Booleova algebra

2. kapitola. Výroky, pravdivostní hodnoty výroků

In: Oldřich Odvárko (author): Booleova algebra. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 15–25.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403768

2. kapitola

VÝROKY, PRAVDIVOSTNÍ HODNOTY VÝROKŮ

Zopakujme si v této kapitole nejprve některé základní pojmy z výrokové logiky.

Z řady konkrétních příkladů jste si vytvořili představu o tom, co je *výrok*. Víte, že pro každý výrok P z dané množiny výroků nastává právě jedna z těchto možností: buď je pravdivý, nebo je nepravdivý. Říkáme také, že ke každému výroku P je přiřazena jeho *pravdivostní hodnota*, kterou označujeme „ph(P)“. Je-li výrok P pravdivý, budeme psát „ph(P) = 1“ a číst „pravdivostní hodnota výroku P je rovna jedné“. Je-li výrok P nepravdivý, zapíšeme tuto skutečnost „ph(P)=0“ a čteme „pravdivostní hodnota výroku P je rovna nule“.

K daným výrokům P, Q z množiny *V* umíme vytvořit jejich alternativu, konjunkci, implikaci a ekvivalenci; dále ke každému výroku jeho negaci.*)

Stručně si připomeňme, jak tyto složené výroky symbolicky zapisujeme, jak je čteme, a popišme, kdy jsou pravdivé (popřípadě nepravdivé):

alternativa výroků P, Q $P \vee Q$ P nebo Q

*) Předpokládejme, že jsme zvolili množinu *V* tak „rozsáhlou“, že spolu s výroky P a Q do ní patří i jejich konjunkce, alternativa, implikace, ekvivalence a negace.

Tento výrok je pravdivý ve všech těch případech, kdy aspoň jeden z výroků P, Q je pravdivý.

konjunkce výroků P, Q $\qquad$ $P \wedge Q$ $\qquad$ P a Q

Výrok je pravdivý jenom v tom případě, kdy oba výroky P, Q jsou zároveň pravdivé.

implikace výroku Q výrokem P**)

$P \Rightarrow Q$ $\qquad$ jestliže P, pak Q

Výrok je nepravdivý jedině v tom případě, kdy je P pravdivý výrok a zároveň je Q výrok nepravdivý.

ekvivalence výroků P, Q $\qquad$ $P \Leftrightarrow Q$ $\qquad$ P, právě když Q (nebo „P právě tehdy, když Q“)

Výrok je pravdivý v těchto dvou případech: oba výroky P, Q jsou zároveň pravdivé; oba výroky jsou zároveň nepravdivé.

negace výroku P $\qquad$ P′ $\qquad$ není pravda, že P

Výrok P′ je pravdivý, právě když je P nepravdivý.

Poznatky o pravdivostních hodnotách těchto složených výroků můžeme zapsat přehledně v tabulkách:

ph(X)	ph(Y)	ph(X ∨ Y)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

tab. 1

ph(X)	ph(Y)	ph(X ∧ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

tab. 2

**) Výrok P obvykle nazýváme předpoklad implikace $P \Rightarrow Q$, výrok Q závěr této implikace.

ph(X)	ph(Y)	ph(X ⇒ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

tab. 3

ph(X)	ph(Y)	ph(X ⇔ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

tab. 4

ph(X)	ph(X′)
1	0
0	1

tab. 5

Písmena X, Y v jednotlivých tabulkách značí *výrokové proměnné* s oborem V. Jsou-li P, Q výroky z V, jejichž pravdivostní hodnoty jsou známy, můžeme z těchto tabulek pohodlně určit ph (P $\vee$ Q), ph (P $\wedge$ Q), ph (P $\Rightarrow$ Q), ph (P $\Leftrightarrow$ Q), ph (P′).

Příklad 6: Jsou dány výroky P, Q, R, pro něž je ph (P) = = 1, ph (Q) = 0, ph (R) = 0. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(P \wedge Q)' \Rightarrow R] \Rightarrow P$$

***Řešení*:** Pomocí tabulek 1 až 5 postupně zjistíme, že je ph$(P \wedge Q) = 0$, ph$[(P \wedge Q)'] = 1$, ph$[(P \wedge Q)' \Rightarrow R] =$ $= 0$ a ph $([(P \wedge Q)' \Rightarrow R] \Rightarrow P) = 1$.

