O aplikáciach matematiky

1. kapitola. Úvod

In: Ján Černý (author): O aplikáciach matematiky. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 3–16.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403839

1. kapitola

ÚVOD

1.1. Čo je aplikovaná matematika?

Takáto otázka je na prvý pohľad prirodzená, patrí sa najprv vymedziť matematickú disciplínu, o ktorej bude reč. Lenže pozor! Aplikovanú matematiku nemožno pokladať za matematickú disciplínu s podobným postavením, ako je algebra, teória čísel, alebo matematická štatistika. Nemožno ju vymedziť ani vymenovaním matematických objektov (štruktúr), ktoré skúma, ani popisom metód, ktoré pri svojej práci používa. Hoci sa teda na niektorých univerzitách stretávame s katedrou aplikovanej matematiky vedľa katedry algebry, geometrie, štatistiky apod., predmet, ktorý táto katedra študuje a vyučuje je podstatne odlišný. Na niektorých zahraničných univerzitách dali preto prednosť tomu, že majú len dva ústavy — ústav matematiky „čistej" (v angličtine „pure") a aplikovanej (applied). Prvý z nich sa potom prípadne delí na katedry jednotlivých matematických disciplín tak, ako ich poznáme.

Ak nemožno aplikovanú matematiku charakterizovať ani štruktúrami, ani metódami, ako ju teda možno odlíšiť od matematiky čistej?

Spôsob odlíšenia je podobný, ako pri množine V bodov (x, y, z) trojrozmerného priestoru, pre ktoré platí nerovnosť $a \leqq z \leqq b$ („vrstva"). Body ktoré do V padnú možno od tých druhých odlíšiť len podmienkou pre tretiu súradnicu, prvé dve nám tu nepomôžu. Podobne si môžeme predstaviť, že každá matematická činnosť je charakterizovaná viacerými „súradnicami", napríklad štruktúrou, s ktorou pracuje, metódou, ktorú používa, spôsobom využitia výsledku, ktorý chce dosiahnúť apod. Pritom činnosti „aplikované" a „čisté" nemožno rozlíšiť prvými dvoma súradnicami, ale treťou! Možno preto povedať, že

aplikovaná matematika, na rozdiel od matematiky čistej, sa snaží štúdiom matematických štruktúr a použitím matematických metód dosiahnúť výsledky, ktoré sa budú využívať mimo matematiky.

Vedných odborov, v ktorých sa matematika aplikuje, je veľmi veľa; iste oveľa viac, ako tých, v ktorých sa nevyužíva. Ku dávno známym aplikáciam matematiky vo fyzike pribudla chémia, biológia, medicína, strojníctvo, stavebníctvo, ekonómia, doprava a mnohé iné.

Aplikovaná matematika sa vďaka tejto skutočnosti môže rozdeľovať z dvoch hľadísk: podľa matematickej disciplíny, z ktorej berie štruktúry a metódy, alebo podľa odboru, v ktorom sa jej výsledky uplatňujú. My sa v ďalšom texte budeme pridržiavať prvého hľadiska.

1.2. Aplikovaná matematika ako povolanie

V niekoľkých posledných desaťročiach sa prudko mení spektrum pracovísk, na ktorých matematici môžu nájsť uplatnenie. Do konca II. svetovej vojny temer všetci pracovali ako stredoškolskí učitelia (s výnimkou malého počtu na vysokých školách, prípadne v bankách, poisťovniach apod.). V prvom desaťročí po vojne sa búrlivo rozvíjajú vysoké školy, pričom najmä na ich technickom smere bolo treba veľa prednášateľov a asistentov matematiky.

Mimo školstva však nepracoval skoro žiaden matematik.

Koncom päťdesiatych rokov sa situácia mení, rozvíja sa vedecko-výskumná základňa nášho štátu a v nej matematici nachádzajú stále širšie možnosti uplatnenia. Je to po prvý raz v nie zanedbateľnej miere i v odbore aplikovanej matematiky. Pre zaujímavosť možno uviesť, že roku 1958 prijali na SAV prvého matematika na iný ústav ako matematický (bolo to na Laboratórium teoretickej a aplikovanej mechaniky, terajší Ústav technickej kybernetiky SAV) a o niekoľko rokov ich na mimomatematických pracoviskách SAV pracovalo už niekoľko desiatok.

