3. kapitola

PRVNÍ POZNATKY Z KOMBINATORIKY ANEB DALŠÍ POZNATKY O MNOŽINÁCH

3.1. Dvouprvková kombinace

Je dána konečná množina M, která má aspoň dva prvky. Pak každá její podmnožina o dvou prvcích se jmenuje

DVOUPRVKOVÁ KOMBINACE MNOŽINY M.

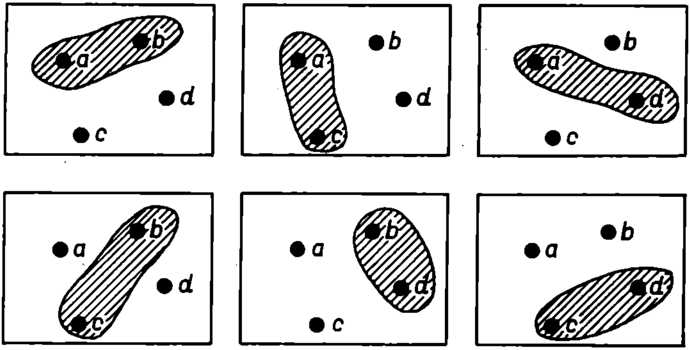
Slovo „kombinace" užíváme z historických důvodů. Místo dvouprvkové kombinace můžeme říkat dvouprvková podmnožina.

PŘÍKLAD

Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$ o čtyřech prvcích. Všecky její dvouprvkové kombinace jsou: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$. Na obrázku 61 jsou příslušné Vennovy diagramy.

Systém, podle kterého jsou vybírány všecky dvouprvkové kombinace z množiny M, ukazuje schéma z obrázku 62.

Stručně řečeno: ke každému z prvků a, b, c, d přidružíme postupně všecky prvky, které stojí za ním v zápisu množiny výčtem. Tentýž systém znázorňuje tabulka 1 s dvěma přístupy.



Obr. 61

Tabulka 1

	a	*b*	*c*	*d*
a	/////	*ab*	*ac*	*ad*
b	/////	/////	*bc*	*bd*
c	/////	/////	/////	*cd*
d	/////	/////	/////	/////

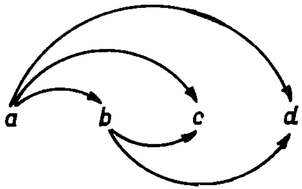
Tabulka 2

a	*b*	*c*	*d*
/	/	—	—
/	—	/	—
/	—	—	/
—	/	/	—
—	/	—	/
—	—	/	/

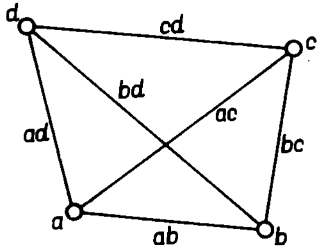
Vyšrafovaná pole se nesmějí vyplňovat. Někdy používáme též tabulky 2.

Jiný postup je tento: Sestrojíme čtyři body (nejvýhodnější je, neleží-li žádné tři z nich v přímce) a každé dva z nich spojíme jednou čarou (úsečkou). Krajní body těchto úseček udávají dvouprvkové kombinace (obr. 63).

Počet všech dvouprvkových kombinací množiny M *o* n *prvcích* $(n \geqq 2)$ *je* $n(n-1):2 = \frac{1}{2}n(n-1)$.



Obr. 62



Obr. 63

Tento vzorec lze odvodit pro libovolné $n \geqq 2$ z náčrtku podobného náčrtku z obrázku 63. Každý z n bodů spojíme s $n-1$ zbývajícími; tak dostaneme $n(n-1)$ spojnic. Každá z těchto spojnic byla však počítána dvakrát; proto je počet spojnic jen $n(n-1):2$, tj. počet dvouprvkových kombinací.

Následující tabulka udává čísla $\frac{1}{2}n(n-1)$ pro některá $n \geqq 2$.

n	2	3	4	5	6	7	8	...
$\frac{1}{2}n(n-1)$	1	3	6	10	15	21	28	...

Poznámka: Číslo $n(n-1):2$ je vždy přirozené, neboť právě jedno z čísel n, $n-1$ je sudé a proto i součin $n(n-1)$ je sudý.

PŘÍKLAD

Každá dvě z n měst jsou spojena leteckou linkou Kolik z těchto linek nevychází z jednoho z těchto měst?

Jsou to právě všecky linky, které spojují zbývajících $n-1$ měst (po dvou). Počet těchto leteckých linek je $(n-1)(n-2):2$.

Tento výsledek dostaneme, když ve vzorci $n(n-1):2$ píšeme místo n číslo $n-1$ a ovšem místo $n-1$ číslo $n-2$.

Pamatujte názvy:

kombinace množiny,
dvouprvková kombinace množiny.

CVIČENÍ

1. Přátelé A, B, C, D se loučí. Každý dva si podají ruku. Kolik stisků ruky si navzájem vymění?

a) Udělejte si náčrtek. Přátele si zakreslete jako body na kružnici a každé podání ruky vyznačte úsečkou.

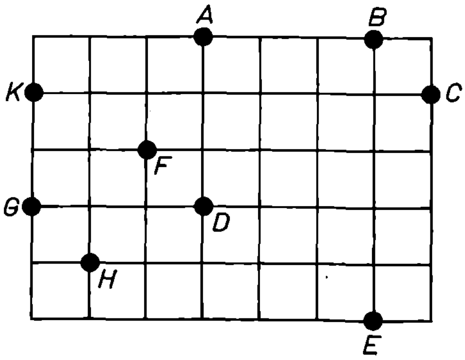
b) Vypište všechny dvojice přátel podávajících si ruku.

2. Jsou dány délky $a = 2$; $b = 4$; $c = 3$; $d = 2{,}5$. Vypočtěte obsahy všech obdélníků, jejichž rozměry jsou některá z uvedených čísel. Uspořádejte tyto obdélníky podle velikosti.

3. **a)** Na mapě je devět vesnic A, B, C, D, E, F, G, H, K. Má se sestrojit co nejkratší komunikační síť spojující všech devět vesnic. Přitom se smí rozvětvovat jen na vesnicích. (Obr. 64).

Řešte úlohu nejdříve zkusmo a pak teprve pro kontrolu užijte postupu:

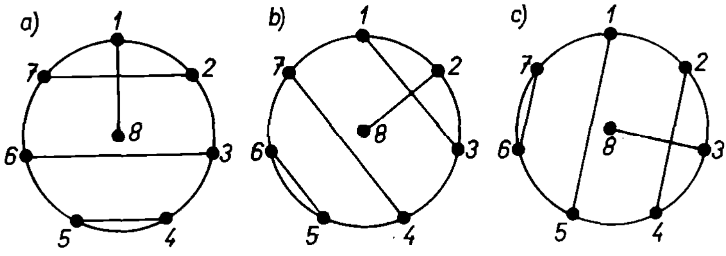
1) Spojte každé místo úsečkou s nejbližším dalším místem.



Obr. 64

2) Jestliže vznikne nesouvislá síť složená z několika souvislých částí, najděte pro každou z nich nejkratší možné spojení s jinou částí. (Takto postupujte tak dlouho, dokud nedostanete souvislou síť.)

b) „Naplánujte" nejvhodnější spojení pro okresní města vašeho kraje. (Potřebujete mapu.)



Obr. 65

4. Rozpis turnaje pro 8 hráčů (hraje každý s každým). Hráče označíme čísly 1, 2, ..., 8 a užijeme schemat (obr. 65).

$$1.\ \text{kolo: } 1+8 \qquad \underbrace{2+7,\ 3+6,\ 4+5}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 2}}$$

$$2.\ \text{kolo: } 2+8 \qquad \underbrace{3+1,\ 4+7,\ 5+6}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 4}}$$

$$3.\ \text{kolo: } 3+8 \qquad \underbrace{4+2,\ 5+1,\ 6+7}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 6}}$$

atd.

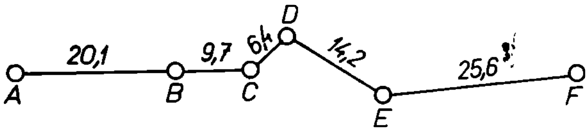
Dokončete rozpis turnaje sami:

5. a) Na obrázku 66 je úsek železniční trati s místy A, B, C, D, E, F a vyznačenými vzdálenostmi v km. Zapište do tabulky vzdálenosti každých dvou míst (v tabulce na obr. 67 je již uvedena vzdálenost míst B, D).

b) Ukažte, že množina $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ má $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dvouprvkových kombinací.

c) Podobně jako v úloze **b)** ukažte, že množina o sedmi prvních má $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ dvouprvkových kombinací.

6. a) Jsou dána čtyři různá přirozená čísla $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 8$. Vypočítejte kladné rozdíly každých dvou z těchto čísel. Vypočtěte dále součin všech těchto rozdílů. Výsledek bude násobkem čísla 12. Přesvědčte se!



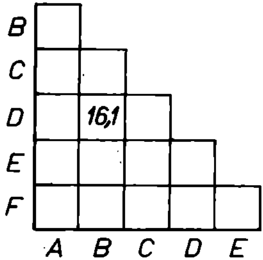
Obr. 66

b) Úlohu opakujte pro jinou čtveřici čísel a, b, c, d.

c) Zvolte ještě jednou čísla a, b, c, d, a to tak, aby výsledný součin byl co nejmenší.

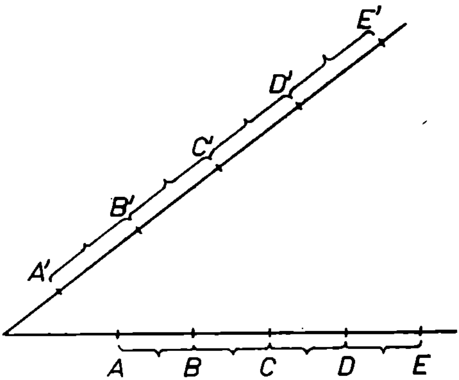
7. Která z číslic 0, 1, ..., 9 se nejčastěji vyskytne v zápisech všech přirozených čísel od 1 do 99?

8. Hází se dvěma hracími kostkami, čísla, která padnou, se sčítají. Která čísla tak můžeme dostat? Která z těchto čísel lze získat nejvíce způsoby?



