5. kapitola. Dvouprvková Booleova algebra

In: Oldřich Odvárko (author): Booleova algebra. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 51–66.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403771

5. kapitola

DVOUPRVKOVÁ BOOLEOVA ALGEBRA

V definici Booleovy algebry $(B, +, ., ')$ je zaručena existence neutrálních prvků 0 a 1 vzhledem k jednotlivým binárním operacím. Odtud plyne, že Booleova algebra musí obsahovat aspoň dva prvky vzájemně různé.

Určujte nyní podle axiómů a vět (1)—(25) součty a součiny prvků 0 a 1, utvořte k 0 a 1 jejich doplňky.

Jestliže jste počítali správně, musí vaše výpočty formálně souhlasit s výsledky, k nimž jsme dospěli ve 2. kapitole (tabulky 6 až 8). Odtud ale ihned plyne, že množina $D = \{0,1\}$ spolu s operacemi definovanými tabulkami 6, 7 a 8 je Booleova algebra. Nazýváme ji *dvouprvková Booleova algebra* a označujeme $(D, +, ., ')$.

Jestliže prvky 0,1 konkretizujeme jako pravdivostní hodnoty výroků, dospějeme zpět k algebře pravdivostních hodnot, jakožto modelu dvouprvkové Booleovy algebry.

V „číselné algebře" umíte jistě řešit řadu typů rovnic a jejich soustav. Definovali jste také pojem funkce, seznámili jste se s různými příklady funkcí, jež jsou určeny rovnicí nebo tabulkou. V této kapitole ukážeme, jak lze zavést pojmy rovnice a funkce v Booleově algebře, a užijeme jich při řešení úloh v $(D, +, ., ')$.

Nejprve si připomeňme několik pojmů z logiky. Na příkladech jste se mnozí seznámili s tzv. *výrokovými formami*. Výrazy „$\sqrt{x} \geqq 2$“, „$x + 1 = x$“ jsou příklady výrokových forem o jedné proměnné x, „trojúhelník p je shodný s trojúhelníkem r“ je výrokovou formou o dvou proměnných p, r, „$(xy + xz^3).x = z^{10}$“ je výroková forma o třech proměnných x, y, z. Výrokové formy lze v podstatě charakterizovat jako výrazy obsahující jednu nebo více proměnných s touto vlastností: dosadíme-li za všechny proměnné vhodné konstanty (pevně zvolené objekty), dostaneme výrok.

Všimněme si nyní blíže výrokové formy „$\sqrt{x} \geqq 2$“. Zvolme nějakou množinu, například množinu všech reálných čísel R. Dosazujeme-li za proměnnou x jednotlivé prvky množiny R, dostaneme buď výraz, který nemá smysl (například po dosazení čísla —2), nebo výrok — a to buď pravdivý (např. po dosazení čísla 7,6), nebo nepravdivý (např. po dosazení čísla 1).

Určeme množinu P všech těch reálných čísel, pro každé z nichž platí: dosadíme-li je za x do uvažované výrokové formy, dostaneme pravdivý výrok. Lehce zjistíme, že P je rovno množině všech reálných čísel, jež jsou větší nebo rovna číslu 4. Množinu P nazveme obor pravdivosti výrokové formy $\sqrt{x} \geqq 2$ v množině R.

Obecně definujeme obor pravdivosti dané výrokové formy o jedné proměnné v množině A takto: *Je dána výroková forma $V(x)$ o jedné proměnné x a neprázdná množina A. Oborem pravdivosti výrokové formy $V(x)$ v množině A nazýváme množinu P všech těch prvků z množiny A, pro každý z nichž platí: dosadíme-li jej do $V(x)$ za proměnnou x, dostaneme pravdivý výrok.*

Pokuste se nyní samostatně zformulovat pojmy „obor pravdivosti výrokové formy o dvou proměnných x_1, x_2 v množině $A_1 \times A_2$“; „obor pravdivosti výrokové formy o třech proměnných x_1, x_2, x_3 v množině $A_1 \times A_2 \times A_3$"*).