Napokon, v šesťdesiatych rokoch sa objaví ďalšia, búrlivo rastúca sféra uplatnenia aplikovaných matematikov — výpočtové strediská. Ich kádrové potreby sú také veľké, že doterajší „producenti" matematikov — prírodovedecké, resp. matematicko-fyzikálne fakulty — ich nestačia uspokojiť a tak sa výchovou odborníkov, ktorých možno považovať viac-menej za aplikovaných matematikov, zaoberajú i ďalšie vysoké školy (Vysoká škola ekonomická a Vysoká škola technická v Bratislave, Vysoká škola dopravná v Žiline a iné.)

Pretože, ako uvidíme neskôr, je práca aplikovaných matematikov odlišná od práce „čistých" matematikov, je aj ich študijný program iný. V zásade možno povedať, že aplikovaný matematik by mal mať znalosti širšie, i keď menej hlboké; tak aby vedel formulovať úlohy vo všetkých významnejších matematických disciplínach.

1.3. Ako pracujú aplikovaní matematici

Ako sme už spomínali, poslaním aplikovanej matematiky je riešiť problémy, ktoré sú inšpirované mimo matematiky a tam sa aj uplatní výsledok ich riešenia.

Uvedieme si jednoduchý príklad takejto úlohy.

Na aplikovaného matematika sa obrátil ekonóm s prosbou, aby mu pomohol pri riešení úlohy, ktorej cieľom je stanoviť najvýhodnejšiu výrobnú kapacitu pekární a tehelní. Jde o továrne, ktoré vyrábajú jeden druh výrobku, alebo niekoľko príbuzných druhov. Potreba týchto výrobkov je približne rovnomerná po celom obývanom území nášho štátu, pretože všade sa stavia a všade sa je chlieb.

Problém je v tom, že malá výrobňa vyrába pomerne draho, ale pretože zásobuje len najbližšie okolie, dopravné náklady sú malé. Naopak, veľká výrobňa vyrába lacno, ale zásobuje väčšie územie a tým rastú dopravné náklady. Treba určiť, kedy je súčet výrobných a dopravných nákladov na jednu tonu minimálny.

Matematik porozumel, o čo v úlohe ide, ale aby ju mohol presne formulovať, požiadal ekonóma, aby mu presne opísal

1. ako závisia výrobné náklady jednej tony od toho, koľko výrobkov denne továreň vyrába,

2. ako závisia dopravné náklady od prepravovaného množstva a od vzdialenosti,

3. koľko ton výrobkov sa v priemere spotrebuje denne na 1000 obyvateľov.

Ekonóm odpovedal, že

1. Ak vyrába závod x ton výrobkov denne, výrobné náklady (celkové) možno približne vyjadriť lineárnou funkciou $ax + b$, teda na jednu tonu $a + b/x$ Kčs.

2. Preprava x ton na vzdialenosť d km stojí približne cxd Kčs.

3. Na 1000 obyvateľov sa spotrebuje denne v priemere s ton výrobkov, teda pri priemernej hustote h obyvateľov na 1 km^2 môžeme rátať s priemernou spotrebou $sh/1000$ ton výrobkov denne na 1 km^2.

Matematik uvážil, že sotva bude môcť brať do úvahy tvar územia, ktoré továreň zásobuje, pretože toto možno sotva vopred určiť. Rozhodol sa preto pre jednoduchosť predpokladať, že toto územie je kruh a že továreň je v jeho strede. Priemerná vzdialenosť bodu kruhu od stredu je $2r/3$, kde r je polomer kruhu. Priemerná cena dopravy jednej tony je potom $2cr/3$.

Ak má továreň dennú výrobu x ton výrobkov, pokryje nimi 1000 x/sh km², teda kruh o polomere r, pre ktorý

$$\pi r^2 = \frac{1000x}{sh}$$

čiže

$$r = \sqrt{\frac{1000x}{\pi sh}}$$

a priemerné dopravné náklady na 1 tonu budú

$$\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{1000x}{\pi sh}} = \frac{2c\sqrt{1000}}{3\sqrt{\pi sh}}\sqrt{x}$$

čo môžeme skrátene označiť $g\sqrt{x}$.

Výrobné náklady na jednu tonu budú v tomto prípade $a + b/x$ a celkové náklady spolu $y = a + b/x + g\sqrt{x}$.

Matematická formulácia úlohy je teda nasledovná: nájsť minimum funkcie

$$y = a + \frac{b}{x} + g\sqrt{x}$$

na množine kladných čísel (kladných preto, že vyrábať treba).