Výrazy, které sestavujeme podle určitých pravidel z výrokových proměnných, symbolů $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $'$ a závorek, nazýváme obvykle *výrokové formule.*

Příklad 7: Je dána výroková formule $(X \wedge Y)' \Rightarrow (X \vee Y')$. Dosaďte do této formule všude za X výrok P, pro nějž je ph(P) = 0, za Y výrok Q, pro nějž je ph(Q) = 1. Určete pravdivostní hodnotu takto vzniklého výroku. *Řešení*: Naším úkolem je určit pravdivostní hodnotu výroku $(P \wedge Q)' \Rightarrow (P \vee Q')$, kde je ph(P) = 0, ph(Q) = = 1. Sami snadno zjistíte, že tato pravdivostní hodnota je rovna 0.

Když dosadíme za každou proměnnou do výrokové formule výrok z množiny V, jehož pravdivostní hodnota je dána (tj. dosadíme za každou výrokovou proměnnou jistou hodnotu této proměnné z V), dospějeme k výroku, jehož pravdivostní hodnotu umíme určit.

Přitom pravdivostní hodnota tohoto výroku závisí zřejmě při dané výrokové formuli pouze na pravdivostních hodnotách dosazovaných výroků, nikoliv na jejich konkrétní „podobě“. Jestliže například do výrokové formule z příkladu 7 dosadíme za X místo P libovolný výrok T, pro nějž je ph(T) = 0, a za Y namísto Q libovolný výrok U, pro nějž je ph(U) = 1, pak pravdivostní hodnota výroku $(T \wedge U)' \Rightarrow (T \vee U')$ bude opět rovna 0.

Abychom zjistili, jakých pravdivostních hodnot nabývá výroková formule z příkladu 7 pro všechny možné uspořádané dvojice pravdivostních hodnot výroků, jež dosazujeme za proměnné X, Y, stačí zřejmě probrat ještě tři případy. Řešení obvykle uspořádáváme přehledně v tabulce:*)

---

*) Důvodem neobvyklého tvaru zápisů $\frac{\text{ph“}}{\text{„(X)}}$, $\frac{\text{ph“}}{\text{„(Y)}}$ atd. je pouze nedostatek místa.

ph (X)	ph (Y)	ph $(X \wedge Y)$	ph$[(X \wedge Y)']$	ph (Y')	ph $(X \vee Y')$	ph$[(X \wedge Y)' \Rightarrow$ $\Rightarrow (X \vee Y')]$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Příklad 8: Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývá výroková formule

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (Y' \Rightarrow X')$$

při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za X a Y.

Řešení:

ph (X)	ph (Y)	ph$(X \Rightarrow Y)$	ph(Y')	ph(X')	ph$(Y' \Rightarrow X')$	ph $[(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (Y' \Rightarrow X')]$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Vidíme, že pro tuto výrokovou formuli platí: Dosadíme-li za výrokové proměnné X, Y libovolně zvolené výroky P, Q, pak výrok $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q' \Rightarrow P')$ je pravdivý. Jde o příklad výrokové formule, kterou nazýváme tautologicky pravdivá čili *tautologie.*

Příklad 9: Dokažte, že výrokové formule

a) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X' \vee Y)$
b) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')]$

jsou tautologie.

Řešení:

ph(X)	ph(Y)	ph(X⇒Y)	ph(X′)	ph(X′ ∨ Y)	ph[(X⇒Y)⇔(X′∨Y)]
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Prosím, abyste důkaz části b) provedli už samostatně.

Všimněme si příkladu 9 ještě trochu podrobněji. Pro každou dvojici výroků P, Q, které dosazujeme například v části a) do příslušné výrokové formule za X a Y, platí ph (P ⇒ Q) = ph (P′ ∨ Q). Obdobně v případě b) je ph (P ⇔ Q) = ph [(P ∧ Q) ∨ (P′ ∧ Q′)].

Jestliže tedy řešíme úlohy, jež se týkají určování pravdivostních hodnot výroků, můžeme všude namísto „P ⇒ Q" psát „P′ ∨ Q", obdobně „P ⇔ Q" můžeme všude nahradit „(P ∧ Q) ∨ (P′ ∧ Q′)". Vyskytuje-li se ve výrokové formuli „X ⇒ Y", můžeme tento výraz nahradit „X′ ∨ Y", obdobně „X ⇔ Y" lze zaměnit „(X ∧ Y) ∨ (X′ ∧ Y′)". Při řešení úloh, jejichž typy jsme doposud v této kapitole uvedli, vystačíme tedy s tabulkami 1,2 a 5.