Zabývejme se nyní výrokovou formou „$x+1 = x$". Dosazujme za x postupně jednotlivé prvky z množiny $D = \{0,1\}$.

Dosadíme-li za x prvek 0, dostaneme výrok „$0+1 = 0$" o rovnosti prvků z množiny D, který je nepravdivý.

Dosadíme-li všude za x prvek 1, dospějeme opět k výroku o rovnosti prvků z D „$1+1 = 1$", který je v tomto případě pravdivý.

Uvažovaná výroková forma je příkladem tzv. booleovské rovnice o jedné proměnné x.

Nechť je dána Booleova algebra $(B, +, ., ')$. *Výrokovou formu o jedné proměnné x nazveme booleovská rovnice (stručněji „rovnice") o jedné proměnné x, právě když platí: dosadíme-li do této výrokové formy všude za x libovolný prvek množiny B, dostaneme výrok o rovnosti prvků z B.*

Termín „*řešte rovnici o jedné proměnné x v množině B*" budeme chápat jako úkol určit obor pravdivosti dané rovnice v množině B — a to pokud možno výčtem (tj. vypsáním všech prvků). Každý prvek z oboru pravdivosti dané rovnice v množině B budeme nazývat „řešení rovnice". Ve stejném smyslu jako v číselné algebře budeme užívat také termínů „*pravá strana rovnice*", „*levá strana rovnice*".

Zkuste sami vyslovit definici booleovské rovnice například o dvou (třech) proměnných.

---

*) Ve 3. kapitole jsme definovali kartézský součin $K \times L$ množin K, L. Obdobně lze definovat kartézský součin tří množin K, L, M takto: $K \times L \times M = (K \times L) \times M$. Analogicky tomu je i v případě čtyř množin, obecně n množin, kde n je libovolné přirozené číslo, $n \geq 2$.

Co budeme rozumět pod termínem „*řešte soustavu rovnic o dvou proměnných x, y v množině $B \times B$*“?

Uveďme několik ukázek řešení rovnic a jejich soustav v dvouprvkové Booleově algebře $(D, +, ., ')$. Na místě množiny B v definici booleovské rovnice uvažujeme tedy speciálně množinu D.

Příklad 18: Řešte rovnici $((x'+1)'+(x+0))'=0$ o jedné proměnné x v množině D.

Řešení: Naším úkolem je určit všechny prvky z množiny D, pro něž po dosazení za proměnnou x dostaneme pravdivý výrok. Vzhledem k tomu, že D je pouze dvouprvková množina, můžeme zvolit metodu postupného „prověřování“ jednotlivých prvků množiny D. Užijeme k tomuto účelu tabulek 6 až 8 z 2. kapitoly.

Označme levou stranu dané rovnice písmenem L a dosaďme do ní nejprve za proměnnou x prvek 0. Dostaneme pak postupně:

$$\mathrm{L} = ((0'+1)'+(0+0))' = ((1+1)'+0)' = (1'+0)' = $$
$$= (0+0)' = 1$$

Pravá strana rovnice je rovna 0. Výrok $1 = 0$ není pravdivý, proto prvek 0 není řešením rovnice.

Dále dosaďme do levé strany rovnice za x prvek 1. Postupně získáváme $\mathrm{L} = ((1'+1)'+(1+0))' = ((0+ +1)'+1)' = (0+1)' = 1' = 0$. Výrok $0 = 0$ je pravdivý, prvek 1 je řešením dané rovnice.

Množina všech řešení naší rovnice v množině D je tedy $\{1\}$.

Rovnici můžeme řešit ještě jiným způsobem. Upravíme nejprve pomocí axiómů a vět (1)—(25) její levou stranu. Dostaneme

$$L = ((x'+1)'+(x+0))' = (1'+x)' = (0+x)' = x'$$

Přecházíme tedy k úkolu určit všechna $x \in D$, pro něž platí $x' = 0$. Zřejmě je $x' = 0$, právě když $x = 1$. Množina všech řešení uvažované rovnice je $\{1\}$. Tento závěr je v souladu s výsledkem, k němuž jsme dospěli při řešení první metodou.

