4. Kapitola

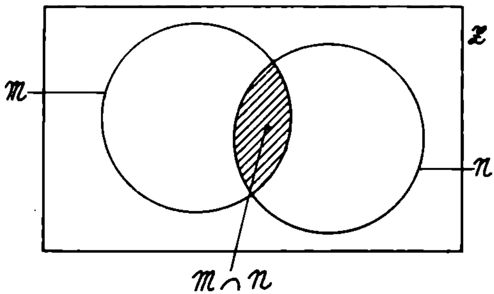
UČÍME SE POČÍTAT S MNOŽINAMI

4.1. Průnik množin

Všecky prvky množiny M, které náleží množině N, tvoří množinu, kterou nazýváme

PRŮNIK MNOŽINY M S MNOŽINOU N.

Zapisujeme jej $M \cap N$.



Obr. 105

Je zřejmé, že průnik množiny N s množinou M, tj. množina $N \cap M$ je táž jako $M \cap N$.

Můžeme tedy říci, že společné prvky množin M, N tvoří množinu zvanou jednoduše

PRŮNIK MNOŽIN M, N;

označujeme ji $M \cap N$ nebo $N \cap M$.

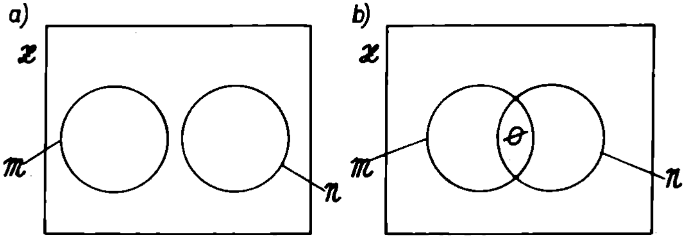
Nemají-li množiny M, N žádný společný prvek, je jejich průnik množina prázdná, což zapisujeme

$$M \cap N = \varnothing .$$

Je-li $M \cap N = \varnothing$, nazývají se množiny M, N

DISJUNKTNÍ.

Vennův diagram pro disjunktní množiny lze nakreslit dvojím způsobem (obr. 106a, b).



Obr. 106a,b

PŘÍKLADY

1. Průnik množin M a N snadno určíme v tabulce:

Z	2	3	4	7	9	15	16	21	25	30
M	/	/	—	/	/	/	—	—	—	—
N	—	—	/	/	/	—	/	/	—	/
$M \cap N$	—	—	—	/	/	—	—	—	—	—

2. $\boldsymbol{A}$ je množina všech nezáporných násobků čísla 3; $\boldsymbol{A} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$.

$\boldsymbol{B}$ je množina všech nezáporných násobků čísla 4; $\boldsymbol{B} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\}$.

Pozor! Nula je násobkem čísla 3 i čísla 4.

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ je množina všech nezáporných čísel, která jsou zároveň násobky čísla 3 i čísla 4, tj. která jsou násobky čísla 12;

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}.$$

3. $\boldsymbol{U}$ je množina všech celých čísel menších než 30, $\boldsymbol{V}$ je množina všech přirozených čísel větších než 29.

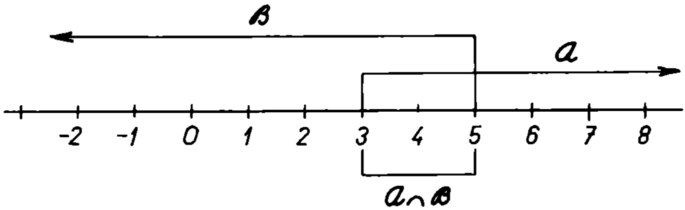
$$\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} = \varnothing .$$

4. $\boldsymbol{Z}$ je množina všech celých čísel.

$$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x > 2\},\ \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \leqq 5\}$$

Průnik (viz obr. 107):

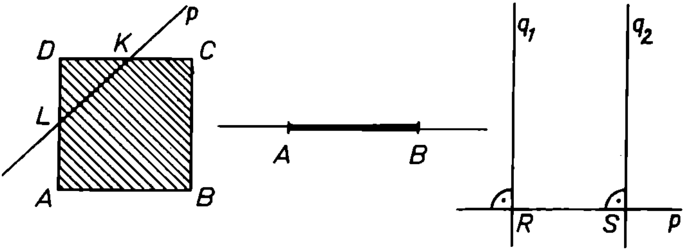
$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x > 2 \textbf{ a zároveň } x \leqq 5\} =$$
$$= \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 2 < x \leqq 5\} = \{3, 4, 5\}.$$



Obr. 107

Na obrázku 108 je průnik čtverce $ABCD$ s přímkou p úsečka KL. Označíme-li **C** čtverce $ABCD$, je

$$\mathbf{C} \cap p = KL\,.$$



Obr. 108

Na témž obrázku je průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ úsečka AB.

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB\,.$$

Na témž obrázku: Dvě kolmice q_1, q_2 k téže přímce p nemají společný bod i když je libovolně prodloužíme.

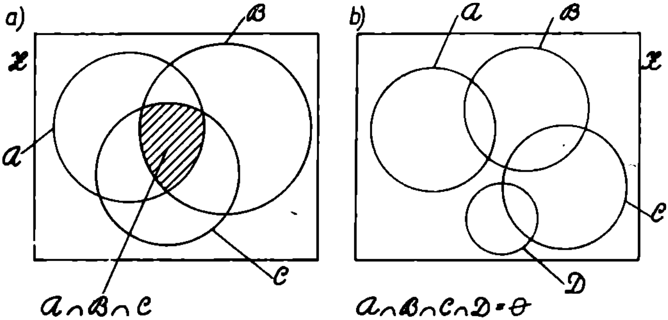
$$q_1 \cap q_2 = \emptyset\,.$$

Přímky q_1, q_2 jsou disjunktní množiny bodů.

Průniky přímek p, q_1 i p, q_2 jsou opět množiny (jednoprvkové), nikoliv body. Proto píšeme

$$p \cap q_1 = \{R\}, \quad p \cap q_2 = \{S\}\,.$$

Můžeme určit ***průnik*** i ***více než dvou množin***. Obr. 109a, b.



Obr. 109a,b

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{A}$ je množina všech sudých nezáporných čísel:

$$\boldsymbol{A} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

$\boldsymbol{B}$ je množina všech celých čísel menších než 9:

$$\boldsymbol{A} = \{x \text{ je celé} \mid x < 9\}.$$

$\boldsymbol{C}$ je udána výčtem:

$$\boldsymbol{C} = \{0, 3, 12, 4, 6\}.$$

Průnik:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \{0, 4, 6\}.$$

Přesvědčte se, že

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}$$

Pamatujte název a označení:

Průnik množin,

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}.$$

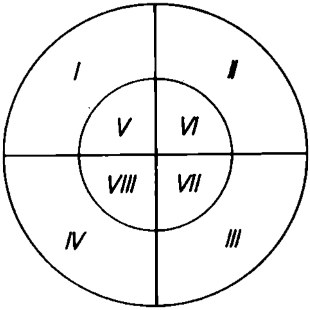
CVIČENÍ

1. Sportovní škola. Z určitých 100 žáků vaší školy je 95 plavců, 85 lyžařů a 60 fotbalistů.

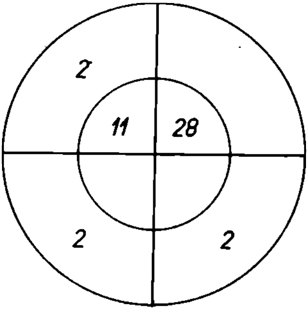
V diagramu na obrázku 110 značí horní půlkruh množinu všech plavců, dolní půlkruh množinu všech neplavců, pravý půlkruh množinu všech lyžařů, levý půlkruh množinu všech nelyžařů. Menší kruh značí množinu těch, kdo nehrají kopanou, mezikruží značí množinu fotbalistů.

a) Popište, jaké množiny jsou znázorněny částmi, označenými římskými číslicemi I až VIII. (Např. III jsou neplavci, kteří lyžují a hrají kopanou.)

b) Na obrázku 111 je nakreslen týž diagram; v některých částech jsou vepsána čísla, která značí počty jednotlivých množin. Doplňte zbývající části.