Obr. 67

9. Nové vozy tramvaje se spřahují v tzv. dvojčata. Ve vozovně je 60 vozů. Kolika způsoby je lze spřáhnout ve dvojčata? (Pozor, záleží na tom, který vůz je první a který druhý.)



Obr. 68

10. Můj přítel má telefonní číslo 435 84 95. Při vytáčení tohoto čísla jsem se zmýlil při volbě dvou číslic. Kolik telefonních čísel (chybných) jsem mohl tak vytočit?

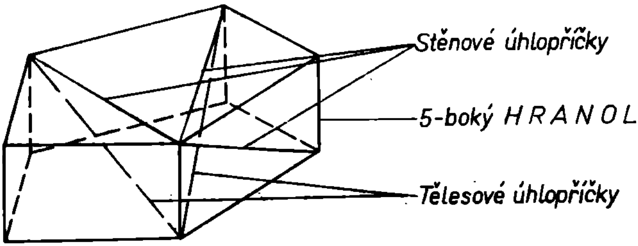
11. a) Na obrázku 68 sestrojte průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Při přesném rýsování leží tyto průsečíky na jedné přímce.

b) Sestrojte průsečíky úhlopříček všech čtyřúhelníků

$\underline{AB}B'A'$, $\underline{AC}C'A'$, $\underline{AD}D'A'$, $\underline{AE}E'A'$, $\underline{BC}C'B'$, ...

(Kolik takových čtyřúhelníků je, jestliže podtržená písmena tvoří dvojprvkové kombinace množiny bodů A, B, C, D, E.) Co pozorujete?

12. Na obrázku 69 je znázorněn 5boký hranol. Vypočítejte, kolik má stěnových a kolik tělesových úhlopříček. (Můžete počítat různými způsoby.)



Obr. 69

13. Doplňte tabulku (n je počet vrcholů n-úhelníka, p je počet jeho úhlopříček):

n	6	8	*)	12	*)	15	*)	22
p			10		60		120	

*) Odhadněte a pak odhad kontrolujte výpočtem.

14. Do roku 1968 hrálo v nejsilnější skupině MS v ledním hokeji 8 mužstev. Turnaj byl jednokolový. Od roku 1969 hraje v nejsilnější skupině MS v ledním hokeji 6 mužstev; turnaj je však dvoukolový.

a) Kolik zápasů se sehrálo dříve a kolik nyní v boji o titul MS?

b) Kolik zápasů sehrálo každé mužstvo dříve a kolik nyní?

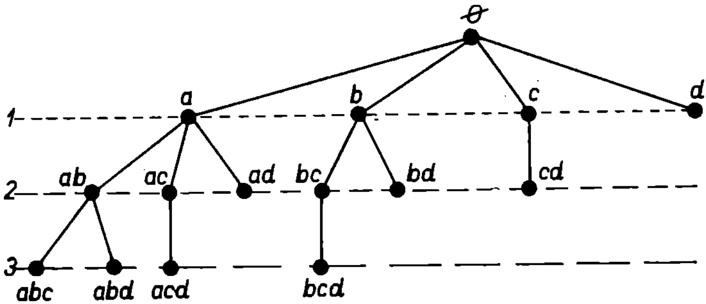
3.2. Kombinace k-prvkové

Je dána konečná množina $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, která má n prvků a dále přirozené číslo $k \leq n$. Každou podmnožinu $\boldsymbol{M}_k \subset \boldsymbol{M}$, která má k prvků, nazveme

k — PRVKOVOU KOMBINACÍ MNOŽINY M.

Speciálně: pro $k = 0$, je $\boldsymbol{M}_0 = \emptyset$, pro $k = n$ je $\boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{M}$.

Jak utvoříme tříprvkové kombinace z dvouprvkových? Budeme postupovat jako při tvoření dvouprvkových kombinací tak, že prvky každé kombinace budou v „základním uspořádání". Je dána čtyřprvková množina $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$. Jednoprvkové, dvouprvkové a tříprvkové kombinace zapíšeme pomocí stromu logic-



Obr. 70

kých možností (složené závorky pro jednoduchost vynecháváme); viz obr. 70.

Na linkách 1, 2, 3 jsou zapsány všecky jednoprvkové, dvouprvkové a tříprvkové kombinace množiny ***M***.

Pro pětiprvkovou množinu $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e\}$ sestavíme příslušný strom logických možností podle obrázku 71.

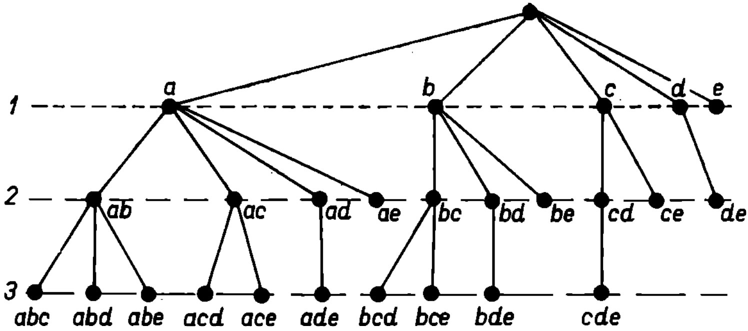
Množinu všech tříprvkových kombinací množiny ***M*** můžeme udat tabulkou:

a	*b*	*c*	*d*	*e*
/	/	/	—	—
/	/	—	/	—
/	/	—	—	/
/	—	/	/	—
/	—	/	—	/
/	—	—	/	/
—	/	/	/	—
—	/	/	—	/
—	/	—	/	/
—	—	/	/	/

Je-li $\boldsymbol{C_k}$ libovolná k-prvková kombinace množiny ***M***, pak její doplněk $\boldsymbol{C_k'} = \boldsymbol{C_{n-k}}$ je $(n - k)$ — prvkovou kombinací množiny ***M***. Kombinace $\boldsymbol{C_{n-k}}$ se nazývá

DOPLŇKOVÁ KOMBINACE KE KOMBINACI $\boldsymbol{C_k}$.

Zřejmě je také $\boldsymbol{C_k}$ doplňková kombinace k $\boldsymbol{C_{n-k}}$. Proto říkáme někdy, že $\boldsymbol{C_k}$, $\boldsymbol{C_{n-k}}$ jsou



Obr. 71

KOMBINACE NAVZÁJEM DOPLŇKOVÉ

Jsou tedy $C_0 = \emptyset$ a $M = C_n$ navzájem doplňkové kombinace.

PŘÍKLAD

$M = \{a, b, c, d, e\}$. V následující tabulce jsou uvedeny všechny dvouprvkové kombinace a k nim doplňkové tříprvkové.

Dvouprvková kombinace	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	*be*	*bd*	*be*	*cd*	*ce*	*de*
K ní doplňková tříprvková kombinace	*cde*	*bde*	*boe*	*bcd*	*acd*	*ace*	*acd*	*abe*	*abd*	*abc*

PŘÍKLAD

Z šesti žáků (Mirek, Jan, Karel, Věra, Dana, Helena) máme sestavit všecky čtveřice, v nichž není Karel, ale je Dana.

Žáci tvoří množinu $\mathbf{Z} = \{M, J, K, V, D, H\}$ (počáteční písmena jejich jmen). Hledané čtveřice musíme vybírat jen ze čtyřprvkových kombinací množiny $\{M, J, V, D, H\}$, tj. doplňku množiny $\{K\}$.

$$MJVD,\ \underline{MJVH},\ MJDH,\ MVDH,\ JVDH.$$

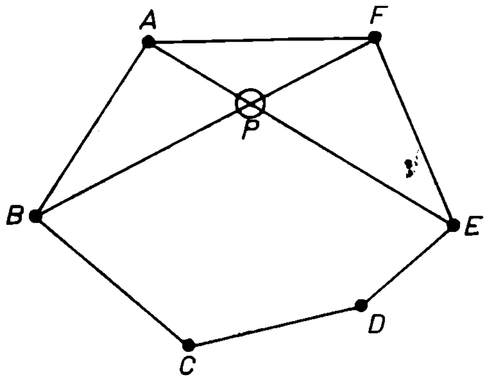
Z nich jen druhá (podtržená) neobsahuje D; řešením jsou tedy čtyři zbývající.

Pamatujte názvy:

k-prvková kombinace množiny;
doplňková kombinace (k dané kombinaci).

CVIČENÍ

1. Potřebujeme po 10 kusech mincí v hodnotách 5h, 10h, 25h, 50h, 1 Kčs. Které částky lze zaplatit **a)** dvěma, **b)** třemi různými mincemi? Sestavte všechny možnosti.

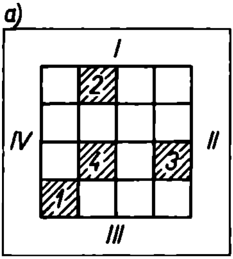


Obr. 72

2. Narýsujte 6-úhelník $ABCDEF$ podle obrázku 72. Každé čtveřici vrcholů 6-úhelníka odpovídá jediný průsečík přímek. Např.:

$$\{A, B, E, F\} \longleftrightarrow P$$

Využijte toho k sestavení všech 4-prvkových kombinací množiny $M = \{A, B, C, D, E, F\}$.



Obr. 73a

b)

I	Ť	R	P
B	!	L	K
E	I	E	Ž
A	A	U	J

Obr. 73b

c)

1	2	3	1
3	4	4	2
2	4	4	3
1	3	2	1

Obr. 73c

3. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Pomocí stromu logických možností udejte všecky tříprvkové kombinace v abecedním pořádku.

4. a) **Kódovací tabulka.** Narýsujte podle obrázku 73a kódovací tabulku a vystřihněte ji. Vyřízněte z ní též vyšrafovaná políčka. Pomocí tabulky přečtěte zašifrovaný text z obrázku 73b. Postupujte tak, že k hornímu okraji šifrovaného textu přiložte postupně strany kódovací tabulky označené I, II, III, IV a vždy přečtěte po řadě písmena v okénkách 1, 2, 3, 4.

b) Vytvořte sami jiné kódovací tabulky. Vždy se vystřihne po jednom poli označeném na obr. 73c čísly 1, 2, 3, 4. Odůvodněte! Zjistěte, kolik lze sestavit takových tabulek.

5. V garáži je umístěno 7 autobusů, z nichž čtyři musí jezdit na linkách, zbývající zůstávají doma. Označte autobusy a vypište do tabulky všecky čtveřice autobusů, které garážmistr může vypravit a všecky trojice, které zůstanou doma.