Příklad 19: Řešte soustavu rovnic

$$(x+y').(x'+y) = x \tag{26}$$

$$x+y = x \tag{27}$$

o dvou proměnných x, y v množině $D \times D$.

Řešení: Naším úkolem je určit všechny uspořádané dvojice z množiny $D \times D = \{[0,0], [1,0], [0,1], [1,1]\}$, pro každou z nichž platí: dosadíme-li její první složku za x a druhou složku za y do rovnic soustavy, budou oba získané výroky pravdivé.

Opět jako v předešlém příkladě bychom mohli postupně „prověřit" každý ze čtyř prvků množiny $D \times D$. Řešení touto metodou ponechávám vaší vlastní iniciativě.

Zde vyřešíme soustavu rovnic užitím axiómů a vět (1) až (25). Zabývejme se nejprve rovnicí (26). Upravujme její levou stranu:

$$(x+y').(x'+y) = x$$

$$xx'+y'x'+xy+y'y = x$$

$$xy+x'y' = x$$

Nyní použijeme větu (24); dospějeme k rovnici

$$(xy+x'y').x'+(xy+x'y')'.x = 0$$

Zjednodušujme postupně její levou stranu takto:

$$\begin{aligned} xyx'+x'y'x'+(x'+y').(x+y).x &= 0 \\ x'y'+(x'+y').x &= 0 \\ x'y'+xy' &= 0 \\ y'.(x+x') &= 0 \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

Přitom $y' = 0$, právě když $y = 1$. Dosaďme za y do rovnice (27) prvek 1; dostaneme

$$x+1 = x$$

Přitom $x+1 = x$ platí, právě když $x = 1$.

Z dosud provedených úvah plyne tento závěr: Je-li dvojice $[x, y]$ řešením naší soustavy, pak musí být $x = 1$ a zároveň $y = 1$.

Prověřme zkouškou dosazením, zda dvojice [1,1] je skutečně řešením soustavy.

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (1+1').(1'+1) = (1+0).(0+1) = 1 \\ P_1 &= 1 \end{aligned}\right\} L_1 = P_1$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 &= 1+1 = 1 \\ P_2 &= 1 \end{aligned}\right\} L_2 = P_2$$

Množina všech řešení dané soustavy rovnic je rovna $\{[1,1]\}$.*)

---

*) Uvádíme-li řešení rovnice nebo soustavy rovnic o n proměnných ($n \geqq 2$) ve tvaru uspořádané n-tice, je „uspořádání“ provedeno tak, že jednotlivé složky odpovídají hodnotám proměnných seřazených abecedně.

Příklad 20: Řešte rovnici $(xy')'.(zx')'.(yz')'=1$ o třech proměnných x, y, z v množině $D \times D \times D$.

Řešení: 1) Můžeme postupně prověřovat všechny prvky z $D \times D \times D$, tj. všechny uspořádané trojice prvků z množiny D.

2) K řešení příkladu můžeme také použít „tabulkové metody", kterou jsme se zabývali ve 2. kapitole při určování pravdivostních hodnot výroků:

x	y	z	x'	y'	z'	xy'	$(xy')'$	zx'	$(zx')'$	yz'	$(yz')'$	$(xy')'.(zx')'.(yz')'$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Z tabulky je ihned vidět, že množina všech řešení dané rovnice je rovna $\{[0, 0, 0], [1, 1, 1]\}$.

3) Užijme axiómů a vět (1)—(25) k úpravě levé strany rovnice:

$$(xy')'.(zx')'.(yz')' = (x'+y).(z'+x).(y'+z) = (x'z'+ +yz'+x'x+yx).(y'+z) = x'z'y'+yz'y'+yxy'+x'z'z+ yz'z+yxz = xyz+x'y'z'$$

Přecházíme tak k řešení rovnice $xyz+x'y'z'=1$ o třech proměnných x, y, z v množině $D \times D \times D$.