Obr. 110



Obr. 111

2. Zapište:

a) Prvek x nenáleží průniku množin M, N.
b) Průnik množin A_1, A_2 je podmnožinou M.
c) Množiny C, D jsou disjunktní.
d) Množina A obsahuje průnik množin M, N.

3. Rozhodněte zda pro libovolné množiny platí:

a) $M \cap N \subset M$;
b) $M \cap M \subset M$;
c) $M \cap A \subset M \cap B$, když $A \subset B$.

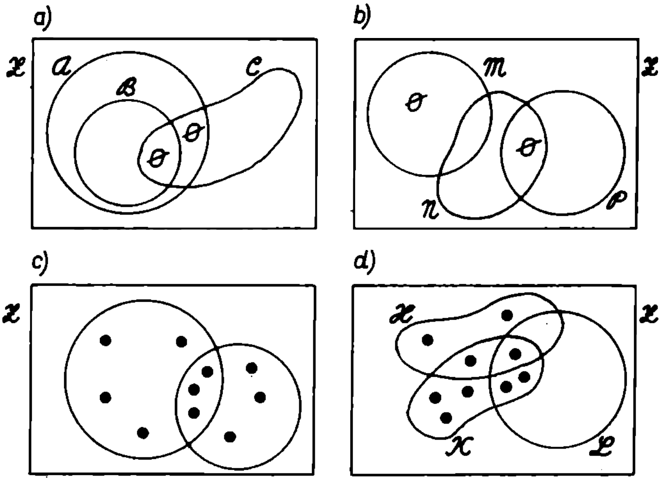
Uveďte příklady číselných množin.

4. Udejte výčtem a zapište průnik množin;
M je množina všech kladných sudých čísel menších než 1 000.
N je množina kladných celých čísel, která mají ciferný součet 3.

5. Narýsujte čtverec $ABCD$. Na polopřímku $\overrightarrow{AB}$ naneste postupně dvakrát úsečku AB; dostanete tak mimo bod B ještě bod E. Určete a zapište průniky:

a) $AB \cap BC$, b) $AD \cap BC$, c) $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AC}$, d) $\overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{BC}$,
e) $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{DE}$ (označte jej I).

6. Zapište, co vidíte na Vennových diagramech z obrázku 112. V obrázcích c), d) značí tečky všechny prvky množin.

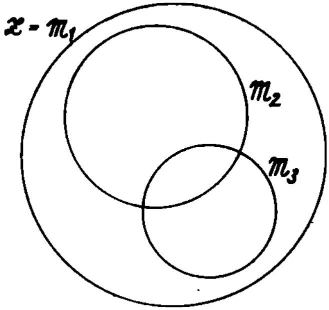


Obr. 112

7. Do náčrtku nakresleného podle obrázku 113 zapište, které části roviny znázorňují průniky:

a) $M_1 \cap M_2$, b) $M_1 \cap M_3$, c) $M_2 \cap M_3$, d) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3$.

8. Chodba má půdorys naznačený na obrázku 114; je to obrazec složený ze dvou čtverců $ABCD$, $BEFG$; čísla udávají délky v metrech.

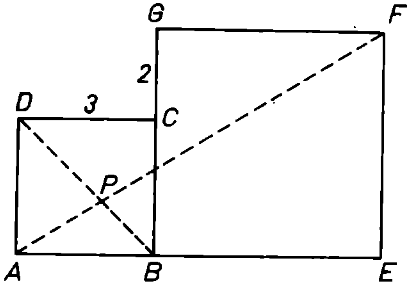


Obr. 113

a) Narýsujte obrazec; čísla pokládejte za délky v centimetrech.

b) Vyšrafujte v půdoryse část chodby, kterou nevidí člověk stojící v místě P; $\{P\} = AF \cap BD$.

c) Ohraničte tlustou čarou tu část půdorysu chodby, z jejíhož každého místa vidí pozorovatel celou chodbu.



Obr. 114

9. Které množiny mohou být průnikem dvou trojúhelníků? (Je 7 možností — načrtněte je!)

10. Zvolte čtyři body A, B, C, D tak, aby žádné tři neležely v přímce. Které množiny mohou být průnikem trojúhelníků

a) $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$;
b) $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$.

11. a) Kolik je čísel, která jsou větší než 95 a menší nebo rovna 227?

b) Kolik je čísel, která jsou větší nebo rovna 187 a menší nebo rovna 348?

c) Kolik je čísel, která jsou větší nebo rovna 111 a menší než 445?

d) Kolik je čísel, která jsou větší než 715 a menší než 1032?

Ve všech čtyřech úlohách vyjádřete výsledek pomocí rozdílu daných dvou čísel.

12. Kolik je čísel větších než a a menších nebo rovných číslu b? Zkuste nejprve pro určitá čísla a, b, např. $a = 11$, $b = 37$, nebo $a = 9$, $b = 24$ apod. Pak zapište výsledek písmeny.

13. a) Kůň na šachovnici má být přemístěn z pole $b2$ na pole $g6$. Udejte čtyři různé cesty a porovnejte jejich délky. (Délka cesty je počet tahů, které musí kůň při přemístění vykonat.)

b) Dovedete najít dvě cesty, z nichž jedna bude delší o 1 tah než druhá?

14. Udejte, který útvar je průnikem následujících dvou geometrických útvarů:

a) Čtverec a přímka.
b) Kružnice a úsečka.
c) Kruh a přímka.

Ve všech případech jsou tři možnosti — načrtněte je.

15. Množina $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Jsou dány dva rozklady množiny $\boldsymbol{Z}$:

Rozklad $\boldsymbol{R}_1$ má třídy:

$\{1, 2, \ldots, 7\}$, $\{8, 9, \ldots, 18\}$, $\{19, 20\}$.

Rozklad R_2 má třídy:

$T_0 = \{x \in Z \mid x$ je násobek tří$\}$,
$T_1 = \{x \in Z \mid (x + 1)$ je násobek tří$\}$,
$T_2 = \{x \in Z \mid (x + 2)$ je násobek tří$\}$.

a) Sestrojte rozklad R množiny Z, který je **zjemněním** rozkladů R_1, R_2. (Rozklad R má co nejméně tříd, z nichž každá je podmnožinou některé třídy rozkladu R_1 i R_2.)

b) Dovedete předem určit, kolik má **zjemněný rozklad** R nejvýše tříd, znáte-li počty tříd rozkladů R_1 a R_2?

4.2. Sjednocení množin

Ke všem prvkům množiny M přidáme (připojíme) všecky prvky množiny N; tím dostaneme novou množinu, kterou nazýváme

SJEDNOCENÍM MNOŽINY M S MNOŽINOU N.

Mají-li množiny M, N společné prvky, počítáme je do sjednocení jen jednou. Sjednocení množin M, N zapisujeme

$$M \cup N.$$

Je zřejmé, že platí

$$M \cup N = N \cup M.$$

PŘÍKLADY

a) M je hromada jablek, N jiná hromada jablek. $M \cup N$ je hromada, která vznikne sesypáním obou prvních hromad.

b) P je množina všech žáků vaší třídy, kteří hrají na klavír; $\boldsymbol{G}$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří hrají šachy. $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{G}$ je množina všech takových žáků vaší třídy, z nichž každý ***buď*** hraje na klavír ***nebo*** hraje šachy.

Mezi příklady a), b) je tento rozdíl:

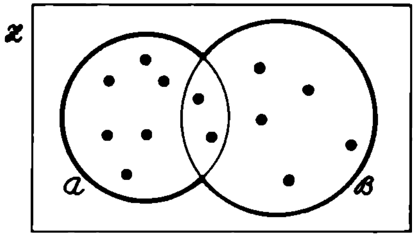
V příkladu a) je

$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} = \emptyset$ ($\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ jsou disjunktní — žádné jablko není zároveň na obou hromadách jablek.)

V příkladu b) může být

$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} \neq \emptyset$ ($\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ nejsou disjunktní — může být žák, který zároveň hraje na klavír a je šachistou.)