Matematik ju riešil bežným postupom: Derivoval y podľa x a našiel také x, pre ktoré $y' = 0$:

$$y' = \frac{-b}{x^2} + \frac{g}{2\sqrt{x}} = 0$$

z čoho

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{2b}{g}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{g}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9\pi b^2 sh}{1000c^2}}$$

Potom pomocou druhej derivácie zistil, že táto sa pre toto x rovná $3g^2/8b$, čo je kladné číslo, teda y má v bode x lokálne minimum. Keďže x bolo jediné také, kde $y' = 0$, je x hľadaná denná výroba v tonách.

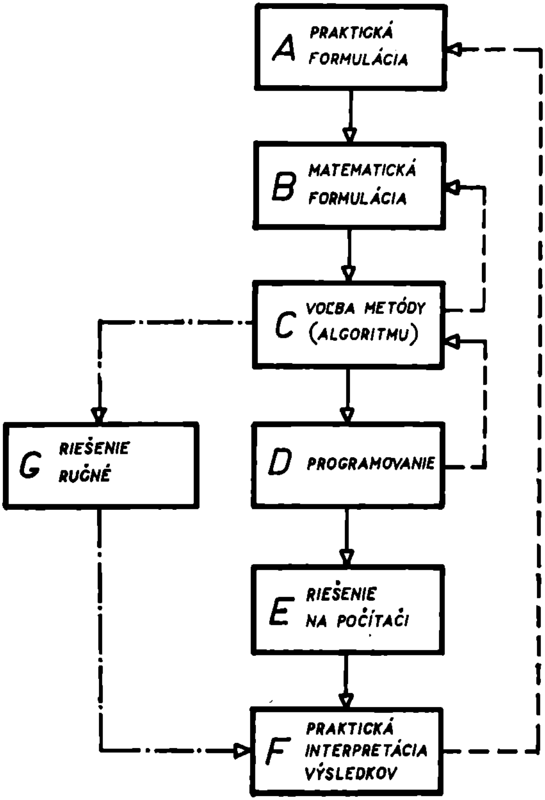
Riešenie väčšiny takýchto úloh možno rozdeliť na niekoľko štandardných fáz, ktoré vidíme na obrázku 1. Plná čiara tu značí obvyklý postup, bodkočiarkovaná postup bez využitia počítača a čiarkovaná spätné väzby, ktoré znamenajú, že niekedy treba opraviť výsledok predchádzajúcej fázy na základe nasledujúcej (napr. vo fáze D zistíme, źe navrhnutou metódou by počítač úlohu riešil tri bilióny rokov, tak musíme zmeniť metódu prípadne až formuláciu úlohy a pod.).

Aplikovaní matematici (teoreticky) by mali vykonávať činnosti B a C, ale prax ukazuje, že ich spolupráca je nutná aj pri A, D, F, G a istý dohľad aj pri E. Sledujú teda úlohu od jej vzniku až do úplného vyriešenia i s využitím výsledkov. Fáza A, ktorú by (teoreticky) mali vykonávať tí, ktorí na problém vo svojej práci narazili, spočíva zväčša v dvoch krokoch:

1.3.1. Definícia množiny prípustných riešení.

1.3.2. Stanovenie kritéria kvality a optimality, ktoré umožní vybrať spomedzi prípustných riešení najlepšie.

Krok 1.3.1 spočíva vlastne v tom, že sa stanoví základný priestor, ktorého časťou je množina riešení a ohraničenia, ktoré jej prvky musia spĺňať. Tento krok zvyčajne nerobí ťažkosti pracovníkom iných odborov a len niekedy vyžaduje spoluprácu matematika.



Obr. 1

Krok 1.3.2 však býva prekvapujúco kameňom úrazu. Ak totiž chceme, aby existovalo optimálne riešenie, musíme mať na množine riešení dané usporiadanie podľa kvality a to buď lineárne, alebo čiastočné; v každom prípade však také, aby v množine existoval maximálny (minimálny) prvok. Toto usporiadanie by malo byť určené práve pomocou kritéria kvality a optimality. Nematematici však formulujú toto kritérium nevhodne, tak, že množinu riešení nemožno pomocou neho usporiadať žiadúcim spôsobom.