Řešíme-li příklady, jež se týkají určování pravdivostních hodnot výroků, omezujeme se v podstatě na „práci" s prvky 0 a 1, tj. na práci v dvouprvkové množině pravdivostních hodnot výroků. Označujme ji všude v dalším písmenem H. Všimněme si této množiny poněkud blíže.

Pro symbolický zápis rovnosti prvků r, s množiny H budeme užívat obyčejného rovnítka. Nejsou-li prvky r, s sobě rovny, budeme psát „$r \neq s$".

Ke každé uspořádané dvojici [ph (P), ph (Q)] prvků z množiny H existují jednoznačně určené prvky ph (P $\vee$ $\vee$ Q), ph (P $\wedge$ Q) z H. Dále ke každému prvku ph (P) z množiny H existuje jednoznačně určený prvek ph (P′) z H.

Jinak řečeno: Ke každým dvěma prvkům r, s z množiny H existují jednoznačně určené prvky t a u množiny H, pro něž platí: jsou-li P, Q výroky z množiny V, pro něž je ph(P) $= r$, ph(Q) $= s$, pak je $t =$ ph(P $\vee$ Q), $u =$ ph(P $\wedge$ Q). Nazývejme tyto prvky postupně „*součet* r, s“, „*součin* r, s“ a označujme je „$r+s$“, „$r.s$“.

Dále ke každému prvku r množiny H existuje jednoznačně určený prvek $r' \in H$, který nazveme „*doplněk* k r“ a pro nějž platí: Je-li P výrok z množiny V, pro který ph (P) $= r$, pak je $r' =$ ph (P′).

Poznámka: Názvy „součet“, „součin“ a symboly „+“, „.“ jsme si „vypůjčili“ z číselné algebry, „doplněk“ a „′“ z teorie množin. Později sàmi uvidíte vhodnost této volby názvů a znaků.

Na základě shora uvedených definic můžete už sami prověřit, že platí:

$0+0=0$	$0.0=0$	$0'=1$
$0+1=1$	$0.1=0$	$1'=0$
$1+0=1$	$1.0=0$	
$1+1=1$	$1.1=1$	

Pro větší přehlednost lze sestavit tyto tabulky pro určování „součtu“, „součinu“ a „doplňku“ prvků množiny H:

$r+s$:

$r \backslash s$	0	1
0	0	1
1	1	1

tab. 6

$r.s$:

$r \backslash s$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 7

r	r'
0	1
1	0

tab. 8

V množině H, na níž je definováno „sčítání", „násobení" a „doplněk" tabulkami 6 až 8, můžeme provádět výpočty, obdobně jako v „číselné algebře". Stejně jako při počítání s čísly budeme i zde například namísto „$(0.1)+(0'.0)$" psát stručněji pouze „$0.1+0'.0$", namísto „$r+(s.t)$" pouze „$r+s.t$" atd. Mějme však přitom stále na mysli, že násobení má „přednost" před sčítáním.

Příklad 10: Rozhodněte, zda prvek

$$((0+1)'+(0'+1)).((1+0.1')+0'.1')$$

z množiny H je roven 0 nebo 1.
Řešení: Na základě tabulek 6 až 8 dostaneme postupně $((0+1)'+(0'+1)).((1+0.1')+0'.1') = (1'+(1+1)).$
$.((1+0.0)+1.0) = (0+1).((1+0)+0) = 1.(1+0) =$
$= 1.1 = 1$

Příklad 11: Rozhodněte, zda prvky

$$(0'+1').(1+0')+(0'+1).0' \quad \text{a} \quad (0+1')'.(1'+0')'$$

z množiny H jsou sobě rovny.
Řešení: $(0'+1').(1+0')+(0'+1).0' = (1+0).(1+1)+$
$+(1+1).1 = 1.1+1.1 = 1+1 = 1$
$(0+1')'.(1'+0')' = (0+0)'.(0+1)' = 0'.1' = 1.0 = 0$
Uvažované prvky jsou různé.