6. Číslo 2 310 lze napsat jako součin $2 . 3 . 5 . 7 . 11$; přesvědčte se! Vypište do tabulky všecky dělitele čísla 2 310, které jsou součiny dvou různých čísel množiny $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Vypište pomocí toho všecky dělitele čísla 2 310, které jsou součiny tří čísel z M.

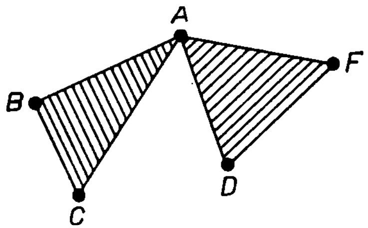
Dvojice	2.3	2.5	2.7	...	7.11
Trojice			3.5.11	...	

Který ze součtů dvou čísel stojících v tabulce nad sebou je a) největší; b) nejmenší?

7. Všechny 3-prvkové kombinace množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rozdělte na 4 podmnožiny M_0, M_1, M_2, M_3 podle toho, zda neobsahují 1 nebo 2 či 3 sudá čísla. Která z nich má nejvíce prvků?

8. Ze 6 hráčů se mají postavit 2 tříčlenná družstva. Kolika způsoby se to může provést?

9. Zvolte si 5 bodů A, B, C, D, E, z nichž žádné 3 neleží v přímce. Každá trojice bodů vybraná ze zvolených bodů určuje trojúhelník. Na obrázku 74 jsou znázorněmy dva trojúhelníky.



Obr. 74

a) Určete výčtem množinu M všech takto vzniklých trojúhelníků.

b) Změřte obvody všech trojúhelníků množiny M. Trojúhelníky seřaďte podle velikosti obvodů.

10. a) Zjistěte, kolik různostranných trojúhelníků lze sestrojit z úseček

$a = 4{,}8$ cm, $b = 1{,}8$ cm, $c = 3{,}6$ cm,
$d = 7{,}3$ cm, $e = 6{,}0$ cm, $f = 8{,}1$ cm.

(Trojúhelník o stranách a, b, c $(a \geqq b \geqq c)$ lze sestrojit právě tehdy, jestliže platí

$$b + c > a\,,$$

tzn. součet dvou kratších stran je větší než zbývající třetí strana.)

b) Kolik trojúhelníků lze sestrojit celkem?

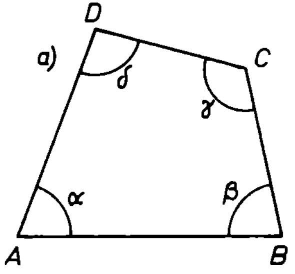
c) Určete pravděpodobnost, že z libovolně zvolených tří stran ze cvičení **a)** lze sestrojit trojúhelník.

11. a) Roztřiďte trojúhelníky ze cvičení **10. b)** na pravoúhlé, ostroúhlé a tupoúhlé.

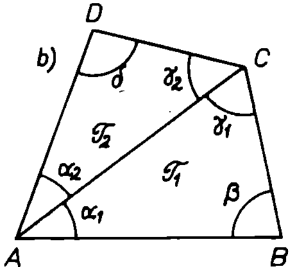
(Trojúhelník o stranách a, b, c $(a \geqq b \geqq c)$ je pravoúhlý, resp. ostroúhlý, resp. tupoúhlý, jestliže platí

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \textit{resp. } a^2 < b^2 + c^2, \quad \textit{resp. } a^2 > b^2 + c^2.)$$

b) Jaká je pravděpodobnost, že libovolný trojúhelník z cvičení **10. b)** je pravoúhlý, ostroúhlý, tupoúhlý.



Obr. 75a



Obr. 75b

12. a) Pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 75a) platí: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Správnost ověřte buď měřením, nebo pomocí obrázku 75b takto:

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \beta = \underline{\qquad\qquad},$$
$$\alpha_2 + \delta + \gamma_2 = \underline{\qquad\qquad},$$

Sečtením dostaneme

$$\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha} + \beta + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma)}_{\gamma} + \delta = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Vyhledejte všechny trojice úhlů množiny $M = \{29°, 95°, 132°, 44°, 113°\}$, které jsou vnitřní úhly téhož konvexního čtyřúhelníku.

Řešení zapisujte do tabulky:

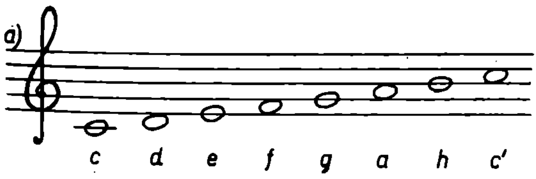
Vzor:

29°	95°	132,	44°	113,	4. úhel	
/	/	/	—	—	$360° - (29° + 95° + 132°) = 104° < 180°$	ano
/	/	—	/	—	$360° - (29° + 95° + 44° = 192° > 180°$	ne*)

*) Velikost každého vnitřního úhlu konvexního čtyřúhelníka je menší než 180°.

13. Výtah je maximálně pro 3 osoby. Před výtahem stojí společnost šesti lidí, která se chce dopravit dvěma jízdami do 4. patra. Kolika různými způsoby lze dopravu provést? (Je-li známa posádka 1. jízdy, je tím určena posádka 2. jízdy.) Způsoby zapište do tabulky.

14. Je dána stupnice *c - dur*, tj. *c, d, e, f, g, a, h, c'* (obr. 76a). Na obrázku 76b je znázorněn trojzvuk *cfa*. Sestavte do tabulky všechny trojzvuky, které neobsahují sekundu (tj. dva „sousední" tóny).



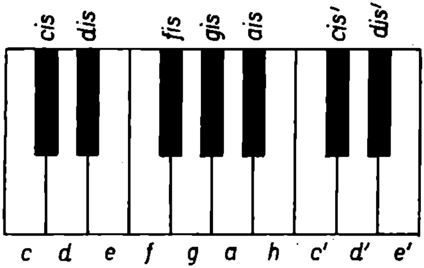
Obr. 76a

Obr. 76b

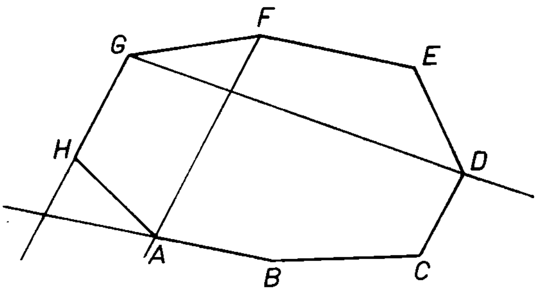
Vzor:

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c'*
/	—	/	—	/	—	—	—
/	—	/	—	—	/	—	—

15. Kolik různých 3-zvuků (4-zvuků) lze zahrát na klávesnici z obrázku 77.



Obr. 77



Obr. 78

16. Na obrázku 78 je znázorněn 8-úhelník *ABCDEFGH*.
a) Kolik přímek je určeno jeho vrcholy?
b) Označme ***Z*** množinu průsečíků všech přímek z úlohy

a). Kolik má množina Z nejvýše prvků?

c) Označme $V_1 = \{X \in Z \mid X$ je vně 8-úhelníka$\}$,
$V_2 = \{X \in Z \mid X$ je vrchol 8-úhelníka$\}$,
$V_3 = \{X \in Z \mid X$ je uvnitř 8-úhelníka$\}$.

Pokuste se zjistit kolik nejvýše prvků mají množiny V_1 a V_3.

3,3. Kombinační čísla

Počet všech k-prvkových kombinací dané n-prvkové množiny označíme symbolem

$$\binom{n}{k}$$

POČET PRVKŮ DANÉ MNOŽINY

POČET PRVKŮ KOMBINACE

čte se „n nad k“ (např. „pět nad dvěma“). Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá

KOMBINAČNÍ ČÍSLO.

Symbol $\binom{n}{k}$ není zlomek $\frac{n}{k}$. Závorky nesmíme vynechat. Zlomkovou čáru nepíšeme.

Zřejmě je $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ pro každé přirozené číslo $n \geqq 1$. Z definice doplňkových kombinací a z jejich vytvoření plyne vzorec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

PŘÍKLAD

Množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ má šest prvků. Všechny její dvouprvkové kombinace jsou:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Všechny její čtyřprvkové kombinace jsou:

3456, 2456, 2356, 2346, 2345, 1456, 1356, 1346, 1345, 1256, 1246, 1245, 1236, 1235, 1234.

Je tedy $\binom{6}{2} = 15$ i $\binom{6}{4} = 15$, tj. $\binom{6}{2} = \binom{6}{6-2}$.

Všimněte si, jakým způsobem byly vytvořeny čtyřprvkové kombinace pomocí dvouprvkových.

PŘÍKLAD

Množina M má 32 prvků; máme zjistit počet všech jejích 30prvkových kombinací.

Protože je $\binom{32}{30} = \binom{32}{32-30} = \binom{32}{2}$, je hledaný počet roven počtu dvouprvkových kombinací. Jejich počet je — jak známo — $(32.31) : 2 = 992 : 2 = 496$.

Kombinační čísla pro malá n, k udává tabulka, zvaná ***Pascalovo*** (čti Paskalovo) ***schéma***.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66

Pascalovo schéma je tvořeno podle tohoto výtvarného předpisu (klíče):

a	b
	$a+b$

První sloupec tabulky obsahuje vesměs čísla 1, každý řádek se skládá z čísel uspořádaných souměrně „podle středu", např.:

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

Poslední číslo v každém řádku je také 1.

Zapíšeme-li výtvarný předpis Pascalova schématu kombinačními čísly, dostaneme vzorec

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

je to tzv.

SOUČTOVÝ VZOREC PRO KOMBINAČNÍ ČÍSLA

PŘÍKLAD

Ověříme si součtový vzorec pro $n = 4$, $k = 2$. Číslo $\binom{5}{3}$ je počet všech tříprvkových kombinací pětiprvkové množiny

$$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e\}$$

Tyto kombinace tvoří množinu $\boldsymbol{K}$. Utvoříme rozklad množiny $\boldsymbol{K}$ na dvě třídy $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ (viz obr. 79):

$\boldsymbol{K}_1$ je množina všech tříprvkových kombinací množiny $\boldsymbol{M}$, které obsahují prvek e.

$\boldsymbol{K}_2$ je množina všech tříprvkových kombinací množiny $\boldsymbol{M}$, které neobsahují prvek e.