Množinový diagram sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ ukazuje obrázek 115. Diagram sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ je ohraničen tlustou čarou.



Obr. 115

Platí

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}),$$
$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}).$$

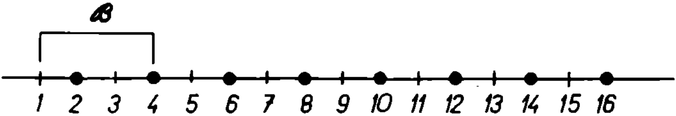
c) Sjednocení množin $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ zadaných tabulkou:

$\boldsymbol{Z}$	3	5	6	9	15	16	19	23	31
$\boldsymbol{M}$	—	/	/	—	—	—	/	/	/
$\boldsymbol{N}$	—	—	/	/	/	—	/	/	—
$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}$	—	/	/	/	/	—	/	/	/

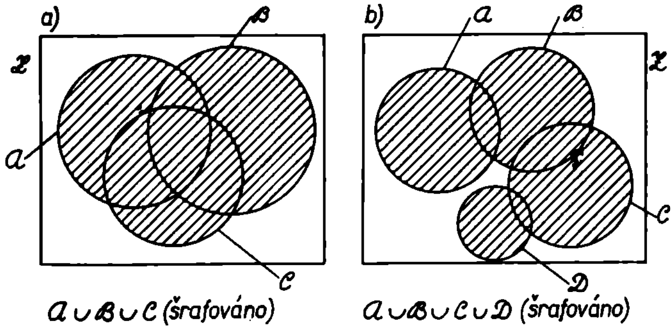
d) $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$;
$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je sudé číslo}\}$, $\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x < 5\}$.

Sjednocení (viz obr. 116):

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ je sudé číslo **nebo** $x < 5\} =$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.



Obr. 116



Obr. 117a,b

Můžeme určit sjednocení i více než dvou množin. Viz obrázek 117ab.

Pamatujte název a označení:

Sjednocení množin;

$$A \cup B, \quad A \cup B \cup C.$$

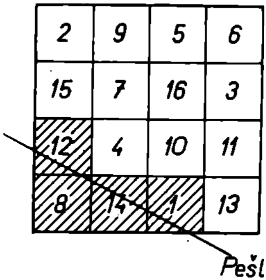
CVIČENÍ

1. N je množina všech čísel menších než 73 a větších než 50.

a) Vypište tyto podmnožiny množiny N: množinu N_3 všech násobků tří, množinu N_4 všech násobků čtyř, množinu N_5 všech násobků pěti. Znázorněte prvky těchto množin na číselné poloose; každou množinu jinou barvou.

b) Vypište množinu P všech čísel z N dělitelných dvanácti. Vypište množinu G všech čísel z N dělitelných buď třemi nebo pěti nebo třemi i pěti. Zapište, jakými výkony vzniknou množiny P, G z množin N_3, N_4, N_5.

c) Z kterých čísel se skládají množiny: $N_4 \cap N_5$, $N_4 \cup N_5$, $N_3 \cap N_4 \cap N_5$, $N_3 \cup N_4 \cup N_5$?



Obr. 118

2. Hra: Obrázek 118. Potřebujeme hrací desku, na které je velký čtverec rozdělený na 16 menších čtverců téže velikosti, do nichž jsou vepsána čísla podle náčrtu. Hráč položí přímé pravítko a narýsuje přímku tak, aby neprocházela žádným vrcholem žádného čtverce.

K přímce připíše své jméno a sečte čísla polí, kterými přímka prochází. (Např. na obrázku je součet $12 + 8 + 14 + 1 = 35$.) Vyhrává ten, kdo dosáhne největšího součtu. Pokuste se dosáhnout součtu 74.

3. a) Popište (charakteristickým znakem) množinu čísel, která vznikne sjednocením všech dvojciferných a množiny všech trojciferných čísel.

b) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech čísel jednociferných a množiny čísel menších než 20.

c) Popište množinu, která vznikne sjednocením všech čísel větších než 205 a menších nebo rovných 199.

d) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech čísel aspoň trojciferných a množiny všech čísel menších než 307.

e) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech sudých čísel a množiny všech násobků šesti.

4. Na množinovém diagramu vyznačte tři množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, průniky $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{A}$, sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{A}$, a rozhodněte, které ze zápisů platí:

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$, $\quad (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{C}$,

$\boldsymbol{A} \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$, $\quad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \subset \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{B} \subset (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$. $\quad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{C}$.

5. V síti čtverců na obrázku 119 sestrojujeme „cesty" z vrcholu S do vrcholu Z. Všechny „cesty" vedou vždy vpravo nebo nahoru. $\boldsymbol{M}$ je množina všech cest. $\boldsymbol{A}$ je množina všech cest, které jdou bodem A. Podobný význam mají množiny $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$. (Na obrázku 119 je znázorněna jedna cesta vedoucí bodem D; patří množině $\boldsymbol{D}$.)

a) Určete počty prvků všech množin $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ pomocí kombinačních čísel. Například množina $\boldsymbol{D}$ má

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{4}$$

prvků. Čísla 5 a 9 značí „délky" cest SD a DZ. Čísla 3 a 4 značí délky těch částí cest SD a DZ, které směřují vpravo.

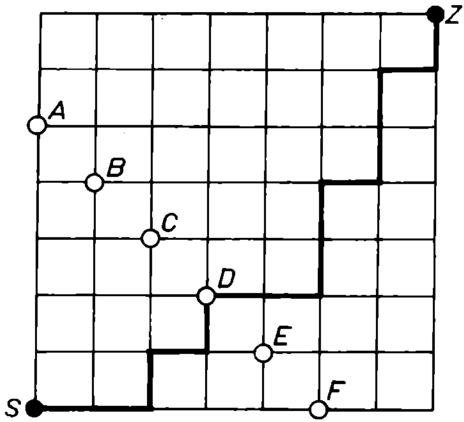
b) Odůvodněte (bez použití tabulky kombinačních čísel):

$$\binom{5}{0}\binom{9}{7} + \binom{5}{1}\binom{9}{6} + \binom{5}{2}\binom{9}{5} + \binom{5}{3}\binom{9}{4} + \binom{5}{4}\binom{9}{3} + \binom{5}{5}\binom{9}{2} = \binom{14}{7}$$

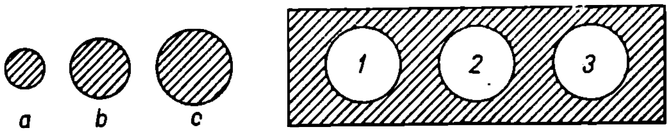
6. Vyšetřete, které množiny mohou být sjednocením dvou čtverců s rovnoběžnými stranami.

7. a) Kolika různými způsoby můžete zapsat pětiúhelník *ABCDE* jako sjednocení tří trojúhelníků!

b) Řešte obdobnou úlohu pro šestiúhelník a čtyři trojúhelníky.



Obr. 119



Obr. 120

8. Brahmínská hra. Obrázek 120. Potřebujete tři kotouče různých velikostí a podložku, na které jsou vedle sebe vyznačeny tři kruhy velikosti největšího kotouče. Na kruhu 1 jsou narovnány kotouče *a*, *b*, *c* tak, že největší z nich (*c*) je vespod a nejmenší (*a*) navrchu. Úkolem hry je přemístit kotouče z kruhu 1 na kruh 2 (nebo 3) tak, aby byl opět největší vespod a nejmenší navrchu.

Pravidla hry: I. Kotouče se musí přemisťovat jednotlivě.
II. Nikdy nesmí ležet větší kotouč na menším.

Zapište všechny tahy hry. (Např. je-li první tah přemístění kotouče *a* na kruh 2, druhý tah přemístění kotouče *b* na kruh 3, zapíšeme *a*2 — *b*3 atd.). Kolika tahy lze hru ukončit?

