituci $N(x) = 1/2 + x$ do řady (13), tj. do binomické řady $B_{-1}(x)$. Podle (57) dostaneme

$$B_{-1}\left(\frac{1}{2} + x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (-1)^k k! \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{2}{3} B_{-1}\left(\frac{2}{3} x\right),$$

tj. (2/3)násobek řady, kterou dostaneme z $B_{-1}(x)$ substitucí $M(x) = (2/3)x$ a která má tedy poloměr rovný 3/2, tzn. větší nežli binomická řada $B_{-1}(x)$, z níž jsme vyšli.

Hlubší pohled na otázku změny poloměru řady při lineární substituci by vyžadoval přece jen trochu více analytických metod, nežli si jich zde dopřáváme, a také ovšem „komplexní“ přístup k celé problematice. Pohybovali jsme se totiž doposud (a vytrváme v tom i dále) pouze v oboru *reálných* čísel (naše řady mají reálné koeficienty, dosazujeme do nich reálné hodnoty atd.), avšak celá teorie řad získá pravou hloubku teprve v oboru čísel komplexních. Její hlavní výsledky se přitom nijak nezkomplikují, spíše naopak.

Probrali jsme si zatím jen tři velmi speciální typy substitucí (52), (53) a (54); to je na první pohled velmi málo. Ale operace substituce je asociativní v případě řad stejně jako v případě mnohočlenů (viz cvičení I.13). Provedeme-li do řady $A(x)$ postupně substituce mnohočlenů $M(x)$ a pak $N(x)$, bude výsledek stejný jako při jediné substituci mnohočlenu $P(x) = M[N(x)]$. Toho lze využít a postupným skládáním substitucí typů (52), (53) a (54) vyjádřit substituce složitější; lze tak vyjádřit libovolnou substituci mnohočlenu do dané řady. Stanovení poloměru výsledné řady se tu pak provádí rovněž postupně a zdlouhavě, ale (zvláště v komplexním oboru) relativně názorně.

Příklad 19. Provedeme-li postupně substituce $N_1(x) = 4 + x$, $N_2(x) = x^2$, $N_3(x) = -1 + x$, $N_4(x) = 3x$, dostaneme výslednou kvadratickou substituci $M(x) = N_1[N_2(N_3[N_4(x)])] = 5 - 6x + 9x^2$.

Podívejme se ještě ve stručnosti na obecný případ substituce řady, která *není* mnohočlenem, do jiné řady. Tento případ přirozeně *nelze postihnout* uvedeným postupným skládáním substitucí (52) — (54). Zde se již nemůžeme obejít bez analytických metod, chceme-li dospět k neformálním výsledkům. Provádíme-li substituci řady $B(x)$ do $A(x) = \Sigma a_k x^k$, můžeme příslušný výraz (51) formálně uvést na tvar řady

$$A[B(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_j^{(k)} \right], \tag{58}$$

kde $b_j^{(k)}$ je koeficient při x^j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) v k-té mocnině $B^k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) řady $B(x)$. V analýze se pak ukazuje, kdy lze součtům, které v (58) tvoří koeficienty při mocninách x, dát rozumný smysl a jak se určí, případně odhadne poloměr řady (58). Není v našich možnostech zabývat se těmito otázkami podrobněji a tak si zde uvedeme — bez důkazu a odůvodňování — jen jednu základní větu.

Má-li řada $B(x)$ kladný poloměr ϱ a jsou-li její hodnoty $B(q)$ pro q z intervalu $-\alpha < q < \alpha$, $0 < \alpha < \varrho$, vesměs v absolutní hodnotě menší než je poloměr řady $A(x)$, pak lze provést substituci řady $B(x)$ do řady $A(x)$ a výsledná řada $A[B(x)]$ má poloměr aspoň rovný α.

Příklad 20. Řada $A(x) = -xB_{-1}(x) = -x + x^2 - - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$ má poloměr stejný jako řada $B_{-1}(x)$, tedy rovný 1, a pro $|q| < 1/2$ je

$$|A(q)| = |q| \,.\, |B_{-1}(q)| = \left| \frac{q}{1-q} \right| < 1 \,.$$

Lze tedy provést substituci řady $A(x)$ do binomické řady $B_{\frac{1}{2}}(x)$. Ježto $A^k(x) = (-1)^k x^k B_{-k}(x)$, je koeficient při x^j v řadě $A^k(x)$ roven nule pro $k > j$, takže podle (58) dostáváme

$$B_{\frac{1}{2}}\,[A(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(-1\right)^k \binom{-k}{n-k} \right].$$