$\boldsymbol{K}_1$ můžeme vytvořit takto: sestrojíme všecky dvouprvkové kombinace množiny $\{a, b, c, d\}$ — (množina $\boldsymbol{M}$ bez prvku e), tj.

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

a připojíme k nim prvek e; je tedy

$$\boldsymbol{K}_1 = \{abe, ace, ade, bce, bde, cde\}\,.$$

Počet prvků množiny $\boldsymbol{K}_1$ je tedy $\binom{4}{2}$.

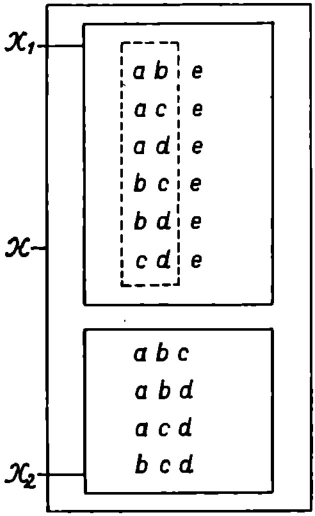
$\boldsymbol{K}_2$ je množina tříprvkových kombinací množiny $\{a, b, c, d\}$, tj.

$$\boldsymbol{K}_2 = \{abc, abd, acd, bcd\} ;$$

jejich počet je $\binom{4}{3}$.

Počet prvků množiny $\boldsymbol{K}$ dostaneme sečtením počtu prvků tříd $\boldsymbol{K}_1$ $\boldsymbol{K}_2$, tj. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Je tedy skutečně $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, jak říká součtový vzorec.

Diagramem znázorníme množiny $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K}$ např. takto (obr. 79):



Obr. 79

PŘÍKLAD

Házíme šesti různými mincemi. Máme určit pravděpodobnost, že padne aspoň na dvou mincích líc.

Počet možných výsledků udává tabulka

Počet líců na mincích	0	1	2	3	4	5	6
Počet možností	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Celkem je možností

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} =$$

$$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64.$$

Počet možností, při nichž nastane požadovaný jev

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1} = 57$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{57}{64} \doteq 0{,}89 = 89\ \%.$$

Pamatujte název a zápis:

kombinační číslo; $\binom{n}{k}$.

CVIČENÍ

1. Které z čísel $\binom{4}{1}$, $\binom{3}{2}$ je větší?

2. Odůvodněte, proč je číslo $\binom{n}{k} + \binom{n}{n-k}$ sudé.

3. Užitím kombinačních čísel zapište počet

a) různých typů ve Sportce (v Matesu);

b) různých trojúhelníků, jejichž vrcholy splývají s některými třemi body z daných n bodů, z nichž žádné 3 neleží na přímce;

c) průsečíků n přímek, z nichž žádné 3 neprocházejí týmž bodem.

4. Kolika způsoby lze udělat chybu v umístění aspoň jedné oddělující čárky v souvětí: „Myslím, že člověka, který přišel, znám".

5. a) První poločas fotbalového zápasu skončil za stavu 4 : 3. Pořadí branek, které střelili hosté (H) a domácí (D) bylo toto:

H	D	D	H	D	H	D
1	②	③	4	⑤	6	⑦

Všimněte si, že dosavadní průběh utkání lze charakterizovat 4-prvkovou kombinací $\{2, 3, 5, 7\}$ množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $(7 = 4 + 3)$.

Kolika různými způsoby mohl zápas v 1. poločase probíhat při stejném výsledku?

b) Kolika způsoby mohl probíhat celý zápas, jestliže byl výsledek 7 : 5 (poločas 4 : 3).

6. a) Znáte Pascalovo schéma. Řádky očíslujte podle schématu. Ve 3. řádku jsou vesměs lichá čísla. Určete nejbližší 2 řádky téže vlastnosti.

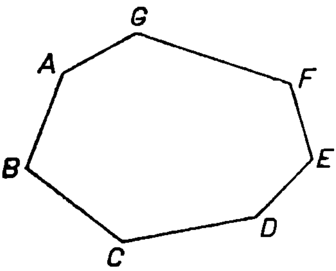
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Úlohu můžete řešit rychleji podle schématu. Dovedete to vysvětlit?

```
        L
       L L
      L S L
     L L L L
    L S S S L
```

7. a) V Pascalově schématu nahraďte každé číslo zbytkem, který vznikne při dělení tohoto čísla třemi.

b) Jsou v některém řádku Pascalova schématu všechna „vnitřní“ čísla přirozené násobky tří?



Obr. 80

8. Na obrázku 80 je 7-úhelník;

a) Kolik má úhlopříček?

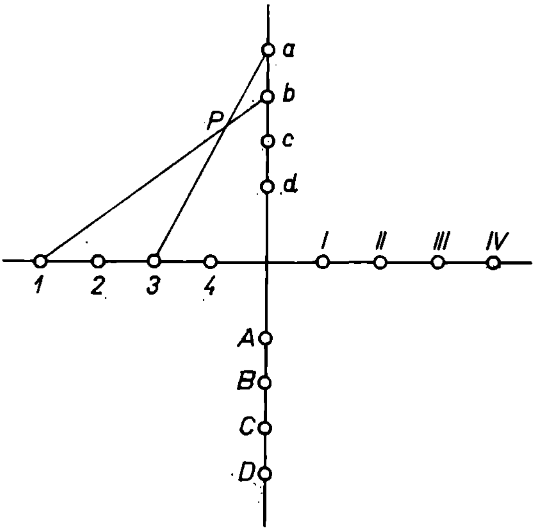
b) Kolik přímek je určeno těmito body?

c) V kolika bodech se protínají přímky omezující 7-úhelník?

9. Pro přijetí návrhu hlasovalo 8 členů komise z 11 přítomných. Kolika různými způsoby se mohlo v komisi hlasovat pro a proti?

10. Každý bod (obr. 81) na vodorovné přímce lze spojit úsečkou s každým bodem na svislé přímce. Kolik vznikne průsečíků?

Všimněte si, že průsečík P na obrázku 81 je určen dvěma 2-prvkovými kombinacemi: Jsou to kombinace $\{1, 3\}$ množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a kombinace $\{a, b\}$ množiny $M = \{a, b, c, d\}$.



Obr. 81

11. Z deseti vybraných žáků dostalo z písemky známky

1	3 žáci
2	5 žáků
3	2 žáci

Kolika způsoby se to může stát?

12. Vypočtěte podle součtového vzorce:

a) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, c) $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}$,

b) $\binom{30}{28} + \binom{30}{27}$, d) $\binom{10}{4} + \binom{10}{3}$.

13. Sestavte všechny 3-prvkové kombinace množiny $M = \{1, 2, \ldots, 6\}$, které

a) obsahují číslo 1,

b) obsahují číslo 1 a neobsahují číslo 2,

c) obsahují aspoň jedno z čísel 1, 2.

14. Vyjádřete jediným kombinačním číslem a pak tato čísla najděte v tabulce na str. 109.

a) $\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + \binom{4}{3} =$

b) $\binom{6}{3} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} =$

c) $\binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} =$

d) $\binom{13}{4} - \binom{12}{3} + \binom{12}{5} =$

e) $\binom{10}{3} + \binom{10}{6} =$

f) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} =$

g) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} =$

15. Zjistěte, kolika způsoby lze ve schematech

```
P
R R
A A A
H H H H
A A A A A
```

```
B
R R
A A A
T T T T
I I I I I
S S S S S S
L L L L L L L
A A A A A A A A
V V V V V V V V V
A A A A A A A A A A
```

přečíst slova „Praha“, „Bratislava“. Čte se slovo dolů ve dvou možných směrech udanými šipkami; při každém kroku máte tedy možnost volby mezi dvěma písmeny.

16. Házíte n mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne k-krát líc. Vypočítejte pro tyto údaje:

a) $n = 5$, $k = 3$; **b)** $n = 7$, $k = 4$; **c)** $n = 8$, $k \leqq 4$;

17. U stolu sedí 3 lidé. Každý z nich si myslí některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jaká je pravděpodobnost, že si aspoň dva lidé myslí stejné číslo. (Pravděpodobnost volby všech čísel 1 až 6 je stejná.)

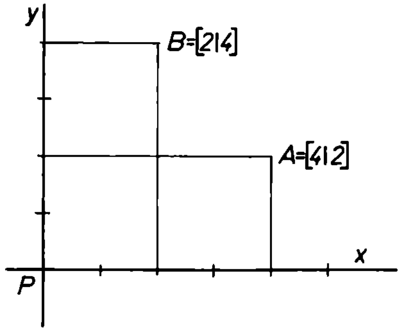
18. Ukažte, že ve skupině lidí musí být aspoň 5 osob, abychom měli zaručenu minimálně 50 % pravděpodobnost, že jsou mezi nimi dvě osoby narozené v témže měsíci.

3.4. Kartézský součin dvou množin

USPOŘÁDANÁ DVOJICE je dvojice předmětů (prvků), kde záleží na tom, který předmět (prvek) je první, a který druhý.

PŘÍKLADY

a) Uspořádaná dvojice Jan — Jiří je jiná, než uspořádaná dvojice Jiří — Jan. (Např. uspořádaná dvojice



Obr. 82

Jan — Jiří může znamenat, že Jan vstoupil do místnosti před Jiřím.)

b) První a druhá souřadnice bodu A tvoří uspořádanou dvojici $[4 \mid 2]$. Uspořádaná dvojice $[2 \mid 4]$ je jiná (obr. 82).

c) Ze dvou totožných prvků můžeme utvořit jen jednu uspořádanou dvojici; např. Jan — Jan, $[3 \mid 3]$, $K\ K$ ap.

KARTÉZSKÝ SOUČIN množin $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$ je množina uspořádaných dvojic

$$ab,\ ac,\ ad,\ bb,\ bc,\ bd\ ;$$

Zapisujeme:

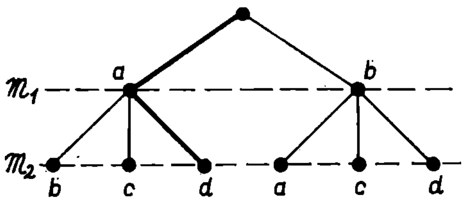
$$M_1 \times M_2 = \{ab, ac, ad, bb, bc, bd\}\ .$$

Říkáme, že tvoříme ***kartézský součin***, nebo že ***množiny kartézsky násobíme.***

Kartézský součin lze přehledně udat tabulkou se dvěma vstupy:

$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	b	c	d
	a	ab	ac	ad
	b	bb	bc	bd

Kartézský součin $M_1 \times M_2$ lze udat pomocí „klesa-



Obr. 83

jících cest“ ve stromu logických možností (obr. 83, kde tlustě vytažená „cesta“ značí uspořádanou dvojici *ad*).