Opakujte hru se čtyřmi kotouči různých velikostí (při nezměněném počtu 3 kruhů). Zapište tahy a zjistěte jejich počet. Vypráví se, že indičtí mnichové hrají tuto hru se 100 kotouči a věří, že až hra skončí, nastane konec světa. Dovedeme vypočítat, že trvá-li jeden tah vteřinu, potrvá brahmínská hra se 100 kotouči asi 30 tisíc trilionů let (to je číslo o 23 cifrách).

4.3. Počet prvků sjednocení dvou množin

Pro konečné množiny označíme:

množina	A_1	A_2	$A_1 \cup A_2$	$A_1 \cap A_2$
počet prvků	n_1	n_2	s_{12}	p_{12}

Platí vzorec

$$\boxed{s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}}\;;$$

PŘÍKLADY

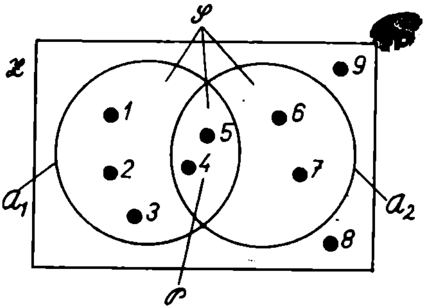
a) Množina $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{4, 5, 6, 7\}$. Základní množina Z se skládá ze všech jednociferných čísel. Viz Vennův diagram (obr. 121).

Sjednocení množin $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ je

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}\,,$$

průnik je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{P}_2 = \{4,\ 5\}\,.$$



Obr. 121

Je tedy: $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $s_{12} = 7$, $p_{12} = 2$, takže opravdu platí rovnost

$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12} \quad (\text{neboť } 7 = 5 + 4 - 2)\,.$$

Vzorec můžeme ověřit i tabulkou:

$\boldsymbol{Z}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\boldsymbol{A}_1$	/	/	/	/	/	—	—	—	—	$n_1 = 5$
$\boldsymbol{A}_2$	—	—	—	/	/	/	/	—	—	$n_2 = 4$
$\boldsymbol{S}$	/	/	/	/	/	/	/	—	—	$s_{12} = 7$
$\boldsymbol{P}$	—	—	—	/	/	—	—	—	—	$p_{12} = 2$

b) Ve třídě je 18 žáků (množina A_1), kteří mají aspoň jednoho bratra; 12 žáků (množina A_2), kteří mají aspoň jednu sestru, a konečně 23 žáci (množina $A_1 \cup A_2$), kteří mají aspoň jednoho sourozence. Kolik žáků má sestru i bratra (počet prvků množiny $A_1 \cap A_2$).

Počítáme podle známého vzorce:

$$23 = 18 + 12 - p_{12}\,,$$
$$23 = 30 - p_{12}\,,$$
$$p_{12} = 7\,.$$

Ve třídě má tedy $p_{12} = 7$ žáků sestru i bratra.

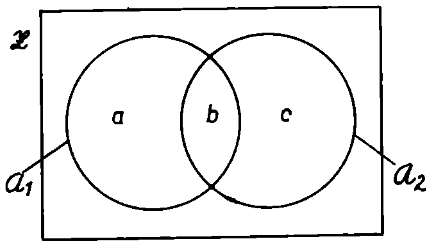
c) Je-li $n_1 = 15$, $n_2 = 29$, $p_{12} = 17$, lze podle známého vzorce vypočítat $s_{12} = 27$.

Ale nelze najít množiny A, B, pro něž je $n_1 = 15$, $n_2 = 29$, $p_{12} = 17$, $s_{12} = 27$. Tato čísla nevyhovují nerovnostem:

$$p_{12} \leqq n_1 \leqq s_{12}\,.$$
$$p_{12} \leqq n_2 \leqq s_{12}\,.$$

Poznámka. Vzorec

$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}$$



Obr. 122

lze dokázat s použitím Vennova diagramu z obr. 122 (kde malá písmena značí počty prvků).

Platí:

$$s_{12} = a + b + c, \quad n_1 = a + b, \quad n_2 = b + c, \quad p_{12} = b,$$

to znamená, že opravdu je

$$\underbrace{a + b + c}_{s_{12}} = \underbrace{a + b}_{n_1} + \underbrace{b + c}_{n_2} - \underbrace{b}_{p_{12}} .$$

Pamatujte si vzorec:

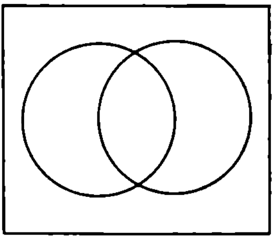
$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12},$$

CVIČENÍ

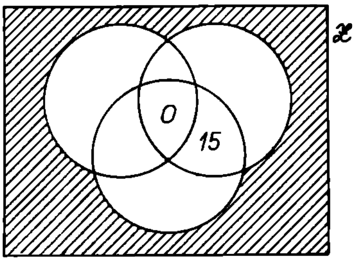
1. Každý pracující jistého závodu buď je členem kulturního kroužku nebo cvičí v závodní tělovýchově, nebo dělá obojí činnost.

a) Označte K množinu pracujících, kteří jsou členy kulturního kroužku, T množinu těch, kteří cvičí v tělovýchově. Popište množiny $K \cap T$, $K \cup T$ a označte množiny v diagramu z obrázku 123.

b) V závodě je 85 pracujících; 36 jich cvičí v závodní tělovýchově, z nich 9 jsou členové kulturního kroužku. Kolik pracujících je celkem členy kulturního kroužku? (Hledejte počet prvků množin K, T, $K \cup T$, $K \cap T$.)



Obr. 123



Obr. 124

2. L je množina všech letadel, která byla ráno jistého dne na letišti, P je množina všech letadel, která během dne přiletěla, O množina všech letadel, která během dne odletěla. Žádné letadlo nepřiletělo toho dne na letiště víckrát než jednou a také žádné letadlo neodletělo toho dne víckrát než jednou.

a) Popište množiny $P \cap O$, $L \cup P$, $O \cup P$, $L \cup O$.

b) Ráno bylo na letišti 17 letadel, z nich odletělo 15, celkem odletělo 27 letadel, celkem přiletělo 32 letadel. Kolik letadel zůstalo večer na letišti?

c) Do každé ze sedmi nevyšrafovaných částí roviny (obr. 124) vepište číslo, které značí počet letadel, která tvoří příslušnou množinu. (Dvě z čísel jsou zapsána jako příklad.)

3. Na úpravě terénu pracoval první bagr 63 dní, druhý bagr 48 dní, oba společně 29 dní. Kolik dní trvala úprava? Znázorněte diagramem.

4. Na žňové práce ve státním statku byly nasazeny dva kombajny. Celkem pracovaly 189 hodin, první pracoval 115 hodin, druhý 168 hodin. Kolik hodin pracovaly oba zároveň? Znázorněte diagramem.

5. V této úloze značí a počet prvků množiny A, b počet prvků množiny B, p počet prvků průniku $A \cap B$, s počet prvků sjednocení $A \cup B$.

a) Určete p, je-li $s = a + b$; jaké jsou množiny A, B?

b) Platí $p = s$; co lze říci o množinách A, B?

c) Platí $p = b$; co lze říci o množinách A, B?

Ve všech třech případech nakreslete diagram.

6. Podnik se skládá ze dvou oddělených závodů. V obou závodech byl proveden průzkum, kolik lidí mluví anglicky a rusky. Byly získány tyto údaje

	I.	II.
Počet všech zaměstnanců závodu	147	112
z toho znají: anglicky	55	52
rusky	83	88
anglicky i rusky	37	23

Vypočítejte kolik lidí mluví v každém závodě anglicky nebo rusky (aspoň jedním z těchto jazyků), kolik mluví jen anglicky a kolik jen rusky. (Co lze prohlásit o údajích ze závodu II?)

7. Na vesnici je 43 majitelů motorových vozidel (aut a motocyklů). Přitom auto vlastní o 12 osob více než motocykl. Kolik je ve vesnici majitelů aut?

8. V holičské provozovně stojí holení 2 Kčs a stříhání 5 Kčs. Za dopoledne bylo inkasováno 209 Kčs. Podle vydaných pokladních lístků se zjistilo, že bylo obslouženo 41 zákazníků. Kolik lidí se dalo holit a kolik stříhat? (Úloha má 8 řešení.)

