Booleova algebra

3. kapitola. Operace a jejich vlastnosti

In: Oldřich Odvárko (author): Booleova algebra. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 26–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403769

3. kapitola

OPERACE A JEJICH VLASTNOSTI

V této kapitole se seznámíme s pojmy binární a unární operace a uvedeme jejich některé vlastnosti. Nejprve připomeňme dva pojmy, které mnozí znáte z učiva středoškolské matematiky.

Kartézským součinem množin K, L nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x \in K$ a $y \in L$. Kartézský součin množin K, L označujeme $K \times L$.

Je-li například $C = \{1, 2, 7\}$, $D = \{\sqrt{2}, 0\}$, pak je
$C \times D = \{[1,\sqrt{2}], [1,0], [2,\sqrt{2}], [2,0], [7,\sqrt{2}], [7,0]\}$.

Zobrazením množiny K do množiny L (stručně „K do L") nazýváme každou podmnožinu T kartézského součinu $K \times L$, pro niž platí: ke každému $x \in K$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že $[x,y] \in T$.

Množiny $T_1 = \{[1,\sqrt{2}], [2,\sqrt{2}], [7,0]\}$, $T_2 = \{[1,0], [7,0], [2,0]\}$ jsou příklady zobrazení C do D.

Množiny $T_3 = \{[1,\sqrt{2}], [7,0]\}$, $T_4 = \{[1,\sqrt{2}], [2,\sqrt{2}], [1,0]\}$ jsou příklady podmnožin $C \times D$, jež nejsou zobrazením C do D.

Uvažujme nyní speciální případ zobrazení K do L, kdy je $K = L \times L$. Zobrazením $L \times L$ do L je pak (v souladu se shora uvedenou definicí zobrazení K do L) každá podmnožina U kartézského součinu $(L \times L) \times L$, pro niž platí: ke každé uspořádané dvojici $[x, y] \in L \times L$ existuje právě jedno $z \in L$ takové, že $[[x,y],z] \in U$.

Zobrazení $L \times L$ do L obvykle nazýváme *binární operace na množině* L (stručně „na L“) a symbolicky označujeme například „$z = x * y$ na L“, „$z = x \circ y$ na L“ atd. (znaky „$*$“, „$\circ$“ čtěte „hvězdička“, „kolečko“). Pokud bude z kontextu jasné, že jde o binární operaci, budeme často psát pouze „operace“.

Pro nás běžnými příklady binárních operací jsou například operace sčítání a násobení na množině všech reálných čísel R. Ke každé dvojici čísel $[x,y]$ existuje jednoznačně určené reálné číslo $x+y$, které nazýváme součet čísel x, y, a jednoznačně určené číslo „$x . y$“ (nebo stručněji „xy“), jež nazýváme součin čísel x, y.

V 1. kapitole jsme si připomněli, že ke každým dvěma podmnožinám A, B dané neprázdné množiny M existuje jednak jednoznačně určená podmnožina množiny M, zvaná sjednocení množin A, B, jednak podmnožina, kterou nazýváme průnik množin A, B. Podívejme se na tuto skutečnost z hlediska množiny $\widehat{M}$ (čtěte „m se stříškou“) všech podmnožin množiny M: Ke každým dvěma prvkům A, B množiny $\widehat{M}$ existuje právě jeden prvek množiny $\widehat{M}$, který je roven $A \cup B$, a dále právě jeden prvek množiny $\widehat{M}$, rovný $A \cap B$. Na množině $\widehat{M}$ jsou tedy definovány dvě binární operace „sjednocení“ a „průnik“.

Ve 2. kapitole jsme tabulkami 6 a 7 definovali binární operace „sčítání“ a „násobení“ na množině H pravdivostních hodnot výroků.

Zabývejme se nyní některými vlastnostmi binárních operací. Připomeňme si důležité vlastnosti operací sčítání a násobení na množině R, kterých běžně a zcela mechanicky při počítání s reálnými čísly používáme:

Pro všechna reálná čísla x, y, z platí:

a) $x+y = y+x$ b) $xy = yx$
c) $(x+y)+z = x+(y+z)$ d) $(xy).z = x.(yz)$

Jde o vlastnosti, kterým postupně říkáme komutativnost sčítání, komutativnost násobení, asociativnost sčítání a asociativnost násobení.

Obecně nazýváme operaci „$u = x * y$ na L“ komutativní, právě když pro všechny prvky x, y množiny L platí

$$x * y = y * x$$

Operaci „$u = x * y$ na L“ nazýváme asociativní, právě když pro všechny prvky x, y, z množiny L platí

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Je-li operace „$u = x * y$ na L“ asociativní, pak zřejmě můžeme psát „$x * y * z$“ bez závorek.