Avšak

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \binom{-k}{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{F_k\left(\frac{1}{2}\right) F_{n-k}(-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k\left(\tfrac{1}{2}\right) F_{n-k}(n-1) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} F_n\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n!} F_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \binom{-\frac{1}{2}}{n};$$

při úpravách jsme použili vzorců (19′), (I.62) a (I.25). Platí tedy celkem

$$B_{\frac{1}{2}}\,[A(x)] = B_{-\frac{1}{2}}(x)\,. \tag{59}$$

Výsledek (59) lze interpretovat též tak, že řadu $A(x)$ vyjádříme jako $A(x) = B_{-1}(x) - 1$, takže $B_{\frac{1}{2}}[A(x)] = [1 + A(x)]^{\frac{1}{2}} = [1 + B_{-1}(x) - 1]^{\frac{1}{2}} = [B_{-1}(x)]^{\frac{1}{2}} = B_{-\frac{1}{2}}(x)$. Podobným způsobem můžeme počítat odmocniny (a to nejen druhé) i z jiných řad podle vzoru

$$[A(x)]^{1/k} = [1 + A(x) - 1]^{1/k} = B_{1/k}[A(x) - 1]\,,$$

samozřejmě jen pokud řada $A(x)$ splňuje příslušné podmínky. To je tedy onen obecný způsob výpočtu odmocnin z řad, o němž jsme se zmínili už na konci paragrafu 3.

Stejně jako pro mnohočleny (viz str. 28) platí i pro řady tvrzení, že výsledek dosazení $x = q$ do řady $A[B(x)]$ je stejný jako výsledek dosazení $x = r$, kde $r = B(q)$ do řady $A(x)$; samozřejmě jen za předpokladu, že všechna tato dosazení smíme provádět. Výraz $A[B(q)]$ má tedy jednoznačný smysl.

Cvičení

21. Určete poloměr řady

$$2x + \left(\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(\frac{2}{5}\right)x^5 + \ldots + 2(2k + 1)^{-1}x^{2k+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 2(2k+1)^{-1}\,x^{2k+1}\,.$$

22. Vypočtěte třetí odmocninu z řady (8).
23. Dokažte, že pro řadu $E(x)$ ze (43) platí $E^2(x) = E(2x)$, resp. obecněji $E(x + c) = E(c) E(x)$.
24. Pro substituci mnohočlenu $N(x)$ do řady $A(x)$ odvoďte formuli obdobnou vzorci (I.48).
25. Pro řadu (49) dokažte vzorec

$$L(x) + L(-x) = L(-x^2).$$

8. Některé význačné řady a jejich hodnoty. Výsledky odvozené v předchozích paragrafech jsou vcelku dostatečnou (aspoň pro naše účely) pomůckou při určování poloměrů řad. Většinou nám však nestačí vědět, která reálná čísla q smíme do dané řady $A(x)$ za x dosadit, ale chceme znát také příslušné hodnoty $A(q)$. Zatím však vlastně dovedeme udat hodnotu řady jen v některých speciálních případech, např. je-li daná řada $A(x)$ mnohočlenem nebo řadou reciprokou k řadě — mnohočlenu, anebo ji lze vyjádřit pomocí řad tohoto druhu spojených operacemi sčítání a násobení. Vedle toho si můžeme také řadu upravit vhodnou substitucí. Přesto však zůstává ještě mnoho řad, jejichž hodnoty takto určit nedovedeme, ač víme, že existují, resp. že velikost poloměru řady taková dosazení připouští. Tak např. o řadě $E(x)$ ze (43) víme, že je celistvá, ale kromě $E(0) = 1$ neznáme žádnou její hodnotu.

Při určování hodnot řad se budeme v dalším opírat o jedno obecné tvrzení, které však neumíme odvodit z našich pěti „axiómů", jak jsme je přijali v paragrafu 6. Je však natolik „přirozené", že snad nebude potíží s jeho přijetím v roli dalšího, šestého „axiómu". Stručně je lze vyjádřit větou: *Součet nezáporných sčítanců je nezáporný*. Přesná formulace našeho nového „axiómu" pak bude tato:

Budiž $A(x) = \Sigma a_k x^k$ řada s *nezápornými* koeficienty, $a_k \geqq 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, a s kladným poloměrem ϱ; budiž q reálné číslo $0 \leqq q < \varrho$. Potom $A(q) \geqq 0$.