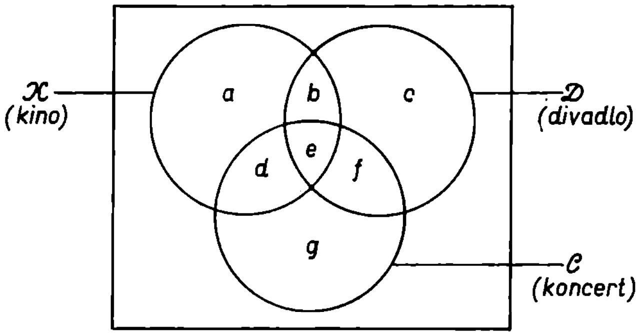
4.4. Počet prvků sjednocení tří množin

PŘÍKLAD

V jedné zprávě o průzkumu využití volného času byly uvedeny údaje: „Ze zkoumané skupiny 150 osob navštívilo alespoň jednou v měsíci nějaký kulturní podnik (tj. kino, divadlo nebo koncert) 101 osob, z toho:

kino 77 osob
divadlo 63 osoby
koncert 32 osoby
kino a divadlo 36 osob
kino a koncert 21 osob
divadlo a koncert 29 osob
kino, divadlo i koncert 15 osob"

Máme ukázat, že údaje ve zprávě jsou nepravdivé.



Obr. 125

Užijeme Vennova diagramu (obr. 125, malá písmena značí počty prvků). Můžeme postupně doplnit údaje (zapište do diagramu sami):

$e = 15$, neboť průnik množin $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{C}$ má 15 prvků;
$b = 21$, neboť průnik $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{D}$ má $b + e = 36$ prvků;
$d = 6$, neboť průnik $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{C}$ má $d + e = 21$ prvků;
$p = 14$, neboť průnik $\boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{C}$ má $p + e = 29$ prvků;
$g = -3$, neboť množina $\boldsymbol{C}$ má $d + e + p + g = 32$ prvků.

Ale g je počet lidí, kteří navštívili jen koncert a nemůže to být záporné číslo.

Pro konečné množiny užijeme označení:

Množiny	Počet prvků
A_1	n_1
A_2	n_2
A_3	n_3

Průniky množin	Počet prvků
$A_1 \cap A_2$	p_{12}
$A_1 \cap A_3$	p_{13}
$A_2 \cap A_3$	p_{23}
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	p_{123}

Sjednocení množin	Počet prvků
$A_1 \cup A_2$	s_{12}
$A_1 \cup A_3$	s_{13}
$A_2 \cup A_3$	s_{23}
$A_1 \cup A_2 \cup A_3$	s_{123}

Platí vzorce

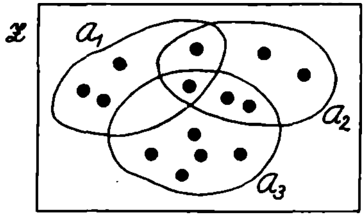
$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} + p_{123}$$

$$p_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - s_{12} - s_{13} - s_{23} + s_{123}$$

Jeden vzorec vznikne z druhého pouhou záměnou písmen p a s. Říkáme, že jsou tyto vzorce **duální**.

PŘÍKLAD

Pro množiny znázorněné Vennovým diagramem (obr. 126) platí:



Obr. 126

$$
\begin{array}{llll}
n_1 = 5\,, & p_{12} = 2\,, & s_{12} = 9\,, \\
n_2 = 6\,, & p_{13} = 1\,, & s_{13} = 12\,, \\
n_3 = 8\,, & p_{23} = 3\,, & s_{23} = 11\,, \\
 & p_{123} = 1\,, & s_{123} = 14\,.
\end{array}
$$

Ověření 1. vzorce:

$$14 = 5 + 6 + 8 - 2 - 1 - 3 + 1\,.$$

Ověření 2. vzorce:

$$1 = 5 + 6 + 8 - 9 - 12 - 11 + 14\,.$$

Poznámka. Oba vzorce pro s_{123} a p_{123} můžete ověřit podobně jako vzorec pro s_{12} na str. 163 a 164. Pokuste se o to sami.

CVIČENÍ

1. Ve městě jsou tři linky elektrické dráhy. Celková délka kolejí je 26 km. Tratě jsou dlouhé:

I . . . . . 9 km, II . . . . . 12 km, III . . . . . 13 km.
Dále je známá délka společných úseků každých dvou linek:
I, II . . . . 3 km, II, III . . . . 6 km, I, III . . . . 4 km.
Určete délku tratě společnou všem třem linkám.

2. V rodinném albu je 74 fotografií, na nichž je aspoň jeden člen rodiny (otec, matka, syn). Na 7 fotografiích jsou oba rodiče na 53 fotografiích aspoň jeden z rodičů. 17 fotografií znázorňuje oba muže a 65 alespoň jednoho z mužů. Na 5 fotografiích je zachycen jen otec a na 25 je matka se synem. Podle toho, kdo je na fotografii, můžeme rozlišit 7 druhů fotografií. Určete počty fotografií všech sedmi druhů.

3. Na vysoké škole musí každý posluchač studovat vedle vlastního oboru ještě aspoň jeden z cizích jazyků: anglický, francouzský, ruský. Údaje o posluchačích posledního ročníku jsou zachyceny tabulkou:

(a)	(b)	
23	13	. . . . angličtina
23	23	. . . . francouzština
28	36	. . . . ruština
8	4	. . . . angličtina a francouzština
11	11	. . . . angličtina a ruština
12	6	. . . . francouzština a ruština
5	1	. . . . všechny tři jazyky.

Vysvětlete výsledek v případě **(b)**.

4. Ve cvičení **3. a)** určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný posluchač studuje
a) angličtinu,
b) angličtinu a ruštinu, ale ne francouzštinu.

5. V knihovně byl proveden průzkum, jaký zájem mají čtenáři o beletrii, poezii a naučnou literaturu. Bylo zjištěno, že z registrovaných čtenářů si vypůjčilo za půl roku:
65 % čtenářů beletrii,
26 % čtenářů poezii,
16 % čtenářů naučnou literaturu,
12 % čtenářů beletrii a poezii,
8 % čtenářů beletrii a naučnou literaturu,
7 % čtenářů poezii a naučnou literaturu,
1 % čtenářů knihy všech tří skupin.

a) Kolik čtenářů čte jen poezii?

b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodný návštěvník knihovny si půjčuje beletrii?

6. Na palubě výletní lodi cestuje: 9 kluků, 5 dětí z Prahy, 9 dospělých mužů, 7 venkovských kluků, 14 Pražanů, 6 Pražáků mužského rodu a 7 venkovanek. Kolik bylo na lodi celkem cestujících? Kolik z nich bylo mužského rodu, kolik Pražanů, kolik dospělých? Kolik bylo mezi cestujícími venkovských děvčat a kolik pražských kluků? Můžete dát na všechny otázky jednoznačnou odpověď? (Užijte množin: $\boldsymbol{Z}$ — množina všech cestujících, $\boldsymbol{P}$ — množina všech cestujících z Prahy, $\boldsymbol{D}$ — množina všech dospělých cestujících, $\boldsymbol{M}$ — množina cestujících mužského rodu.)