Zkoumejme nyní, které z uvedených vlastností mají operace zavedené na $\hat{M}$ a na H.

Operace sjednocení i průnik na množině $\hat{M}$ jsou zřejmě obě komutativní. Komutativnost operací sčítání a násobení na H plyne ihned z tabulek 6 a 7 (zde stačí uvážit, že platí $0+1 = 1+0$, $0.1 = 1.0$).

V příkladě 4, který byl uveden v 1. kapitole, jsme dokázali, že operace průnik i sjednocení na množině $\hat{M}$ jsou asociativní.

Zabývejme se problémem, zda také operace „$u = x+y$ na H“ je asociativní. Prověřme postupně všechny uspořádané trojice prvků z H.

x	y	z	$x+y$	$(x+y)+z$	$y+z$	$x+(y+z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Z uvedené tabulky je vidět, že operace sčítání na H je asociativní.

Poznámka: „Tabulková“ metoda, kterou jsme pro splnění našeho úkolu zvolili, má výhodu v tom, že je zcela mechanická, na druhé straně je však značně zdlouhavá. Proto hledáme obvykle efektivnější metodu řešení. V našem případě si například stačí uvědomit, že platí $(x+y)+z = 0$ a zároveň $x+(y+z) = 0$ právě tehdy, když je $x = y = z = 0$. Ve všech ostatních případech je tedy $(x+y)+z = x+(y+z) = 1$. Proto pro všechna x, y, z množiny H platí $(x+y)+z = x+(y+z)$.

Prosím, abyste už samostatně prověřili, že i operace násobení na H je asociativní.

Připomeňme si ještě jednu důležitou vlastnost, kterou mají operace sčítání a násobení na množině všech reálných čísel R.

Pro všechna reálná čísla x, y, z platí:

$$x.(y+z) = x.y+x.z$$

Říkáme, že operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání.

Obecně nazýváme operaci „$u = x \circ y$ na L" distributivní vzhledem k operaci „$u = x * y$ na L", právě když pro každé tři prvky x, y, z množiny L platí

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ *a zároveň* $(y * z) \circ x =$
$= (y \circ x) * (z \circ x)$

Poznámka: Je-li operace „$u = x \circ y$ na L" komutativní, pak stačí ve shora uvedené definici psát pouze jednu z podmínek, tj. buď „$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$", nebo „$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$".

Víme, že operace násobení na R je distributivní vzhledem k operaci sčítání. Jestlipak je také operace sčítání na R distributivní vzhledem k operaci násobení, tj. jestlipak platí pro všechna reálná čísla x, y, z

$$x + yz = (x + y) . (x + z)?$$

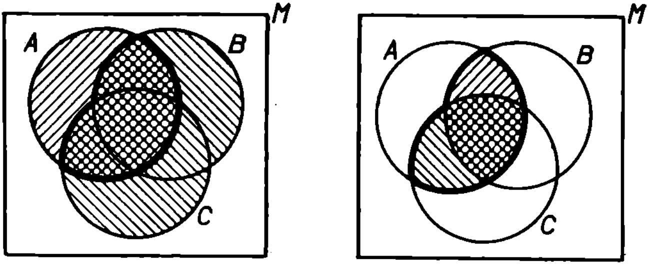
Najděte aspoň jeden protipříklad!

Zkoumejme nyní operace sjednocení a průnik na $\widehat{M}$. Rozhodněme nejprve, zda je operace průnik distributivní vzhledem k operaci sjednocení. Naším úkolem je tedy prověřit, zda pro všechny prvky A, B, C z $\widehat{M}$ platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(Vzhledem k tomu, že operace průnik je komutativní, stačí podle předchozí poznámky ověřovat skutečně jenom tuto rovnost.)

Úkol vyřešíme užitím Vennova diagramu pro množiny A, B, C (obrázky 12a, 12b). Porovnáním oblastí ohraničených silnějšími čarami, jež jsou obrazy množin $A \cap (B \cup C)$ a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, dospíváme k závěru, že operace průnik je distributivní vzhledem k operaci sjednocení.