PŘÍKLAD

V češtině se uvádí na prvním místě rodné jméno, na druhém místě příjmení. Která jména lze sestavit z rodných jmen Jan, Jiří a z příjmení Suchý, Novák, Vodička?

M_1 = {Jan, Jiří},
M_2 = {Suchý, Novák, Pavel};

$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	Suchý	Novák	Pavel
	Jan	Jan Suchý	Jan Novák	Jan Pavel
	Jiří	Jiří Suchý	Jiří Novák	Jiří Pavel

V tomto případě nemá množina $M_2 \times M_1$ význam. (V češtině nepíšeme Novák Jan.)

PŘÍKLAD

a) $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{2, 4, 6\}$.

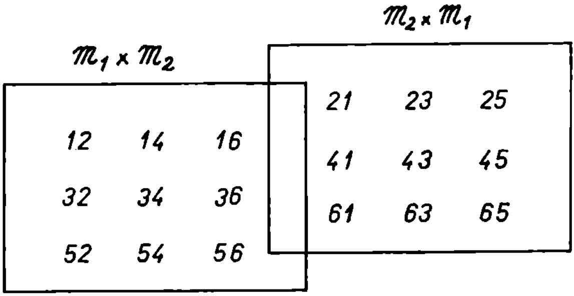
$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	2	4	6
	1	12	14	16
	3	32	34	36
	5	52	54	56

$M_2 \times M_1$	$M_2 \backslash M_1$	1	3	5
	2	21	23	25
	4	41	43	45
	6	61	63	65

Tedy:

$$M_1 \times M_2 = \{12,\ 14,\ 16,\ 32,\ 34,\ 36,\ 52,\ 54,\ 56\},$$
$$M_2 \times M_1 = \{21,\ 23,\ 25,\ 41,\ 43,\ 45,\ 61,\ 63,\ 65\}.$$

Množiny $M_1 \times M_2$, $M_2 \times M_1$, jsou dokonce bez společných prvků (viz diagram na obr. 84).

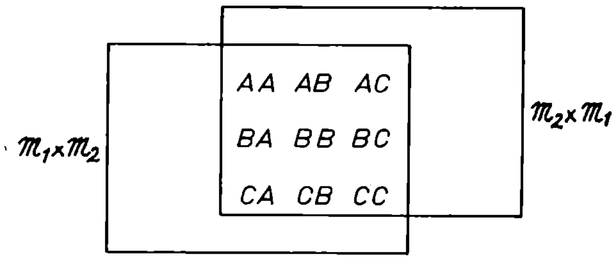


Obr. 84

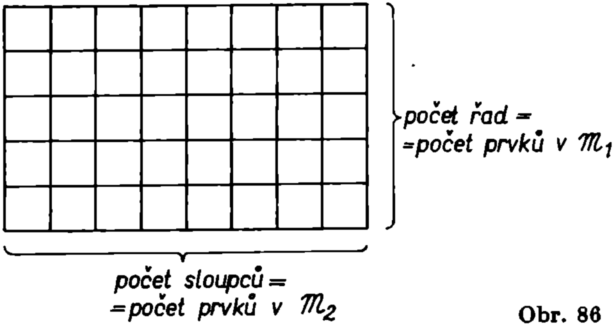
b) $M_1 = M_2 = \{A, B, C\}$;

$M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1 = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$.

Pro konečné množiny M_1, M_2 můžeme zapsat prvky kartézského součinu $M_1 \times M_2$ do pravoúhlé tabulky.



Obr. 85



Obr. 86

Proto pro konečné množiny platí:

Množina	Počet prvků množiny	Například (viz obr. 86)
M_1	n_1	$n_1 = 5$
M_2	n_2	$n_2 = 8$
$M_1 \times M_2$	$n_1 . n_2$	$n_1 . n_2 = 40$

Údaje z pravého sloupce tabulky si můžete ověřit sami též pomocí stromu logických možností.

PŘÍKLAD

Kartézský součin nekonečných množin:

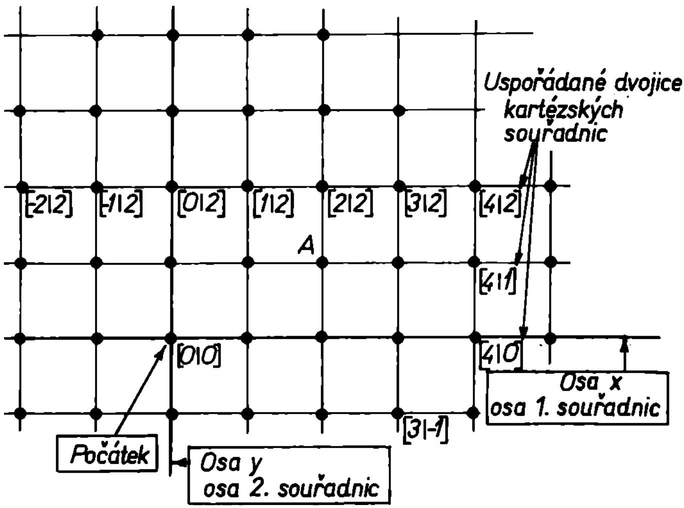
$\mathbf{C} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\ldots\}$.

$\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ je množina uspořádaných dvojic

KARTÉZSKÝCH SOUŘADNIC

bodů; obě jejich souřadnice jsou celá čísla.

C \ C	0	+1	—1	+2	—2	+3
0	[0 | 0]	[0 | 1]	[0 | -1]	[0 | 2]	[0 | —2]	...
+1	[1 | 0]	[1 | 1]	[1 | -1]	[1 | 2]	[1 | -2]	...
—1	[-1 | 0]	[-1 | 1]	[-1 | -1]	[-1 | 2]	[-1 | -2]	...
+2	[2 | 2]	[2 | 1]	[2 | -1]	[2 | 2]	[2 | -2]	...
—2	[-2 | 0]	[-2 | 1]	[-2 | -1]	[-2 | 2]	[-2 | -2]	...
+3	...	...	...	...	...	...



Obr. 87

Bod A na obrázku 87 má souřadnice 2 a 1; píšeme:

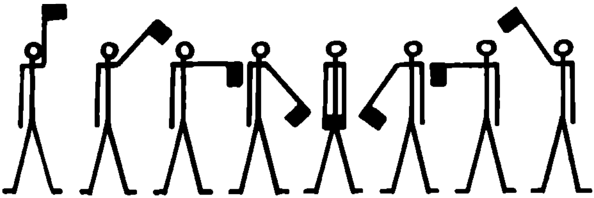
$$A = [\underset{\substack{\text{1. souřadnice} \\ \text{(souřadnice } x)}}{2} \mid \underset{\substack{\text{2. souřadnice} \\ \text{(souřadnice } y)}}{1}]$$

Pamatujte názvy:

kartézský součin dvou množin,
kartézské násobení množin,
uspořádaná dvojice.

CVIČENÍ

1. Při signalisování jedním černým praporkem lze vyslat osm znaků (obr. 88).



Obr. 88

Kolik znaků můžete vyslat při signalisování dvěma praporky — černým a bílým? (Polohy bílého praporku značte písmeny $a, b, \ldots, h$).

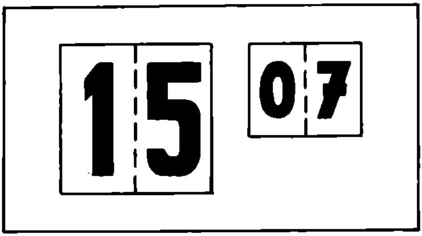
Vypište přehledně všechny různé signály:

Např.: $Aa \quad Ab \quad Ac$
$Ba \quad Bb \quad Bc$ atd.

2. Novější typy veřejných hodin jsou „číslicové“ (obr. 89).
Ve větším okénku jsou údaje o hodinách — jde o prvky množiny $H = \{00, 01, 02, \ldots, 23\}$.
V menším okénku jsou údaje o minutách — jde o prvky množiny $M = \{00, 01, 02, \ldots, 59\}$.

a) Kolik časových údajů hodiny ukazují? Zapište některé z nich; např. 15 - 07 znací 15 hodin 7 minut.

b) Vypište všechny časové údaje, které udávají půlhodiny a celé hodiny. Uspořádejte je do tabulky.



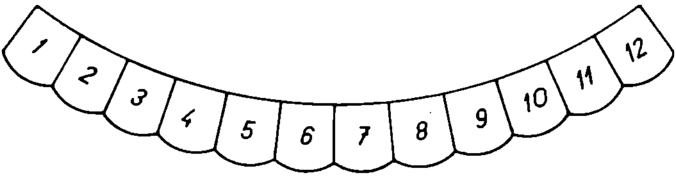
Obr. 89

3. V divadelním sále je 15 řad po 12 sedadlech, číslovaných v každé řadě zleva doprava 1 až 12 (obr. 90). Každé sedadlo lze určit dvěma údaji. Sedadlo

5/9

je sedadlo č. 9 v 5. řadě.

Cena sedadel:	I. místo (řada 1 až 8)	12,50 Kčs
	II. místo (řada 9 až 15)	8,00 Kčs



Obr. 90

a) Vypište všechny dvojice udávající prostřední sedadla I. místa.

b) Vypište všechna krajní sedadla II. místa.

c) Kolik korun se vybere, je-li sál plně obsazen?

d) Vláďa seděl na sedadle 10/8, Zdeněk na sedadle 7/5 a vyměnili si místa. Na kterých místech museli diváci vstát, když byl sál plně obsazen?

4. M_1 je množina dvou druhů obrazců:

$$M_1 = \{\text{čtverec, kruh}\},$$

M_2 je množina tří barev:

$$M_2 = \{\text{červená, modrá, žlutá}\}.$$

Znázorněte kartézský součin $M_1 \times M_2$ tabulkou i modelem (barevné obrazce).

5. Jsou dány množiny slabik:

$$M_1 = \{\text{no, vě, ví, sí}\},$$
$$M_2 = \{\text{ha, ta, la, ra}\}.$$

Vypište tabulku $M_1 \times M_2$ (jde např. o „slova": noha, nola, atd.). Která z těchto „slov" se užívají v češtině?