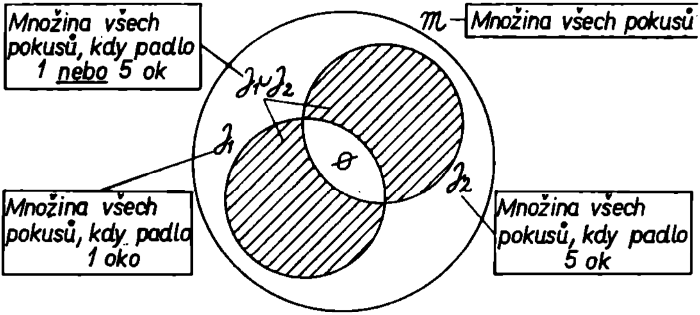
4.5. Pravděpodobnost sjednocení dvou jevů

Označíme:

jev	J_1	J_2	$J_1 \cup J_2$	$J_1 \cap J_2$
pravděpodobnost	$p(J_1)$	$p(J_2)$	$p(J_1 \cup J_2)$	$p(J_1 \cap J_2)$

A. Případ disjunktních jevů J_1, J_2 (obr. 127).

$\boldsymbol{M}$ je množina n pokusů	$\boldsymbol{M}$ je množina 100 vrhů kostkou
J_1 je první jev; v množině $\boldsymbol{W}$ má četnost n_1	J_1 nastane, když padne 1 oko; $n_1 = 15$
J_2 je druhý jev; v množině $\boldsymbol{W}$ má četnost n_2	J_2 nastane, když padne 5 ok; $n_2 = 18$
$J_1 \cup J_2$ je další jev; v množině $\boldsymbol{M}$ má četnost s_{12}	$J_1 \cup J_2$ nastane, když padne buď 1 oko, nebo 5 ok; $s_{12} = 33$



Obr. 127

Pravděpodobnost jevu J_1 je přibližně

$$p(J_1) = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\ \%\,.$$

Pravděpodobnost jevu J_2 je přibližně

$$p(J_2) = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{100} = 0{,}18 = 18\ \%.$$

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je přibližně

$$p(J_1 \cup J_2) = \frac{n_1 + n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} =$$

$$= p\,(J_1) + p(J_2) = 0{,}33 = 33\ \%.$$

> *PRAVDĚPODOBNOST SJEDNOCENÍ DVOU DISJUNKTNÍCH JEVŮ* J_1, J_2 *(tj.* $J_1 \cap J_2 = \emptyset$*) je*
>
> $$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2)$$

PŘÍKLAD

V kapse mám 6 desetihaléřů, 2 pětadvacetihaléře, 1 padesátihaléř a 4 mince korunové. Vytáhnu z kapsy minci, vrátím ji a pokus opakuji 50-krát. Kolikrát pravděpodobně vytáhnu desetihaléř nebo pětadvacetihaléř?

Řešení. Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Množina všech možných výsledků má $n = 13$ prvků, neboť mám v kapse 13 mincí. Jev J_1 je množina všech výsledků, při nichž je vytažená mince desetihaléř. Jev J_1 má tedy $a_1 = 6$ prvků. Jev J_2 je množina všech výsledků, kdy vytažená mince je pětadvacetihaléř; má $a_2 = 2$ prvků. Zřejmě je $J_1 \cap J_2 = \varnothing$.

Pravděpodobnost jevu J_1 je $p(J_1) = \dfrac{a_1}{n} = \dfrac{6}{13}$.

Pravděpodobnost jevu J_2 je $p(J_2) = \dfrac{a_2}{n} = \dfrac{2}{13}$.

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je

$$p(J_1) + p(J_2) = \frac{8}{13} \doteq 0{,}61.$$

Všecky tyto pravděpodobnosti jsou teoretické.

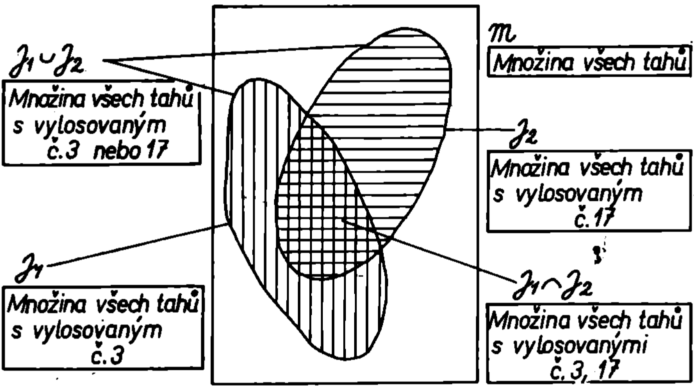
Při $k = 50$ pokusech nastane jev $J_1 \cup J_2$ (vytáhnu desetihaléř nebo pětadvacetihaléř) přibližně 31-krát, neboť

$$k.(p(J_1) + p(J_2)) = 50.0{,}61 = 30{,}5 = 31.$$

B. Případ libovolných jevů J_1, J_2 (obr. 128).

M je množina n pokusů	M je množina 52 tahů ve Sportce

J_1 je první jev; v množině M má četnost n_1	J_1 nastane, když je vylosováno číslo 3; četnost $n_1 = 16$
J_2 je druhý jev; v množině M má četnost n_2	J_2 nastane, když je vylosováno číslo 17; četnost $n_2 = 13$
$J_1 \cap J_2$ je třetí jev: v množině W má četnost p_{12}	$J_1 \cap J_2$ nastane, když jsou vylosována obě čísla 3 a 17; četnost $p_{12} = 2$
$J_1 \cup J_2$ je další jev; v množině M má četnost $s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}$*)	$J_1 \cup J_2$ nastane, když je vylosováno aspoň jedno z čísel 3, 17; četnost $s_{12} = 16 + 13 - 2 = 27$



Obr. 128

*) Viz vzorec pro počet prvků sjednocení dvou množin na str. 161.

Pravděpodobnost $p(J_1) = \frac{n_1}{n} \doteq \frac{16}{52} \doteq 0{,}31 = 31\ \%$.

Pravděpodobnost $p(J_2) = \frac{n_2}{n} = \frac{13}{52} = 0{,}25 = 25\ \%$.

Pravděpodobnost $p(J_1 \cap J_2) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{2}{52} \doteq$

$\doteq 0{,}04 = 4\ \%$.

Pravděpodobnost $p(J_1 \cup J_2) = \frac{s_{12}}{n} =$

$$= \frac{n_1 + n_2 - p_{12}}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} - \frac{p_{12}}{n} =$$

$$= p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2) = 0{,}56 = 56\ \%.$$

PRAVDĚPODOBNOST SJEDNOCENÍ DVOU LIBOVOLNÝCH JEVŮ J_1, J_2 JE

$$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2)$$

Vzorec platí i pro statistické, teoretické a geometrické pravděpodobnosti.

Porovnejte uvedený vzorec se vzorcem pro počet prvků sjednocení dvou množin, str. 161.

PŘÍKLAD

Házíme velkou a malou kostkou. Výsledky zapisujeme jako dvojciferná čísla — počet ok na velké kostce udává desítky, počet ok na malé kostce značí jednotky.

Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo, které je násobkem dvou nebo tří?

Řešení. Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Pokus, tj. hod velkou a malou kostkou, má 36 možných výsledků. Jsou to dvojčlenné variace množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6}, které zapisujeme jako dvojciferná čísla. Jev J_1 je množina všech výsledků, kdy hod určí sudé číslo; jev J_1 má $n_1 = 18$ prvků. Jev J_2 je množina výsledků, kdy hod určí číslo dělitelné třemi:

$$J_2 = \{12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66\};$$

Jev J_2 má $n_2 = 12$ prvků. Jev

$$J_1 \cap J_2 = \{12, 24, 36, 42, 54, 66\}$$

má $p_{12} = 6$ prvků.

Pravděpodobnosti:

$$p(J_1) = \frac{18}{36} = 0,5 = 50\ \% .$$

$$p(J_2) = \frac{12}{36} \doteq 0,33 = 33\ \% .$$

$$p(J_1 \cap J_2) = \frac{6}{36} \doteq 0,17 = 17\ \% .$$

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je

$$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2) \doteq 0,66 = \\ = 66\ \% .$$

CVIČENÍ

1. Vypište množinu M všech dvojciferných čísel, která mají ciferný součet 9, a zjistěte počet n jejích prvků. Vypište podmnožinu $M_1 \subset M$ všech čísel, která jsou násobky čísla 5, a zjistěte počet a_1 jejich prvků. Vypište podmnožinu $M_2 \subset M$ všech čísel, která jsou sudá; zjistěte počet a_2 jejích prvků.

a) Určete teoretickou pravděpodobnost p_1, že napsané číslo z množiny M je násobek pěti.

b) Určete teoretickou pravděpodobnost p_2, že napsané číslo z množiny M je sudé.

c) Určete teoretickou pravděpodobnost p, že napsané číslo z množiny M je buď násobek pěti nebo sudé. Je $p = p_1 + p_2$?
Vysvětlete!