Bezprostředním důsledkem tohoto a čtvrtého „axiómu" je věta:

Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ jsou dvě řady s poloměry ϱ_A a ϱ_B a nechť pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí nerovnosti $0 \leqq a_k \leqq b_k$. Potom $\varrho_A \geqq \varrho_B$ a pro každé reálné q, $0 \leqq q < \varrho_B$ platí $0 \leqq A(q) \leqq B(q)$.

Tak jsme konečně získali možnost navzájem porovnávat nejenom poloměry, ale i hodnoty řad.

Příklad 21. Budiž $A(x) = \Sigma a_k x^k$ libovolná řada s koeficienty a_k, $0 \leqq a_k \leqq 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Potom pro každé q z intervalu $0 \leqq q < 1$ je $0 \leqq A(q) \leqq (1 - q)^{-1}$. Vyplývá to z porovnání řady $A(x)$ s řadou (8).

Omezení dané podmínkou nezápornosti koeficientů porovnávané řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ můžeme poněkud oslabit pomocí rozkladu řady $A(x)$ na dvě řady s nezápornými koeficienty. Definujme si čísla a_k^+, a_k^-, $k = 0, 1, 2, \ldots$ takto: Jestliže je $a_k \geqq 0$, položme $a_k^+ = a_k$, $a_k^- = 0$; jestliže naopak $a_k < 0$, položme $a_k^+ = 0$, $a_k^- = -a_k$. Je potom zřejmě $0 \leqq a_k^+ \leqq |a_k|$, $0 \leqq a_k^- \leqq |a_k|$, $a_k^+ - a_k^- = a_k$, pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, takže $A(x) = A^+(x) - A^-(x)$, kde $A^+(x) = \Sigma a_k^+ x^k$, $A^-(x) = \Sigma a_k^- x^k$; poloměry řad $A^+(x)$, $A^-(x)$ jistě nejsou menší nežli poloměr řady $A(x)$. Jestliže nyní je např. $|a_k| \leqq 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má řada $A(x)$ (a tedy i obě řady $A^+(x)$ a $A^-(x)$) poloměr aspoň rovný 1 a pro všechna q z intervalu $0 \leqq q < 1$ jest $0 \leqq A^+(q) \leqq (1 - q)^{-1}$, $0 \leqq A^-(q) \leqq (1 - q)^{-1}$, takže $|A(q)| \leqq 2(1 - q)^{-1}$.

Podobných odhadů hodnoty řady lze využít také pro přibližné určení hodnoty dané řady $A(x)$, např. jestliže se nám podaří vyjádřit $A(x)$ ve tvaru součtu řady $A_1(x)$, jejíž hodnotu známe a řady, jejíž hodnoty dovedeme odhadnout. Za řadu $A_1(x)$ se dá často vzít mnohočlen — „začátek" řady $A(x)$.

Příklad 22. Řada $L(x)$ ze (49) má, jak víme, poloměr rovný 1. Pro $0 \leqq q < 1$ pak platí

$$L(q) = q - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} q^3 - + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} q^n + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k q^k / k \, .$$

Poněvadž však $|(-q)^k/k| < q^k/n$ pro $k > n$, vidíme, že platí

$$\left| L(q) - \sum_{k=1}^{n} (-q)^k/k \right| \leqq 2q^{n+1}/(n - nq) \, . \tag{60}$$

Avšak ke každému q z intervalu $0 \leqq q < 1$ lze najít m tak, že pro $n > m$ už je pravá strana v (60) malá (menší než daná přípustná chyba). Pro hodnotu $L(q)$ tak máme přibližné vyjádření ve tvaru hodnoty mnohočlenu $\sum_{k=1}^{n} (-q)^k/k$, s chybou zaručeně menší nežli $2q^{n+1}/(n - nq)$.

Příklad 23. Vyjdeme z identity

$$2 = \frac{50}{25} = \frac{50 \, . \, 49}{25 \, . \, 49} = \frac{49}{25} \cdot \frac{1}{\frac{49}{50}} = \frac{49}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{50}} \, .$$

Pomocí binomické řady $B_{\frac{1}{2}}(x)$ můžeme tak vypočítat přibližnou hodnotu $\sqrt{2}$; bude totiž

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} B_{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{50}\right) = \frac{7}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k (50)^{-k} .$$

Avšak pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí, jak se snadno přesvědčíme (viz též příklad 9),

$$\left|\binom{-\frac{1}{2}}{k+1}\right| < \binom{-\frac{1}{2}}{k} \leqq 1 ,$$

takže pro každé $k \geqq 0$ je

$$\left|\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{-1}{50}\right)^k\right| < 50^{-k} .$$

Odtud vyplývá odhad

$$\left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\sum_{k=0}^{m}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{1}{50}\right)^k\right| < \frac{100}{49} \cdot 50^{-m-1} \leqq$$

$$\leqq 2{,}05 \cdot 50^{-m-1} .$$

I pro poměrně malé hodnoty m dostaneme tak již velmi dobré přiblížení. Tak např. pro $m = 3$ bude

$$\sqrt{2} = (7/5)\,[1 + 0{,}01 + 0{,}00015 + 0{,}0000005] =$$
$$= 1{,}4 \cdot 1{,}0101505 = 1{,}4142107$$

s pěti správnými desetinnými místy (s chybou zaručeně menší než 0,000033).