6. a) Kartézský součin $M_1 \times M_2$ má 12 prvků. Kolik prvků mají množiny M_1, M_2? (Úloha má více řešení.)

b) Množiny M_1, M_2 mají společné právě dva prvky. Kartézský součin $M_1 \times M_2$ má 24 prvků. Kolik prvků má každá z množin? (Úloha má více řešení.)

7. Mezi čtyři pracující A, B, C, D mají být rozděleny čtyři poukazy na rekreaci: do Tater, do Krkonoš, do Beskyd, na Šumavu. Kolik je možných způsobů rozdělení? Jak je vyčtete z následující tabulky? Vypište všechny způsoby rozdělení, při nichž A jede do Krkonoš.

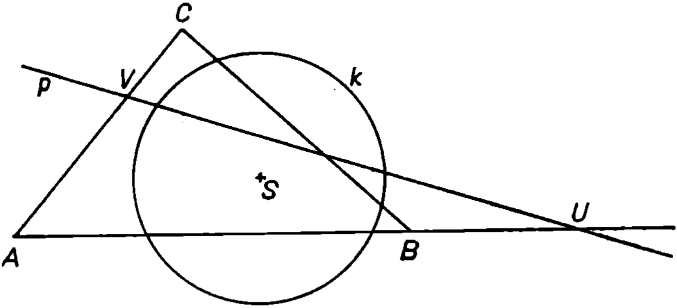
Místo / Pracující	Tatry	Krkonoše	Beskydy	Šumava
A				
B				
C				
D				

8. Zvolte kartézskou soustavu souřadnic.

a) Zobrazte body $A = [-1 \mid 0]$, $B = [1 \mid 2]$, $C = [0 \mid 4]$, $D = [4 \mid 0]$.

b) Sestrojte všechny přímky určené body A, B, C, D. Kolik jich bude?

c) Označte průsečíky narýsovaných přímek a určete jejich kartézské souřadnice.



Obr. 91

9. a) Rýsujte přibližně podle obrázku 91.

b) Na jiném listě papíru narýsujte znovu tento obrázek tak, aby útvary měly na vašich obrázcích touž velikost i vzájemnou polohu.

Návod: Použijte soustavy souřadnic. Za kladnou poloosu x zvolte polopřímku $\overrightarrow{AB}$. Změřením zjistěte souřadnice bodů B, C, S, U. Nyní už dovedete obrázek narýsovat.

10. Množina $M = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$. A_4 je množina všech násobků čísla 4, které patří množině M. Podobně definujeme množiny A_5, A_7.

a) Udejte množiny A_4, A_5, A_7 výčtem prvků.

b) Doplňte tabulku:

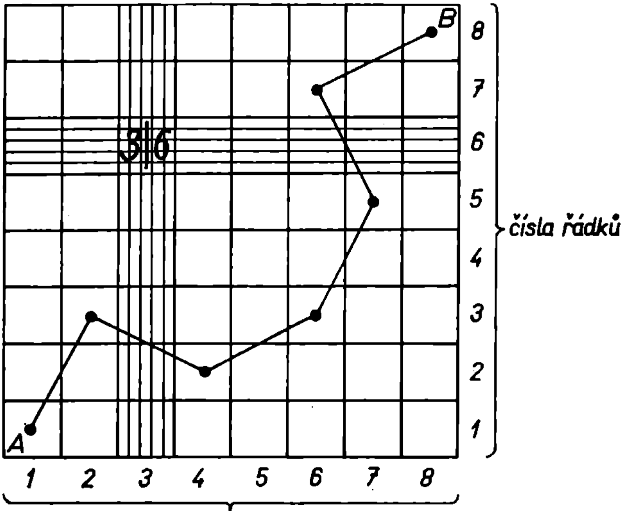
množina	$M \times A_4$	$A_4 \times A_5$	$A_5 \times A_5$	$A_7 \times A_4$
počet prvků				

Výsledky odůvodněte!

11. Na obrázku 92 je šachovnice bez vyznačených černých polí. Pole, které je ve 3. sloupci a v 4. řádku, označíme

[3 | 4].

číslo sloupce číslo řádku



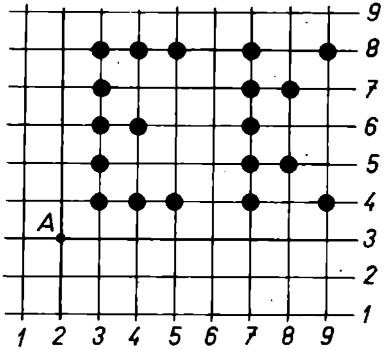
Obr. 92

a) Zapište tímto způsobem pole, které prošel jezdec z pole A na pole B:
[1 | 1], [2 | 3], [4 | 2], ...

b) Na šachovnici postavte 4 dámy na pole: [1 | 3], [4 | 4], [5 | 5], [6 | 8]. Sami najděte polohu páté dámy tak, aby všechna volná pole byla napadena aspoň jednou dámou. Její poloha je [|]. Doplňte.

12. Na obrázku 93 je čtvercová síť, jejíž přímky jsou očíslovány. Bod A je průsečík svislé přímky č. 2 a vodorovné přímky č. 3. Zapíšeme jej pomocí kartézských souřadnic [2 | 3].

a) Zapište tímto způsobem všechny body tvořící písmena E, K. Např.:
E: $[3 \mid 4]$, $[3 \mid 5]$, ...



Obr. 93

b) Zapište obdobně další písmena a dejte je přečíst svým kamarádům.

13. Znázorněte množiny bodů

a) $\boldsymbol{P} = \{Z \mid Z = [x \mid 2x]\}$,

b) $\boldsymbol{R} = \{Y \mid Y = [2x \mid x]\}$,

kde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jakou polohu mají body těchto množin?

14. Z kosmické lodi je možno vyslat signály: a, b, c, d, e. Při příjmu nelze některé dvojice signálů bezpečně odlišit. Viz levou část tabulky:

vysláno	možnosti příjmu	vysláno	možnosti příjmu
a	a, b	aa	
b	b, c	bc	
c	c, d	ce	
d	d, e	db	
e	e, a	ed	

d) Doplňte pravou část tabulky.

b) Budou-li vysílána pouze „slova“ *aa*, *bc*, *ce*, *db*, *ed*, lze je při příjmu bezpečně rozeznat. Přesvědčte se o tom!

15. Obměňte úlohu 14 pro jiný počet vysílaných signálů. Hledejte maximální počet „slov“ složených ze dvou písmen, která lze při příjmu odlišit.

16. Určete všechny obdélníky a čtverce s celočíselnými rozměry, jejichž obsah a obvod je vyjádřen týmž číslem.

3.5. Kartézský součin tří množin

USPOŘÁDANÁ TROJICE je trojice předmětů (prvků), kde záleží na tom, který předmět (prvek) je první, který druhý a který třetí.

PŘÍKLADY

a) Uspořádaná trojice JAN — JIŘÍ — JOSEF je jiná, než uspořádaná trojice JIŘÍ — JOSEF — JAN.

b) Ze dvou různých prvků, např. 1, 2 můžeme utvořit uspořádané trojice: 111, 112, 121, 211, 221, 212, 122, 222.

c) Z jediného předmětu můžeme utvořit jedinou uspořádanou trojici, v níž se tento předmět opakuje; např. *AAA*.

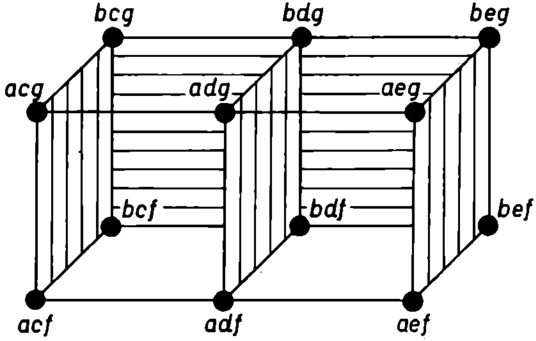
KARTÉZSKÝ SOUČIN

tří množin $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c, d, e\}$, $M_3 = \{f, g\}$ je množina uspořádaných trojic: *acf*, *acg*, *adf*, *adg*, *aef*, *aeg*, *bcf*, *bcg*, *bdf*, *bdg*, *bef*, *beg*.

Zapisujeme:

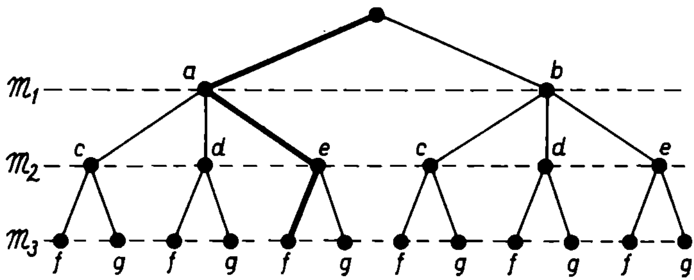
$$M_1 \times M_2 \times M_3 = \{acf,\ acg,\ adf,\ \ldots,\ bef,\ beg\}.$$

Říkáme, že ***tvoříme kartézský součin*** množin M_1, M_2 M_3, nebo že množiny M_1, M_2, M_3 ***kartézsky násobíme***. Kartézský součin tří množin můžeme znázornit pomocí prostorového schématu na obrázku 94. (Například



Obr. 94

uspořádané trojice, které mají na 1. místě písmeno „*a*“ jsou znázorněny v přední průčelní rovině; uspořádané trojice, které mají na 2. místě písmeno „*c*“ jsou znázor-



Obr. 95

něny v levé boční rovině, atd.). Nebo pomocí „klesajících cest" ve stromu logických možností (obr. 95, kde je tlustou „cestou" vyznačena uspořádaná trojice *aef*).

PŘÍKLAD

Máme utvořit všechna trojciferná čísla, pro která platí: jednotky 2. řádu udává některá z číslic 2, 4, 8; jednotky 1. řádu udává některá z číslic 0, 1; jednotky 0. řádu udává některá z číslic 0, 2, 7.

Hledaná čísla jsou prvky kartézského součinu množin $\boldsymbol{A}_2 = \{2, 4, 8\}$, $\boldsymbol{A}_1 = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{A}_0 = \{1, 2, 7\}$.

$$\boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_0 = \{201, 202, 207, 211, 212, 217, \\ 401, 402, 407, 411, 412, 417, \\ 801, 802, 807, 811, 812, 817\}.$$

Pozor, nesmíme zaměnit kartézský součin $\boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_0$ např. s kartézským součinem $\boldsymbol{A}_0 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$.