2. Opakujte cvičení **1** s tím, že množinu M_1 ponecháte, množinu M_2 nahradíte množinou M_3 všech čísel z M, která jsou násobky čtyř. Vypočtěte pravděpodobnosti p_1, p_3 a zjistěte zda je $p_1 + p_3 = q$, kde q je pravděpodobnost, že napíši násobek čtyř nebo pěti. Vysvětlete rozdíl mezi výsledky cvičení **1** a **2**.

3. Na rozvodné desce je pět vypínačů, každý z nich zapíná jedno světlo. Chceme rozsvítit buď světlo A nebo světlo B. Jaká je teoretická pravděpodobnost, že se nám to zdaří:

a) při zapnutí jednoho vypínače;

b) při zapnutí dvou vypínačů?

4. V osudí jsou kuličky označené všemi přirozenými čísly množiny $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

a) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že vytáhnu kuličku označenou násobkem jedenácti?

b) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že vytáhneme kuličku, označenou násobkem třinácti?

c) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že dostaneme buď výsledek **a)** nebo výsledek **b)**?

5. a) Nakreslete podle obrázku 127 Vennův diagram tří jevů po dvou navzájem disjunktních s pravděpodobnostmi p_1, p_2, p_3. Určete pravděpodobnost, že nastane buď jev J_1 nebo jev J_2 nebo jev J_3.

b) Sestavte konkrétní příklad, třeba s hrací kostkou nebo pohybem koně na šachovnici (viz obr. 45 na str. 68).

6. Vyjděte ze stejné situace jako ve cvičení **11** na str. 69. Vypočtěte pravděpodobnost, že vytáhnu:

a) buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky bílé;

b) buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky různých barev;

c) Buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky bílé nebo dvě kuličky různých barev.

7. Vyjděte ze situace popsané ve cvičení **13** na str. 69 a vypočtěte teoretickou pravděpodobnost, že vytočím:

a) čtvrté nebo páté číslo správně;

b) čtvrté nebo páté nebo šesté (tj. aspoň jedno číslo) správně;

c) aspoň dvě z posledních tří čísel správně.

8. Řešte úlohu 4 pro případ množiny $M = \{1, 2, \ldots, 500\}$.

9. Ve třídě je 12 chlapců. Z nich se mají vybrat losem 4 žáci, kteří mají jet na brigádu na školní pozemek. Jaká je pravděpodobnost, že los určí aspoň jednoho ze sourozenců Jana a Josefa Okounových?

10. V dostihu poběží 8 koní, mezi nimi Avann, Vánek a Bělka. Jaká je pravděpodobnost, že Avann předběhne buď Vánka nebo Bělku. (Předpokládáme, že všechny koně mají stejné šance na umístění.)

11. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní občané republiky jsou narozeni v témže měsíci, nebo slaví svátek v témže měsíci (rok narození nerozhoduje).

12. Ve škole jsou tři zájmové kroužky: sportovní (**S**), výtvarný (**V**), hudební (**H**). Ve třídě je 35 žáků. Počet účastníků v kroužcích udává tabulka:

S	V	H	S, V	S, H	V, H	S, V, H
12	6	9	3	5	4	1

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený žák pracuje aspoň v jednom kroužku?

13. Pokuste se určit pravděpodobnost $p\ (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ pomocí pravděpodobností: $p(J_1)$, $p(J_2)$, $p(J_3)$, $p(J_1 \cap J_2)$, $p(J_1 \cap J_3)$, $p(J_2 \cap J_3)$, $p(J_1 \cap J_2 \cap J_3)$.

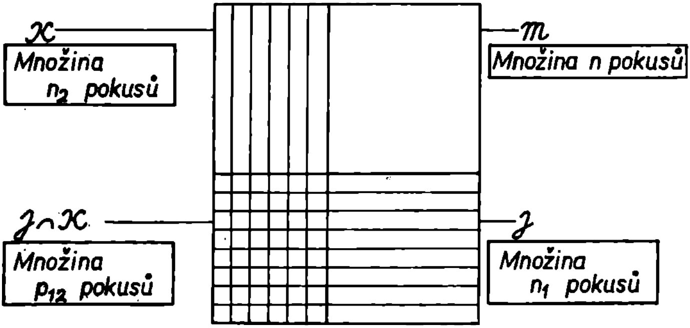
14. Z osudí vytáhněte náhodně jedno z čísel 1, 2, 3, ..., 100. Jaká je pravděpodobnost, že vytažené číslo je násobkem alespoň jednoho z čísek 3, 5, 7 (není násobkem žádného z čísel 3, 5, 7).

4.6. Pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů

Dva jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ mohou být buď

NEZÁVISLÉ nebo **ZÁVISLÉ**

Jak poznáme o dvou jevech $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, zda jsou ***nezávislé*** nebo ***závislé***?



Obr. 129

Máme dánu (viz Vennův diagram na obrázku 129):

Množinu $\boldsymbol{M}$ skládající se z n pokusů;

Jev $\boldsymbol{J}$ četnosti n_1;

Jev $\boldsymbol{K}$ četnosti n_2;

Jev $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ četnosti p_{12}.

Vypočítáme:

(a) Pravděpodobnosti jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$:

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n}, \quad p(\boldsymbol{K}) = \frac{n_2}{n}.$$

(b) Pravděpodobnost jevu J_1 za předpokladu, že nastal jev K. (Označení je $p_K(J)$). Je to pravděpodobnost jevu $J \cap K$ v množině všech pokusů, při nichž nastal jev K.

$$p_K(J) = \frac{p_{12}}{n_2}.$$

(c) Pravděpodobnost jevu K za předpokladu, že nastal jev J; označíme ji $p_J(K)$.

$$p_J(K) = \frac{p_{12}}{n_1}.$$

(d) Jevy J, K pokládáme za ***nezávislé*** právě tehdy, je-li

$$p(J) = p_K(J) \quad \text{a} \quad p(K) = p_J(K)$$

Protože tyto rovnosti buď obě současně platí nebo současně neplatí (nemůže se tedy stát, že by platila pouze jedna), stačí ověřit jen jednu z těchto rovností.

Jestliže tedy

$$p(J) \neq p_K(J) \quad \text{a} \quad p(K) \neq p_J(K)$$

jsou jevy J, K ***závislé***.

K zjišťování závislosti či nezávislosti dvou jevů J a K můžeme vycházet jak ze statistické tak teoretické nebo geometrické pravděpodobnosti.

PŘÍKLAD

a) M je množina 100 vrhů hrací kostkou; $n = 100$. Jev J je množina všech vrhů, při nichž padne sudé číslo; $n_1 = 52$. Jev K je množina všech hodů, kdy padne prvočíslo; $n_2 = 49$. Množina $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ značí jev, při kterém padne sudé prvočíslo; $p_{12} = 16$.

Počítáme pravděpodobnosti jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$.

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n} = \frac{52}{100} = 0{,}52; \quad p(\boldsymbol{K}) = \frac{n_2}{n} = \frac{49}{100} = 0{,}49\,.$$

Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{K}$ je

$$p_K(\boldsymbol{J}) = \frac{p_{12}}{n_2} = \frac{16}{49} \doteq 0{,}32\,.$$

Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{K}$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{J}$ se rovná

$$p_J(\boldsymbol{K}) = \frac{p_{12}}{n_1} = \frac{16}{52} \doteq 0{,}31\,.$$

Porovnáním pravděpodobností:

$$p(\boldsymbol{J}) \neq p_K(\boldsymbol{J}), \text{ neboť } 0{,}52 \neq 0{,}32\,;$$
$$p(\boldsymbol{K}) \neq p_J(\boldsymbol{K}), \text{ neboť } 0{,}49 \neq 0{,}31$$

zjistíme, že jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ jsou závislé.

b) Množiny $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{J}$ jsou z **příkladu** a). Jev $\boldsymbol{L}$ je množina všech vrhů, kdy padne násobek tří; má četnost $n_2 = 32$. Jev $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}$ je množina všech vrhů, při nichž padne sudé číslo a zároveň násobek tří, tj. číslo 6; má četnost $p_{12} = 17$.