Z tabulky 6 pro sčítání plyne

$$xyz = 1 \quad \text{nebo} \quad x'y'z' = 1$$

Z věty (23) dále dostáváme

$$x = 1 \text{ a } y = 1 \text{ a } z = 1 \quad \text{nebo} \quad x' = 1 \text{ a } y' = 1 \text{ a } z' = 1$$

čili

$$x = 1 \text{ a } y = 1 \text{ a } z = 1 \quad \text{nebo} \quad x = 0 \text{ a } y = 0 \text{ a } z = 0$$

Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

Příklad 21: Řešte rovnici $x + a = 1$
o proměnné $x \in D$ a parametru $a \in D$.

Řešení: Pro $a = 0$ je množina všech řešení rovna $\{1\}$.
Pro $a = 1$ je množina všech řešení rovna $\{0,1\}$.

Příklad 22: Řešte rovnici $ax + bx' = 1$
o proměnné $x \in D$ a parametrech a, b z množiny D.

Řešení: Dosazujme za a, b jednotlivé prvky z množiny D a řešme vždy rovnici pro takto zvolené hodnoty parametrů.

1. $a = 1, b = 1$:
$$\begin{aligned} 1.x + 1.x' &= 1 \\ x + x' &= 1 \\ x = 0 \text{ nebo } x &= 1 \end{aligned}$$

2. $a = 1, b = 0$:
$$\begin{aligned} 1.x + 0.x' &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

3. $a = 0, b = 1$:
$$\begin{aligned} 0.x + 1.x' &= 1 \\ x' &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

4. $a = 0, b = 0$:
$$\begin{aligned} 0.x + 0.x' &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Shrňme si na závěr získané výsledky přehledně v tabulce:

Parametry a, b	Množina všech řešení
$a = 1$, $b = 1$	$\{0,1\}$
$a = 1$, $b = 0$	$\{1\}$
$a = 0$, $b = 1$	$\{0\}$
$a = 0$, $b = 0$	$\emptyset$

Zkuste ještě vyřešit tento příklad „tabulkovou metodou".

Zabývejme se nyní tzv. booleovskými funkcemi. *Uvažujme Booleovu algebru* $(B, +, ., ')$; *nechť* C *je neprázdná podmnožina množiny* B.

Booleovskou funkcí (stručněji „funkcí") o jedné proměnné budeme nazývat každé zobrazení množiny C *do množiny* B.

Booleovské funkce budeme označovat f, g, h.... Uvažujme funkci f o jedné proměnné x. Jestliže dvojice $[x_0, y_0] \in f$, nazveme x_0 *hodnotou proměnné* x, y_0 *hodnotou funkce* f *(funkční hodnotou* f*) pro hodnotu* x_0 *proměnné* x. Namísto „$[x_0, y_0] \in f$" budeme častěji užívat zápisu „$y_0 = f(x_0)$".

Funkce může být určena tak, že jsou vypsány všechny její prvky. Příkladem je třebas funkce $g = \{[1,0], [0,1]\}$. Tuto funkci lze zapsat také takto:

x	$g(x)$
1	0
0	1

Říkáme pak, že g je určena *tabulkou*.

Funkci g můžeme také definovat jako obor pravdivosti rovnice $y = x'$ v množině $D \times D$. Přesvědčte se o tom! Říkáme pak stručně, že *g je určena rovnicí* $y = x'$, kde proměnná x je prvkem množiny D, a zapisujeme $g : y = x'$, kde $x \in D$.

Formulujte sami definici booleovské funkce o dvou (třech, čtyřech atd.) proměnných.

V dalším se omezme jenom na případy funkcí v dvouprvkové Booleově algebře. Budeme zkoumat zobrazení D do D (funkce jedné proměnné), zobrazení $D \times D$ do D (funkce dvou proměnných), obecně zobrazení $\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{n\text{-krát}}$ do D (funkce n proměnných).
Smluvme se, že namísto zápisu „$g : y = x'$, kde $x \in D$“ budeme psát stručněji jenom „$g : y = x'$“; obdobně budeme uvádět takto zkrácené zápisy funkcí i v dalších případech.