Pro konečné množiny platí:

Množina	Počet prvků	Např. (viz obr. 95)
$\boldsymbol{M}_1$	n_1	$n_1 = 2$
$\boldsymbol{M}_2$	n_2	$n_2 = 3$
$\boldsymbol{M}_3$	n_3	$n_3 = 2$
$\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M}_3$	$n_1 . n_2 . n_3$	$n_1 . n_2 . n_3 = 12$

Pamatujte názvy:

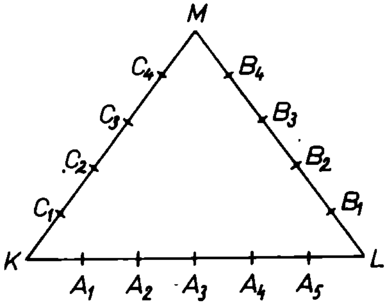
kartézský součin tří množin,
uspořádaná trojice.

CVIČENÍ

1. Sazebník pro dopravu balíků rozlišuje tři pásma vzdáleností: I (do 50 km), II (51 až 100 km), III (přes 100 km); dále tři třídy podle váhy: L (do 5 kg), S (od 5 do 10 kg), T (od 10 do 15 kg); těžší balíky se nedopravují. Mimo to lze balík poslat obyčejně (o) nebo s pojištěním (p).

a) Vypište všechny možnosti do dvou tabulek: jednu pro o, druhou pro p.

b) Vypište všechny možnosti do tří tabulek: jednu pro I., druhou pro II, třetí pro III.



Obr. 96

2. Rýsujte podle obrázku 96 (každé dva sousední body na obvodu rovnoramenného trojúhelníka KLM mají vzdálenost 1 cm). Označte: $\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, $\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$,

a) Udejte počet trojúhelníků $\triangle XYZ$, kde $X \in \boldsymbol{A}$, $Y \in \boldsymbol{B}$, $Z \in \boldsymbol{C}$.

b) Pokuste se mezi těmito trojúhelníky najít ten, který má největší (nejmenší) délku obvodu.

c) Řešte obdobnou úlohu jako je úloha **b)** pro obsah.

3. a) Všimněte si tabulky:

$$\begin{array}{llllllllllll}
5 & & 8 & & 1 \\
 & 3 & & 7 & & 4 \\
 & & 4 & & 3 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 3 \\
 & & & & 1 & & 1 & & 2 \\
 & & & & & 0 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 0 & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & 0
\end{array}$$

$(3 = 8 - 5,\ 7 = 8 - 1,\ 4 = 5 - 1)$

atd.

Najděte klíč k sestavení tabulky. Vysvětlete, proč se v tabulce vyskytují od 6 řádku jen trojice 011, 101, 110.

b) Tabulka z úlohy **3. a)** je určena prvkem $581 \in M \times M \times M$, kde $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Opakujte úlohu pro jiné prvky kartézského součinu $M \times M \times M$. Vždy vám na jednom místě vznikne řádek tvaru $dd0$. Přesvědčte se.

4. Kartézský součin $M_1 \times M_2 \times M_3$ má celkem 12 prvků. Udejte všechny možnosti pro počty prvků množin M_1, M_2, M_3. Výsledky zapisujte do tabulky.

5. Házíme třemi hracími kostkami (pokus P).

a) Určete počet možných výsledků pokusu P.

b) Určete pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka.

c) Určete pravděpodobnost, že padnou všechna sudá čísla.

6. Zvolíme libovolně prvek z množiny $M_1 \times M_2 \times M_3$, kde $M_1 = \{k, n, p\}$, $M_2 = \{o, a, e\}$, $M_3 = \{s, t, l\}$.
Jaká je pravděpodobnost, že tento prvek značí české slovo?

7. Pokuste se najít aspoň dva kvádry s celočíselnými rozměry, jejichž objem i povrch jsou vyjádřeny týmž číslem.

3.6. Variace

Zatím jsme kartézsky násobili dvě nebo tři množiny. Podobně můžeme ***kartézsky násobit*** i ***více množin***.

PŘÍKLADY

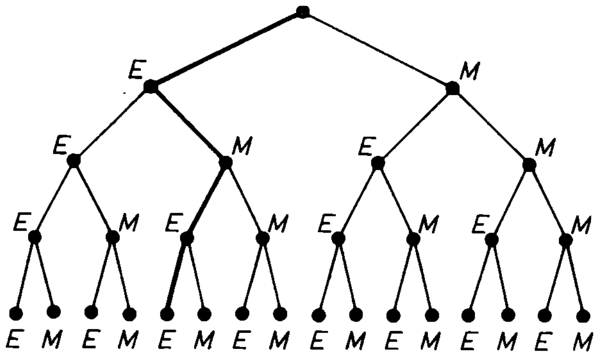
a) Množina $\boldsymbol{M} = \{E, M\}$. Kartézský součin čtyř množin:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$$

je množina všech uspořádaných čtveřic

EEEE	*MEEE*	*EMME*	*MEMM*
EEEM	*EEMM*	*MEME*	*MMEM*
EEME	*EMEM*	*MMEE*	*MMME*
EMEE	*MEEM*	*EMMM*	*MMMM*

Můžeme je opět znázornit jako „klesající cesty" ve stromu logických možností (obr. 97, kde tlustě vytažená cesta značí čtveřici *EMEE*).



Obr. 97

b) $\boldsymbol{M}_1 = \{A\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{B, C, D, E, H, K, J, L, M\}$, $\boldsymbol{M} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Kartézský součin šesti množin:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$$

se skládá ze všech „starých“ evidenčních značek pražských automobilů. Například číslo

$$AL\ 19\ 86 \in \boldsymbol{L}\,.$$

Z historických důvodů se prvky kartézského součinu

$$\underbrace{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \ldots \times \boldsymbol{M}}_{k\text{-krát}}$$

(**M** je neprázdná množina) nazývají

k — ČLENNÉ VARIACE (MNOŽINY M)

jsou to uspořádané k-tice prvků z množiny **M**.

Počet prvků kartézského součinu lze snadno vypočítat:

Množina	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	...	M_k	$M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5 \times \ldots \times M_k$
Počet prvků	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...	n_k	$n_1 . n_2 . n_3 . n_4 . n_5 \ldots n_k$
Příklad	2	3	2	2				$2.3.2.2 = 24$

Ověřte si správnost výsledku pro příklad z posledního řádku tabulky (jde o kartézský součin 4 množin) pomocí stromu logických možností.

Speciálně pro počet variací dostáváme:

*Z množiny **M**, která má n prvků lze vytvořit celkem*

$$\underbrace{n . n . n . \ldots . n}_{k\text{-krát}} = n^k$$

k-členných variací.

Viz příklad a) na str. 134, kde $n = 2$, $k = 4$.

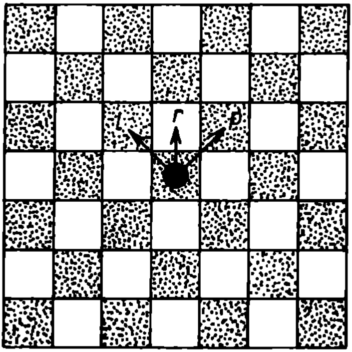
Počet variací je dán číslem

$$\underbrace{2.2.2.2}_{4\text{-krát}} = 2^4 = 16\,.$$

Pamatujte názvy: uspořádaná k-tice,
variace množiny,
k-členná variace množiny.

PŘÍKLAD

a) Král stojí na prostředním poli zmenšené šachovnice o 7 × 7 polích (obr. 98). Třemi tahy se může dostat na poslední řadu. Máme zjistit kolika způsoby to lze provést.



Obr. 98

Tahy krále mohou být pouze trojího druhu: l = vlevo po úhlopříčce, p = vpravo po úhlopříčce, r = po sloupci.

Každé přemístění lze charakterizovat jedinou tříčlennou variací množiny $M = \{l, p, r\}$. Všech variací je

$$3.3.3 = 3^3 = 27$$

b) Dále máme zjistit s jakou pravděpodobností dorazí král při náhodném výběru tří tahů z množiny M na bílé pole poslední řady.

V tom případě je přemístění charakterizováno takovými variacemi, které obsahují buď jeden nebo tři členy „r“. To jsou variace:

rll	*lrl*	*llr*	*rrr*
rlp	*lrp*	*lpr*	
rpl	*prl*	*plr*	
rpp	*prp*	*ppr*	

Požadovaný jev může nastat ve 13 případech. Hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{13}{27} \doteq 0{,}48 = 48\ \% \, .$$

CVIČENÍ

1. V šatníku je 5 košil, 2 vázanky, troje kalhoty a dvě saka. Zjistěte kolika způsoby si můžete tyto čtyři součásti oblečení zvolit.

2. Řešte úlohu z **PŘÍKLADU** b) na str. 137 užitím statistické pravděpodobnosti. Abyste zaručili náhodnou volbu tahů postupujte takto: Házejte hrací kostkou a určete tahy předpisem:

$$1{,}2 \rightarrow l, \quad 3{,}4 \rightarrow p, \quad 5{,}6 \rightarrow r \, .$$

3. Na třech hranách vycházejících z jednoho vrcholu krychle zvolte po třech bodech.

a) Kolik rovin je určeno těmito devíti body?

b) Každé dvě z těchto rovin se protínají nejvýše v jedné přímce, tzv. průsečnici. Kolik vznikne maximálně průsečnic?

4. Čísla 32 623, 427 724 nazveme symetrická. Označte:
c_n ... počet všech n-ciferných čísel ($n = 1, 2, \ldots$)
s_n ... počet všech n-ciferných symetrických čísel ($n = 1, 2, \ldots$).
a) Doplňte tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7
c_n	9	90					
s_n	9	9					

b) Najděte a dokažte vzorce pro výpočet c_n a s_n.
c) Napíšete libovolné 5-ciferné číslo. S jakou pravděpodobností můžete očekávat, že toto číslo bude symetrické?

5. a) Na každém z pěti letišť A, B, C, D, E startuje jistého dne v 8 hodin ráno jedno letadlo. Po ukončení denního provozu ve 22 hodin je opět každé letadlo na některém z uvedených letišť. Na některých letištích může být i více letadel, dokonce na určitém letišti mohou být všechna letadla. Kolik je celkem možností?
b) Řešte tutéž úlohu pro jiné počty letišť.