Ukažme si nyní, jak lze provedené úvahy o množině H užít při řešení úloh o pravdivostních hodnotách výroků a výrokových formulí.

Příklad 12: Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(G \wedge H') \vee (L' \wedge K')] \wedge (G' \vee L),$$

je-li $ph(G) = 1$, $ph(H) = 0$, $ph(K) = 0$, $ph(L) = 1$.

Řešení: $\text{ph}\,([(G \wedge H') \vee (L' \wedge K')] \wedge (G' \vee L)) =$
$= [\text{ph}(G).(\text{ph}(H))' + (\text{ph}(L))'.(\text{ph}(K))'].[(\text{ph}(G))' +$
$+ \text{ph}(L)] = (1.0' + 1'.0').(1' + 1) = (1.1 + 0.1).$
$.(0 + 1) = (1 + 0).1 = 1.1 = 1$

Pravdivostní hodnota zkoumaného výroku je rovna 1.

Příklad 13: Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee (R' \Rightarrow Q),$$

je-li $\text{ph}(P) = 1$, $\text{ph}(Q) = 0$, $\text{ph}(R) = 1$.

Řešení: $\text{ph}\,([(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee (R' \Rightarrow Q)) =$
$= \text{ph}\,([(P' \vee Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee ((R')' \vee Q)) =$
$= ((\text{ph}(P))' + \text{ph}(Q)).(\text{ph}(P).\text{ph}(Q)) + (\text{ph}(R) + \text{ph}(Q)) =$
$= (1' + 0).(1.0) + (1 + 0) = 0.0 + 1 = 1$

Pravdivostní hodnota uvažovaného výroku je rovna 1.

Příklad 14: Rozhodněte, zda výroková formule

$$[(X \Rightarrow Y) \wedge X'] \vee (Y \Rightarrow X)$$

je tautologie.

Řešení: Naším úkolem je prozkoumat postupně všechny dvojice pravdivostních hodnot výroků, tj. tyto uspořádané dvojice prvků z množiny H: [0,0], [0,1], [1,0], [1,1].

Namísto výrokové formule v textu příkladu můžeme zkoumat výrokovou formuli

$$[(X' \vee Y) \wedge X'] \vee (Y' \vee X)$$

a) Určeme pravdivostní hodnotu, kterou dostaneme v případě dvojice [0,0]:

$$(0' + 0).0' + (0' + 0) = (1 + 0).1 + (1 + 0) = 1$$

b) Uvažujme dvojici [0,1]:

$$(0'+1).0'+(1'+0) = (1+1).1+(0+0) = 1$$

c) Pro dvojici [1,0] dostaneme postupně:

$$(1'+0).1'+(0'+1) = (0+0).0+(1+1) = 1$$

d) Zbývá ještě dvojice [1,1]:

$$(1'+1).1'+(1'+1) = 1.0+1 = 1$$

Ve všech čtyřech případech jsme dospěli k pravdivostní hodnotě 1, je tedy naše výroková formule tautologie.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda následující prvky z množiny H jsou rovny 0 nebo 1:

a) $(0'+1').(1'+1')+0'.1'$

b) $(0'.1'+0.1)'.((0+1)'+(1+0')')'$

c) $[(0+1).(1'+0')]'+[(0'+1')'.(0+1)]$

2. Rozhodněte, zda následující prvky z množiny H jsou sobě rovny:

a) $(0+1')'.(0.1)'+(0'+1)'.(1.0')'$; $(0.1')'.((0'+1')')'$

b) $[(0+1)+[(0.1)'+(1'.0')]]'$; $[(0.1'+1'.0')+(0'.0'+$
$+1'.1')]'+1'.0'$

3. Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývají tyto výrokové formule při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za proměnné X, Y, Z:

a) $((X \Leftrightarrow Y) \wedge Z) \Rightarrow ((X' \vee Y') \wedge Z')$

b) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z) \wedge (Z' \vee Y')$

c) $((X \wedge Y) \vee Z) \wedge (Y' \Rightarrow Z')$

4. Dokažte, že následující výrokové formule jsou tautologie:

a) $(X' \wedge Y')' \Leftrightarrow (X \vee Y)$ b) $(X' \vee Y')' \Leftrightarrow (X \wedge Y)$

5. Rozhodněte, zda následující výrokové formule jsou tautologie:

a) $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ b) $(X' \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \vee Y)$

c) $((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow Y)$