Příklad 23: Je dána funkce $f : y = (xz + x').z'$. Určete její funkční hodnotu $f(x, z)$ pro $x = 1$, $z = 0$, tj. najděte $f(1,0)$.
Řešení: $f(1,0) = (1.0 + 1').0' = (0 + 0).1 = 0$

Příklad 24: Je dána funkce $h : y = x + uv'$. Určete ji tabulkou!

Řešení:

x	u	v	v'	uv'	$h(x, u, v)$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

Budeme říkat, že *funkce* f, g *o jedné proměnné* (tj. zobrazení D do D) *jsou sobě rovny*, právě když pro každé $x \in D$ je $f(x) = g(x)$. Zapisujeme „$f = g$“. Nejsou-li funkce f, g sobě rovny, budeme říkat, že jsou *různé*, a psát „$f \neq g$“.

Vyslovte obdobně definici pro funkce o dvou (třech atd.) proměnných.

Příklad 25: Určete tabulkami a rovnicemi všechny vzájemně různé funkce o jedné proměnné x.

Řešení: Zapište každou z funkcí výpisem všech jejích prvků a srovnejte své závěry s dále uvedenou tabulkou.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Určeme každou z těchto čtyř funkcí rovnicí:

$$
\begin{aligned}
f_1 &: y = x \\
f_2 &: y = x' \\
f_3 &: y = 1 \\
f_4 &: y = 0
\end{aligned}
$$

Přesvědčte se sami o správnosti těchto výsledků dosazováním do příslušných rovnic a porovnáním s tabulkovým vyjádřením funkcí.

Příklad 26: Určete tabulkami a rovnicemi všechny vzájemně různé funkce o dvou proměnných x, y.

*Řešení:**)

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$f_1(x, y)$	0	0	0	0
$f_2(x, y)$	0	0	0	1
$f_3(x, y)$	0	0	1	0
$f_4(x, y)$	0	1	0	0
$f_5(x, y)$	1	0	0	0
$f_6(x, y)$	0	0	1	1
$f_7(x, y)$	0	1	0	1
$f_8(x, y)$	0	1	1	0
$f_9(x, y)$	1	0	0	1
$f_{10}(x, y)$	1	0	1	0
$f_{11}(x, y)$	1	1	0	0
$f_{12}(x, y)$	0	1	1	1
$f_{13}(x, y)$	1	0	1	1
$f_{14}(x, y)$	1	1	0	1
$f_{15}(x, y)$	1	1	1	0
$f_{16}(x, y)$	1	1	1	1

Přesvědčte se, že všechny uvedené funkce f_1 až f_{16} jsou skutečně vzájemně různé a že jsme na žádnou funkci o dvou proměnných nezapomněli.

Určujme postupně jednotlivé funkce rovnicemi. Snadno zjistíme, že je $f_1 : z = 0$. Určit rovnicí funkci f_2 nám dá už asi více práce. Po určité námaze a hledání dospějeme k závěru, že je $f_2 : z = x'y'$. Neexistuje nějaká věta, která by naši práci urychlila?

Dá se dokázat, že pro každou funkci f o dvou proměnných x, y platí:

$$f : z = f\,(1,1) . xy + f\,(1,0) . xy' + f\,(0,1) . x'y + f\,(0,0) . x'y'$$

Přesvědčme se, zda výsledky, k nimž jsme dospěli

*) Úprava tabulky je poněkud neobvyklá; důvod tkví v malém formátu publikace.

u funkcí f_1 a f_2, jsou v souladu s právě uvedeným tvrzením.