6. Z kosmické lodi se vysílají dva signály: 0, 1. Pro předání zpráv se užívá kódu:

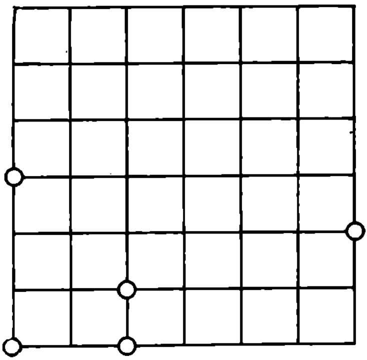
A = 1111 1111
B = 1110 1000
C = 1011 0100
E = 1001 1010
I = 1000 1101
J = 1100 0110
K = 1010 0011
L = 1101 0001
M = 0000 0000
O = 0001 0111
P = 0100 1011
R = 0110 0101
S = 0111 0010
T = 0011 1001
U = 0101 1100
V = 0010 1110

Důležitou vlastností tohoto kódu je, že odstraňuje chyby, které vzniknou při přejímání zpráv. Jestliže byl jeden z osmi signálů určujících libovolné písmeno zachycen chybně, lze písmeno přesto jednoznačně stanovit. Například:

přejatý signál	1100 0010	0111 1100	0010 1111
vyslaný signál	1100 0110	0101 1100	0010 1110

a) Přesvědčte se o této vlastnosti pro písmena C, E, U.
b) Dešifrujte zprávu:

01100001	01011110	01000000	11110100	11111111
11001110	01110000	00000111	00101111	11101111
01011011	11001101	01110010	00111001	00000111
11110001	10100011	11111110		



Obr. 99

7. Mezi 49 vrcholy čtvercové sítě z obrázku 99 lze nalézt nejvýše 7 bodů tak, že každé dva mají různou vzdálenost. Na obrázku 99 je znázorněno pět bodů. Máte najít polohu dalších dvou bodů tak, aby vznikla skupina 7 bodů uvedené vlastnosti.

3.7. Prosté variace

Jestliže má k-členná variace

$$a_1a_2a_3\ldots a_k$$

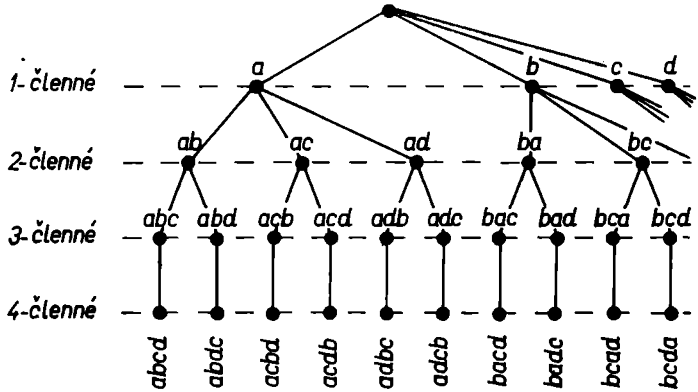
množiny M vesměs různé členy, nazývá se

PROSTOU (k-člennou) VARIACÍ

někdy též ***variací bez opakování.***

PŘÍKLAD

Všechny prosté variace množiny $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$ můžeme sestrojit pomocí stromu logických možností. Na obrázku 100 je znázorněna jeho část; chybějící část si sami snadno doplníte.



Obr. 100

> *Pro* $1 \leq k \leq n$ *lze z množiny* $\boldsymbol{M}$ *o* n *prvcích sestavit celkem* $\underbrace{n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1)}_{k\text{-činitelů}}$
>
> *prostých k-členných variací.*

Toto tvrzení si ověříme na příkladech:

PŘÍKLADY

a) Množina $\boldsymbol{M} = \{r, s, t\}$, počet jejich prvků je $n = 3$.

	1-členné	2-členné	3-členné
prosté variace	r, s, t	$sr, rt, rs,$ st, tr, ts	$rst, rts, srt,$ str, trs, tsr
počet	3	$3.2 = 6$	$3.2.1 = 6$

b) Počet n-členných prostých variací množiny $\boldsymbol{M}$ o n-prvcích je dán tabulkou

n	2	3	4	5	6	...
výpočet	2.1	3.2.1	4.3.2.1	5.4.3.2.1	6.5.4.3.2.1	...
výsledek	2	6	24	120	720	...

Číslo $n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2.1$ zapisujeme obvykle

$$\boxed{n!}$$

čteme „n ***faktoriál***“.

Uvedeme tabulku faktoriálů čísel 1, 2, ..., 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Pamatujte název a označení:

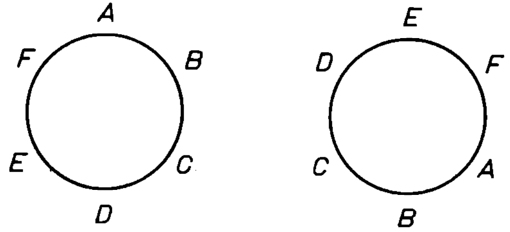
prostá variace;
$n!$ („n faktoriál“).

CVIČENÍ

1. Kolem kulatého stolu zasedne 6 přátel.

a) Kolik je možných rozmístění přátel kolem stolu?

b) Kolik je možných různých rozmístění, jestliže nerozlišujeme takové dvě rozmístění, z nichž jedno vznikne z druhého otočením. Např. nerozlišujeme rozmístění znázorněná na obr. 101.



Obr. 101

2. Házíme hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou kostkou padne vždy jiný počet ok?

3. Zítra ke mně přijde pět přátel: Jan, Karel, Jiří, Vlastík, Zbyněk. Předpokládám, že žádní dva nepřijdou současně, a že všechna pořadí jsou stejně pravděpodobná.

a) Jaká je pravděpodobnost, že Jan přijde první a Zbyněk poslední?

b) Vypočítejte pravděpodobnost, že Jan přijde dříve než Zbyněk.

4. Na šachovnici se má rozmístit 8 věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly (tzn. v každém sloupci a v každé řadě musí být právě jedna věž).

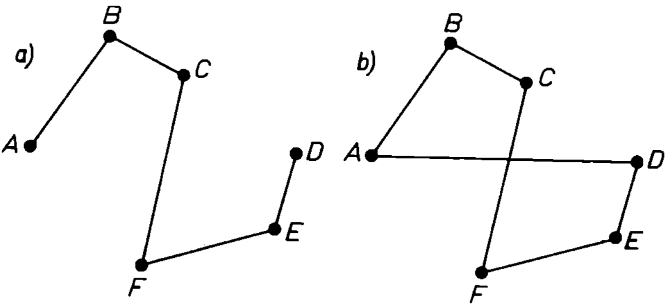
a) Kolik je možných rozmístění?

b) Jaká je pravděpodobnost, že při takovém rozmístění budou stát všechny věže pouze na černých polích?

5. V rovině si zvolte 6 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce.

a) Kolik lomených čar, které mají vrcholy v těchto bodech, lze celkem sestrojit? Rozlište případ uzavřených a otevřených lomených čar. Viz obrázek 102 ab.

b) Snažte se narýsovat mezi těmito čarami tu nejkratší (červeně) a tu nejdelší (modře).



Obr. 102a,b

6. Problém knihaře: Při vazbě knih je třeba použít dvou strojů A, B. Každá kniha musí být nejdříve zpracována strojem A, teprve pak může být vložena do stroje B. Má se provést vazba tří knih; doba zpracování na jednotlivých strojích je v minutách udána tabulkou:

kniha	1	2	3
A	40	20	50
B	25	35	30

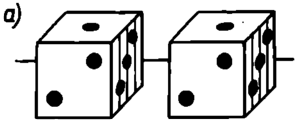
a) V jakém pořadí je třeba knihy zpracovat, aby doba od zahájení práce stroje A do skončení práce stroje B byla co nejkratší.

b) Obměňte a sami řešte problém knihaře pro případ čtyř knih.

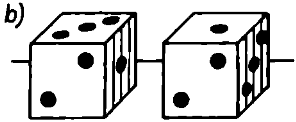
7. Na pramičku se vejdou tři osoby. Ve společnosti je 7 lidí: *A, B, C, D, E, F, G*. Uskutečnilo se celkem 7 projížděk; přitom každé dvě osoby jely spolu právě jednou. Doplňte v seznamu chybějící projížďky:

$$ABC, ADE, AFG, BDF\ .$$

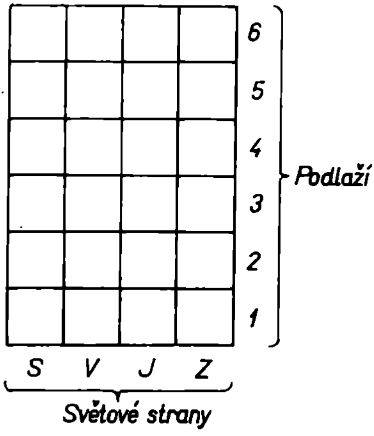
8. (Problémová úloha.) Správná hrací kostka má vždy součet ok na dvou protějších stěnách rovný sedmi. Dvě kostky považujeme za stejné, jestliže je lze přemístit tak, že na stěnách obrácených ve stejném směru mají týž počet ok. Např. jsou-li kostky znázorněné na obrázku 103a,b správné, pak vlevo jsou stejné, vpravo různé.



Obr. 103a



Obr. 103b



Obr. 104

a) Kolik je různých správných kostek?

b) Kolik je různých — správných i nesprávných hracích kostek?

9. (Problémová úloha, pokračování) a) Ze šesti správných, úplně stejných, hracích kostek postavte „šestipodlažní" magickou věž těchto vlastností:

(1) na každé světové straně mají různá podlaží různé počty ok.

(2) Počty ok na dolních stěnách udávají číslo podlaží (tzn. na dolních stěnách kostek jsou od zdola čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Popis věže zapište do „plánu" na obrázku 104.

b) Určete kolik magických věží lze postavit. Přitom nerozlišujeme dvě věže, které lze otočením ztotožnit.

10. V závodě soutěžili žáci A, B, C, D, E. Kdosi předpověděl pořadí žáků A, B, C, D, E. Ukázalo se, že neuhádl umístění ani jednoho žáka, ani pořadí žádných dvou po sobě následujících žáků. Někdo jiný předvídal pořadí D, A, E, C, B a uhádl tak správně umístění právě dvou žáků a zároveň dvě dvojice po sobě jdoucích žáků. Máte určit správné pořadí.