Počítáme:

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n} = \frac{52}{100} = 0{,}52; \quad p(\boldsymbol{L}) = \frac{n_2}{n} = \frac{32}{100} = 0{,}32;$$

$$p_L(\boldsymbol{J}) = \frac{p_{12}}{n_2} = \frac{37}{32} \doteq 0{,}53; \quad p_J(\boldsymbol{L}) = \frac{p_{12}}{n_1} = \frac{17}{52} = 0{,}33.$$

Porovnáním pravděpodobností

$$p(\boldsymbol{J}) \doteq p_L(\boldsymbol{J}), \quad \text{neboť} \quad 0{,}52 \doteq 0{,}53 ;$$

$$p(\boldsymbol{L}) \doteq p_J(\boldsymbol{L}), \quad \text{neboť} \quad 0{,}32 \doteq 0{,}33.$$

Zjistíme, že jevy $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou zřejmě nezávislé. (Rozdíly mezi porovnávanými pravděpodobnostmi jsou totiž zanedbatelné.)

Kdybychom použili teoretické pravděpodobnosti, pak by vyšlo $p(\boldsymbol{J}) = p_L(\boldsymbol{J})$ (přesně). Proveďte výpočty sami!

Jaká je pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$?

Počítáme (užíváme označení zavedené na str. 178 a na obrázku 129):

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{p_{12}}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} = \frac{p_{12}}{n_1} \cdot p(\boldsymbol{J}) .$$

Jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ jsou nezávislé a tedy

$$\frac{p_{12}}{n_1} = p_J(\boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{K}) ,$$

takže

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{K}) . p(\boldsymbol{J})$$

PRAVDĚPODOBNOST PRŮNIKU DVOU NEZÁVISLÝCH JEVŮ $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ *JE*

$$\boxed{p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{J}) . p(\boldsymbol{K})}$$

Vzorec platí i pro teoretické a geometrické pravděpodobnosti.

PŘÍKLAD 2

Ověříme vzorec pro nezávislé jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{L}$ z **příkladu 1b**.

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{17}{100} = 0{,}17\ ;$$

$$p(\boldsymbol{J}) \,.\, p(\boldsymbol{L}) = 0{,}52 \,.\, 0{,}32 = 0{,}1664 \doteq 0{,}17\,.$$

Platí tedy rovnost

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}) = p(\boldsymbol{J}) \,.\, p(\boldsymbol{L})\,.$$

PŘÍKLAD 3

Házíme dvěma mincemi současně. Jaká je pravděpodobnost, že padne na obou mincích líc?

$\boldsymbol{J}$ je množina všech vrhů, kdy padne na první minci líc.

$\boldsymbol{K}$ je množina všech vrhů, kdy na druhé minci padne líc.

$\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ je množina všech vrhů, kdy na obou mincích padne líc.

Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Protože je

$$p(\boldsymbol{J}) = p(\boldsymbol{K}) = p_{K}(\boldsymbol{J}) = p_{J}(\boldsymbol{K}) = \frac{1}{2}\,,$$

jsou jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ nezávislé a platí:

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) \doteq p(\boldsymbol{J}) \,.\, p(\boldsymbol{K}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Pro závislé jevy nelze pravděpodobnost průniku dvou jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ *počítat jako součin pravděpodobností* $\boldsymbol{J}$ *a* $\boldsymbol{K}$.

PŘÍKLAD 4

Pro závislé jevy J, K z **příkladu 1a** máme:

$$p(J \cap K) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{16}{100} = 0{,}16,$$

$$p(J) . p(K) = 0{,}52 . 0{,}49 \doteq 0{,}25 .$$

Oba výsledky se však podstatně liší.

Pamatujte si názvy a jejich význam:

Nezávislé a závislé jevy.

Pamatujte vzorec pro průnik nezávislých jevů J, K:

$$p(J \cap K) = p(J) . p(K) .$$

CVIČENÍ

1. Házíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne sudý počet ok?

2. Ve městě žije 1 200 rodin se čtyřmi dětmi. Určete přibližně v kolika rodinách mají samé dcery, tři dcery, více dcer než synů?

3. Množina M se skládá ze 2 000 následovně vybraných osob. J je množina všech lidí z množiny M trpících chronickými chorobami horních dýchacích cest. K je množina všech kuřáků z množiny M. Množiny J, K, $J \cap K$ mají pořadě 120, 1 080, 72 prvků. Zjistěte, zda jsou jevy J, K závislé nebo nezávislé.

4. K dostihu jsou přihlášeni koně: A, B, C, D. Sázková kancelář tipuje vítězství jednotlivých koní s těmito pravděpodobnostmi:

A ..... 0,4 = 40 % C ..... 0,2 = 20 %
B ..... 0,3 = 30 % D ..... 0,1 = 10 %

Těsně před dostihem bylo oznámeno, že kůň C nepoběží. Jak se změní pravděpodobnosti na vítězství pro koně A, B, D?

5. Házíme dvakrát hrací kostkou. Určete teoretickou pravděpodobnost, že padne celkem součet 10 ok za předpokladu, že **a)** jednou padne šestka; **b)** při prvním hodu padne šestka.

6. Do útoku hokejového mužstva mají nastoupit hráči A, B C, z nichž každý může hrát na kterémkoli místě. Jev J je: „B hraje vpravo od A (nikoliv nutně vedle A)“. Jev K je: „C hraje vpravo od A (nikoliv nutně vedle A)“.

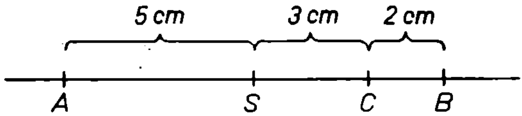
a) Určete zda jsou jevy J, K nezávislé nebo závislé.

b) Vypočítejte teoretickou pravděpodobnost $p(J \cap K)$.

7. Zjistěte zda jevy: J — být majitelem automobilu, K — být majitelem motocyklu ze cvičení **7.** na str. 165 jsou závislé nebo nezávislé!

8. Zjistěte pro každou dvojici jevů: J — na fotografii je otec, K — na fotografii je matka, L — na fotografii je syn z cvičení **2.** na str. 169, — zda jsou či nejsou závislé.

9. Obměňte cvičení **8.** pro jevy ze cvičení **12.** na str. 177.



Obr. 130

10. Zvolíme náhodně bod $X \in AB$ (obr. 130). Doplňte tabulku!

Jev	J_1	J_2	$J_1 \cup J_2$	$J_1 \cap J_2$
výsledek pokusu	$CX \leqq 3$ cm	$SX \leqq 2$ cm		
pravděpodobnost				

11. Zvolíme náhodně dva body X, Y úsečky $AB = 10$ cm. Jevy J, K jsou množiny

a) $\boldsymbol{J} = \{X, Y \in AB \mid AX \leqq 3 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{K} = \{X, Y \in AB \mid BY = 2 \text{ cm}\}$;

b) $\boldsymbol{J} = \{X, Y \in AB \mid AX \leqq 3 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{K} = \{X, Y \in AB \mid BY = 2 \text{ cm}\}$.

Vypočítejte pravděpodobnost: $p(\boldsymbol{J})$, $p(\boldsymbol{K})$, $p_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{J})$, $p_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cup \boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K})$.

12. Zvolíme náhodně bod X patřící rovnostrannému trojúhelníku $\boldsymbol{T} = ABC$. Jev $\boldsymbol{J}$ je množina všech bodů X, které mají od strany AB menší vzdálenost než od strany AC. Jev $\boldsymbol{K}$ je množina všech bodů X, které mají od bodu A větší vzdálenost než od bodu B.

Vypočítejte pravděpodobnosti: $p(\boldsymbol{J})$, $p(\boldsymbol{K})$, $p_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{J})$, $p_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cup \boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K})$.