Dosaďme za $f(1,1), \ldots, f(0,0)$ funkční hodnoty funkce f_1 ze shora uvedené tabulky. Dostaneme

$$f_1 : z = 0.xy + 0.xy' + 0.x'y + 0.x'y'$$

a po úpravě

$$f_1 : z = 0$$

Aplikujeme-li větu na funkci f_2, získáváme

$$f_2 : z = 0.xy + 0.xy' + 0.x'y + 1.x'y'$$

a po úpravě

$$f_2 : z = x'y'$$

Tento závěr opět souhlasí s dříve uvedeným vyjádřením funkce f_2 rovnicí.

Pomocí shora uvedené věty můžeme dále snadno určit například

$f_3 : z = x'y$, $f_4 : z = xy'$, $f_5 : z = xy$, $f_6 : z = x'y + x'y'$ (a po úpravě $f_6 : z = x'$).

Zbývajících deset funkcí určete rovnicemi už každý samostatně.

Tvrzení uvedené v předchozím příkladě lze zobecnit pro funkce o n proměnných, kde n je libovolné přirozené číslo. Dá se dokázat, že *pro každou funkci g o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$g : u = g(1,1, \ldots, 1).x_1x_2. \ldots .x_n + g(1,1, \ldots, 1,0).$$
$$.x_1x_2. \ldots .x_{n-1}x'_n + \ldots + g(0,0, \ldots, 0,1).x'_1x'_2. \ldots .$$
$$.x'_{n-1}x_n + g(0,0, \ldots, 0,0).x'_1x'_2. \ldots .x'_{n-1}x'_n$$

Odtud například plyne, že ***každou funkci h o třech proměnných x, y, z lze vyjádřit takto:***

$h : u = h(1, 1, 1).xyz + h(1, 1, 0).xyz' + h(1, 0, 1).$
$.xy'z + h(0, 1, 1).x'yz + h(1,0,0).xy'z' + h(0,1,0).x'yz' +$
$h(0, 0, 1).x'y'z + h(0, 0, 0).x'y'z'$

Příklad 27: Funkce k o třech proměnných x, y, z je určena touto tabulkou:

x	y	z	$k(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Určete ji rovnicí.
Řešení: Pro funkci k platí

$$k : u = xyz + xyz' + x'yz + x'y'z'$$

Po úpravě pravé strany rovnice dostaneme

$$k : u = xy + x'.(yz + y'z')$$

Cvičení

1. Řešte rovnici $x + x' = x.x' + x$ o jedné proměnné $x \in D$.

2. Řešte soustavu rovnic $x + 1 = x$
$x \,.\, 1 = 0$
o jedné proměnné x v množině D.

3. Řešte soustavu rovnic $x+y'+xy' = x$

$$xy = x'+y$$

o proměnných x, y v množině $D \times D$.

4. Řešte rovnici $(xyz)' + (xz+u') = x'+u$ o proměnných x, y, z, u v množině $D \times D \times D \times D$.

5. Řešte rovnice o proměnné $x \in D$ a parametrech a, b, c z množiny D.

a) $ax'+bx+c = 0$ b) $x+x'.a = 1$

c) $ax+bx' = c$ d) $(x'+b).(x'+a).x+a'x = 0$

6. Řešte soustavu rovnic $ax+by' = 1$

$$ay+bx' = 1$$

o proměnných x, y z množiny D a parametrech a, b z D.

7. *) Určete tabulkami tyto funkce:

a) $f_1 : y = (xz'+x'z).u$

b) $f_2 : y = (xz+yz)+uv'.(x'+z')$

8. Určete rovnicí každou z funkcí f_1, f_2, f_3, jež jsou definovány tabulkami.

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0

*) V příkladech 7—10 uvažujeme všechny funkce v dvouprvkové Booleově algebře.

9. Rozhodněte, zda jsou sobě rovny funkce

$$g_1 : y = xu + x' . (u+v)$$
$$g_2 : y = x . (v+u)' + x'u$$

10. Kolik existuje vzájemně různých funkcí jedné; dvou; tří; čtyř proměnných? Vyslovte hypotézu o počtu všech vzájemně různých funkcí o n proměnných pro libovolné přirozené číslo n a potom ji dokažte!