Vedle binomických řad $B_p(x)$ hraje v teorii řad významnou úlohu také řada $E(x)$, kterou známe ze (43)

$$E(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^k/k! + \ldots ; \tag{43}$$

nyní si jí všimneme trochu podrobněji.

V šestém paragrafu jsme si ukázali, že řada $E(x)$ je celistvá. Vyplývá to ostatně též z obecného tvrzení uvedeného na konci šestého paragrafu a z toho, že řada (8) má kladný poloměr. Z příkladu 11 dále víme, že platí $\mathrm{D}^k E(x) = E(x)$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, a konečně ve cvičení 23 se ukazuje, že platí $E^2(x) = E(2x)$. Odtud indukcí snadno dokážeme platnost rovnosti

$$E^k(x) = E(kx) \tag{61}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ Zcela stejně však také bude $E\left(\frac{1}{2}x\right) . E\left(\frac{1}{2}x\right) = E(x)$, tzn. obecně $E^k(x/k) = E(x)$, takže řadu $E(x/k)$ lze vzít za k-tou odmocninu z řady $E(x)$. Vztah (61) platí tedy obecněji, totiž

$$E^r(x) = E(rx) \tag{61'}$$

pro všechna racionální nezáporná r. Není však těžké se přesvědčit, že $E(x) . E(-x) = I(x)$, tzn. že $E(-x) = E^{-1}(x)$. Přechodem k reciprokým řadám tak rozšíříme platnost (61′) i na záporná racionální r.

Všechny tyto řady jsou ovšem celistvé, neboť je dostaneme z $E(x)$ substitucemi tvaru $N(x) = rx$; můžeme tedy do nich libovolně dosazovat. Z (61′) pak při $x = 1$ plyne rovnost

$$E(r) = [E(1)]^r \tag{62}$$

pro všechna racionální r.

Ukážeme si teď, že (62) platí zcela obecně, bez omezení na racionální hodnoty exponentu. K libovolnému reálnému číslu q si totiž můžeme najít dvě racionální čísla r_1, r_2, tak, že $r_1 \leqq q \leqq r_2$ a přitom je rozdíl $r_2 - r_1$ libovolně malý.

Poněvadž má řada $E(x)$ vesměs nezáporné koeficienty, plynou z $r_1 \leqq q \leqq r_2$ nerovnosti $E(r_1) \leqq E(q) \leqq E(r_2)$. Zároveň však z Taylorovy formule (57) odvodíme rovnost $E(r_2) = E(r_1) \,.\, E(r_2 - r_1)$. Poněvadž $0 \leqq 1/k! \leqq 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, dostaneme porovnáním řady $E(x)$ s řadou (8) nerovnosti $0 \leqq E(p) - 1 \leqq p(1 - p)^{-1}$, platné pro všechna p z intervalu $0 \leqq p < 1$. Při $p = r_2 - r_1$ máme tedy

$$E(r_2) = E(r_1) \,.\, E(r_2 - r_1) \leqq E(r_1) + E(r_1) \,.\, \frac{r_2 - r_1}{1 - r_2 + r_1} ,$$

takže

$$[E(1)]^{r_1} = E(r_1) \leqq E(q) \leqq E(r_2) = [E(1)]^{r_2} \leqq [E(1)]^{r_1} + \varepsilon , \tag{63}$$

kde rozdíl ε lze učinit libovolně malým, jestliže se s čísly r_1, r_2 dostatečně přiblížíme číslu q. Nerovnostem (63) však lze vyhověti jenom tehdy, bude-li i pro naše q platit

$$E(q) = [E(1)]^q . \tag{62'}$$

Číslo $E(1)$ se obvykle označuje prostým symbolem e; jeho význam v matematice je tak obrovský, že se ani nepokoušíme jej nějak oceňovat. Místo (62') tedy píšeme $E(q) = e^q$.