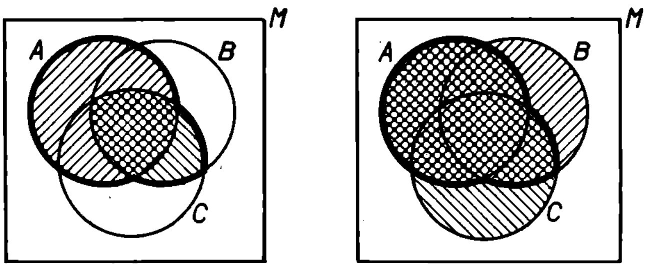


Obr. 12a, b

Obdobně můžete pomocí Vennova diagramu rozhodnout, zda operace sjednocení je distributivní vzhledem k operaci průnik, tj. zda pro všechny prvky A, B, C množiny $\hat{M}$ platí

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Srovnejte své závěry s obrázky 13a, 13b.



Obr. 13a, b

Zabývejme se z hlediska „distributivnosti“ operacemi sčítání a násobení na množině H pravdivostních hodnot výroků. Rozhodněme nejprve, zda operace „$u = x + y$ na H“ je distributivní vzhledem k operaci „$u = x . y$ na H“. Úkolem je tedy prověřit, zda pro všechny prvky r, s, t množiny H platí

$$r + s . t = (r + s) . (r + t)$$

(Opět vzhledem k tomu, že operace sčítání na H je komutativní, stačí ověřovat pouze tuto rovnost.)
Prozkoumejme postupně všech osm uspořádaných dvojic prvků z H:

r	s	t	$s.t$	$r+s.t$	$r+s$	$r+t$	$(r+s).(r+t)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Z tabulky ihned vidíme, že operace sčítání na H je distributivní vzhledem k operaci násobení na H. Můžete se pokusit, obdobně jako při zkoumání asociativnosti operace sčítání na H, najít efektivnější metodu vedoucí k cíli.

Prosím, abyste už každý samostatně dokázal, že také operace „$u = x . y$ na H“ je distributivní vzhledem k operaci „$u = x + y$ na H“, tj. že pro všechny prvky r, s, t množiny H platí

$$r . (s + t) = r . s + r . t$$

Při sčítání reálných čísel hraje význačnou roli číslo 0; je totiž $x+0 = 0+x = x$ pro každé reálné číslo x. Obdobně při násobení reálných čísel je jistým význačným prvkem číslo 1; pro každé reálné číslo x platí $x.1 = 1.x = x$. Říkáme, že číslo 0 je neutrální prvek operace sčítání, číslo 1 neutrální prvek operace násobení.

Obecně nazýváme neutrálním prvkem vzhledem k operaci „$u = x * y$ na L" (stručněji „neutrálním prvkem operace $u = x * y$ na L") prvek $e \in L$, pro nějž platí: Pro všechna $x \in L$ je

$$x * e = e * x = x$$

Poznámka: Je-li operace „$u = x * y$ na L" komutativní, pak ve shora uvedené definici stačí zřejmě psát pouze buď „$x * e = x$", nebo „$e * x = x$".

V množině $\widehat{M}$ je zřejmě jedním z neutrálních prvků vzhledem k operaci sjednocení množina prázdná — pro každé $A \in \widehat{M}$ platí $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$. Dokážeme dále, že žádný prvek $B \in \widehat{M}$, $B \neq \emptyset$, nemůže být neutrálním prvkem operace sjednocení: Nechť je $B \in \widehat{M}$ neutrální prvek operace sjednocení na $\widehat{M}$. Pak pro každé $A \in \widehat{M}$ je $A \cup B = A$, tedy speciálně i $\emptyset \cup B = \emptyset$. Současně ale též platí $\emptyset \cup B = B$. Odtud plyne $B = \emptyset$. Existuje tedy v $\widehat{M}$ právě jeden neutrální prvek operace sjednocení — prázdná množina.

Obdobně už sami dokažte, že v $\widehat{M}$ existuje právě jeden neutrální prvek vzhledem k operaci průnik, a to množina M.

Zabývejme se nyní otázkou existence neutrálních prvků jednotlivých operací na H. Uvědomíme-li si, že platí $1+0 = 0+1 = 1$, $0+0 = 0$, pak je ihned zřejmé, že 0 je neutrální prvek vzhledem k sčítání na H. Dokažte samostatně, že 1 není neutrálním prvkem této operace.

Dále ověřte, že neutrálním prvkem operace „$u = x.y$ na H" je právě prvek 1.

Uvažujme další speciální případ zobrazení K do L, kdy je $K = L$. Zobrazením L do L (v souladu s definicí zobrazení K do L) je každá podmnožina V kartézského součinu $L \times L$, pro niž platí: ke každému $x \in L$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že je $[x,y] \in V$.