S řadou $E(x)$ jsou příbuzné dvě další zajímavé řady

$$C(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - + \ldots + (-1)^k x^{2k}/2k! + \ldots \tag{64}$$

a

$$S(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots + (-1)^k x^{2k+1}/(2k + 1)! + \ldots \tag{65}$$

Jsou ovšem obě celistvé, jak snadno zjistíme porovnáním s řadou $E(x)$, a mají řadu zajímavých vlastností; např. platí

$$DS(x) = C(x), \quad DC(x) = -S(x) \; . \tag{66}$$

Taylorova formule (57) pak dává

$$C(a + x) = C(a) \, . \, C(x) - S(a) \, S(x) \; , \tag{67}$$

$$S(a + x) = S(a) \, C(x) + C(a) \, S(x) \; , \tag{68}$$

takže

$$C^2(x) + S^2(x) = 1(x) \; , \tag{69}$$

$$C(2x) = C^2(x) - S^2(x) \; , \tag{70}$$

$$S(2x) = 2 \, C(x) \, S(x) \; . \tag{71}$$

Čtenáři se znalostmi základů matematické analýzy patrně vědí, že $C(q)$ a $S(q)$ jsou hodnoty známých funkcí cosinus a sinus: $C(q) = \cos q$, $S(q) = \sin q$ pro všechna reálná q. Jakmile je nám tato souvislost známa, přestanou nás vztahy (67) — (71) překvapovat a dokážeme snadno objevit a odvodit celou řadu dalších „známých" vztahů pro řady $C(x)$ a $S(x)$.

Jak jsme se už jednou zmínili v sedmém paragrafu, vyniknou hlubší vlastnosti řad teprve v komplexním oboru. Tam se také objeví bezprostřední souvislost řad $C(x)$ a $S(x)$ s řadou $E(x)$. Zkusme si — zcela formálně — provést do řady $E(x)$ substituci $N(x) = ix$. Rozkladem na reálnou a imaginární část objevíme tak dobře známý vztah

$$E(ix) = C(x) + i \, S(x) \; . \tag{72}$$

Na podrobnější studium řad v komplexním oboru však v této knížce není dost místa.

Za zmínku snad stojí též řada $L(x)$ z (49). Dá se ukázat, že pro $|q| < 1$ je $L(q) = \lg (1 + q)$. Jde o *přirozený* logaritmus při základu e. Studium souvislosti řady $L(x)$ s řadou $E(x)$ (jsou tzv. navzájem inversní), jakož i studium obdobných inversních řad k řadám $C(x)$ a $S(x)$, ač velmi zajímavé, zřetelně překračuje naše možnosti; čtenáře, který by se o řadách chtěl poučit podrobněji, musíme odkázat na učebnici matematické analýzy, příp. na klasickou soubornou monografii Knoppovu (K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*).

Cvičení

26. Pomocí binomických řad a identit

$$2 = \frac{99\ .\ 99}{70\ .\ 70}\cdot\frac{9\,800}{9\,801}\,,\qquad 3 = (1{,}7)^2\,\frac{300}{289}\,,$$

$$11 = \frac{100}{9}\cdot\frac{99}{100}\,,\qquad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3\frac{128}{125}\,,$$

$$3 = \frac{1\,000}{7^3}\cdot\frac{1\,029}{1\,000}$$

vypočtěte přibližné hodnoty odmocnin $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

27. Vypočtěte $e = E(1)$ s přesností na pět desetinných míst.

28. Dokažte nerovnosti
   a) $q < E(q) - 1 < q(1 - q)^{-1}$
   pro $0 < q < 1$;
   b) $E(q) > q^k/k!$
   pro $0 < q$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;
   c) $E(q) - 1 - q < q^2/2$
   pro $0 < q$.

29. Vypočtěte několik vhodných hodnot $E(q)$ a vyšetřete průběh funkce $E(q)$ v intervalu $-\infty < q < \infty$.

30. Vypočtěte přibližně $\cos q$, $\sin q$ pro vhodné hodnoty argumentu q (např. $q = \pi/6$, apod.) a odhadněte přesnost výpočtů.

31. Pomocí řady $L^*(x) = L(x) - L(-x)$ vypočtěte přibližně přirozený logaritmus čísla 2 a určete přesnost výpočtu.
32. Obdobně jako v případě rovnosti (62') dokažte i pro binomické řady, že rovnost $B_p(q) = (1 + q)^p$ platí pro všechna reálná p a pro $|q| < 1$.
33. Proveďte si podrobně důkazy vztahů (67) a (68). Nezávisle na nich pak odvoďte vztahy (69), (70) a (71).