Zobrazení L do L budeme v dalším nazývat *unární operace na* L a symbolicky označovat například „$y = \bar{x}$ na L", „$y = x^*$ na L" atd.

Příkladem unární operace na množině všech reálných čísel R je operace „tvoření opačného čísla k danému číslu", „$y = -x$ na R".

V neprázdné množině M existuje ke každé její podmnožině A právě jedna podmnožina A' množiny M, zvaná doplněk množiny A. Na množině $\widehat{M}$ všech podmnožin množiny M je tedy definována unární operace; nazývejme ji „tvoření doplňku" nebo stručněji „doplněk".

Na množině H pravdivostních hodnot výroků jsme zavedli tabulkou 8 další unární operaci „doplněk".

Ukažme si, co mají tyto unární operace zavedené na $\widehat{M}$ a na H společného. Vyslovme nejprve definici unární operace „doplněk" na množině L.

Předpokládejme, že na množině L jsou definovány dvě komutativní binární operace „$u = x * y$" a „$u = x \circ y$", ke každé z nichž existuje právě jeden neutrální prvek. Označme tyto prvky postupně e^*, e°.

Unární operaci „$y = x'$" definovanou na L nazveme „doplněk" právě tehdy, když pro všechna $x \in L$ platí

$$x * x' = e^\circ \quad a\ zároveň \quad x \circ x' = e^*$$

Vrátíme-li se k definici unární operace zavedené na $\widehat{M}$, je zřejmé, že je v souladu s definicí operace „doplněk" právě uvedenou. Stačí si pouze uvědomit, že pro každé $A \in \widehat{M}$ platí $A \cup A' = M$ a zároveň $A \cap A' = \varnothing$; přitom množiny M, $\varnothing$ jsou postupně neutrální prvky operací průnik a sjednocení.

Právě tak i unární operace na H definovaná tabulkou 8 splňuje všechny požadavky definice operace „doplněk" na L. Uvědomme si, že je $0 + 1 = 1$ (1 je neutrální prvek operace násobení na H) a zároveň $0 . 1 = 0$ (0 je neutrální prvek operace sčítání na H).

Rozhodněme ještě, zda také unární operace „$y = -x$ na R" je operací „doplněk". V tom případě by muselo pro všechna $x \in R$ platit

$$x + (-x) = 1 \quad \text{a zároveň} \quad x . (-x) = 0 ,$$

což zřejmě splněno není.

Cvičení

1. Zkoumejte u následujících operací, zda jsou komutativní; asociativní. Určujte všechny neutrální prvky.

a) $u = x - y$ na R

b) $u = x + 2y$ na R

c) $u = x^2 + y^2$ na R

d) $u = x^y$ na množině všech přirozených čísel

2. Na množině $C = \{2, 3\}$ jsou definovány binární operace těmito tabulkami:

$x * y$:

$x \backslash y$	2	3
2	3	2
3	3	2

$x \circ y$:

$x \backslash y$	2	3
2	2	3
3	3	3

Rozhodněte, které z nich jsou komutativní; asociativní; určujte všechny neutrální prvky jednotlivých operací. Rozhodněte, zda operace „$u = x * y$ na C" je distributivní vzhledem k operaci „$u = x \bigcirc y$ na C".

3. Definujme na množině všech reálných čísel R dvě binární operace:

a) Operaci „$u = \max(x, y)$" (čtěte „u je rovno maximu x, y") takto:

Pro všechna reálná čísla x, y je $\max(x, y) = x$, právě když je $x \geqq y$, a $\max(x, y) = y$, právě když je $x \leqq y$.

b) Operaci „$u = \min(x, y)$" (čtěte „u je rovno minimu x, y") takto:

Pro všechna reálná čísla x, y je $\min(x, y) = x$, právě když je $x \leqq y$, a $\min(x, y) = y$, právě když je $x \geqq y$.

Rozhodujte, které z těchto operací jsou komutativní; asociativní. Zkoumejte, zda operace „$u = \max(x, y)$ na R" je distributivní vzhledem k operaci „$u = \min(x, y)$ na R"; dále, zda i operace „$u = \min(x, y)$ na R" je distributivní vzhledem k operaci „$u = \max(x, y)$ na R". Rozhodujte o existenci neutrálních prvků jednotlivých operací.

4. Uvažujte binární operace „$u = \max(x, y)$ na D", „$u = \min(x, y)$ na D", kde $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Řešte tytéž úkoly jako v příkladě 3. Pokuste se dále řešit tento problém: Lze definovat na množině D unární operaci tak, aby splňovala vlastnosti operace „doplněk"?