Najčastejšia chyba, ktorej sa „praktici" dopúšťajú, je, že nezadávajú jedno ale viac kritérií, a to často protichodných. Napríklad žiadajú, aby navrhovaný výrobok bol čo najľahší, najpevnejší a najlacnejší — hoci je zrejmé, že čím je výrobok ľahší a pevnejší, tým je drahší (musíme použiť drahé suroviny), čím je lacnejší a pevnejší, tým je i ťažší atď. Matematik potom musí praktika namáhavo presvedčovať, že je treba určiť jediné komplexné kritérium $k = k(v, p, c)$, kde k by bolo funkciou váhy v, pevnosti p a ceny c, pričom (napríklad) čím väčšie by bolo k, tým lepšie by bolo riešenie. Z niektorými príkladmi tohto druhu sa stretneme aj v ďalšej časti knižky a všetky podporia názor, že prítomnosť matematika už vo fáze A je veľmi potrebná.

Fáza B — matematická formulácia úlohy — je práve kľúčovým miestom, na ktorom sa nejviac rozhoduje o úspechu alebo o neúspechu celého riešenia. Musí ju zvyčajne vykonávať jeden človek (mal by to byť práve aplikovaný matematik), ktorý musí mať dostatočný prehľad o všetkých podstatných matematických disciplínach, tak, aby vedel do ktorej z nich úloha patrí, ktorej reč má použiť.

V minulosti sme boli svedkami dvoch prudkých obratov v hodnotení významu matematiky, ako pomocníka pri riešení praktických úloh. Najprv sa matematika využívala len nepatrne a úlohy sa riešili na základe predchádzajúcich skúseností, bez výpočtov. Potom prišla éra rapídneho rastu záujmu o matematiku, jej využívanie sa stalo módnym a malo temer kampaňový charakter. Po čase však, na základe nie najlepších skúseností, mnoho praktikov prešlo na skeptické stanovisko pri posudzovaní možností matematiky pomôcť v ich práci.

Druhý zo spomínaných obratov je pre matematikov nepríjemný, hoci zaň do značnej miery nemôžu. Jednou z hlavných príčin je totiž to, že fázu *B* — matematickú formuláciu úloh — vykonávali často ľudia nedostatočne pripravení, mnoho ráz ani nie matematici. Chybné matematické vyjadrenie — matematický model — ktoré nevystihovalo podstatu praktickej úlohy, potom spôsobilo, že výsledky riešenia nebolo možné v praxi využiť.

Najčastejšie závažné chyby vo fáze *B* bývajú tieto:

1.3.3. Chybná voľba matematickej disciplíny, ktorej reč sa použije, prípadne „navliekanie" pratickej úlohy na už známy typový problém, pričom sa však porušia ohraničenia, alebo kritérium. Práve preto, aby sa aplikovaný matematik vyhnul týmto úskaliam, musí mať dostatočne široký rozhľad.

K takýmto chybám sa často dospelo zásadne nesprávnym prostupom, pri ktorom sa niektorý pracovník zoznámil s niektorou výhodne aplikovateľnou matematickou metódou (napríklad s niektorou metódou na riešenie dopravného problému) a začal okolo seba hľadať jej uplatnenie za každú cenu, aj na nevhodné úlohy. Proste, nemá sa k matematickému modelu hľadať praktický problém, ale k problému model.

1.3.4. Neprípustné zjednodušenie úlohy, pri ktorom sa vynechajú podstatné ohraničenia, alebo sa zmení ich tvar (napríklad linearizáciou).

1.3.5. Chybné stanovenie kritéria, ku ktorému môže tiež napríklad dôjsť linearizáciou niektorej funkcie, ktorej nelineárnosť je podstatná.

Vyvarovaním sa týchto chýb možno dosiahnúť situáciu, že praktici nebudú ani fetišistami, ktorí by verili vo všemohúcnosť matematiky, ani nihilistami, ktorí by sa od nej celkom odvracali; že dajú aplikáciam matematiky to dôstojné miesto, ktoré jej patrí.

V posledných rokoch možno konštatovať, že podnikov a ústavov, kde tomu tak je, neustále pribúda a treba dúfať, že časom budú také všetky. Na to však bude treba pripraviť erudovaných aplikovaných matematikov, ktorých najväčší nedostatok pociťuje u nás práve fáza *B*.

Fazu *C* — výber vhodnej metódy (algoritmu) na riešenie sformulovaného problému — sme označili za jednu z ťažiskových úloh aplikovaných matematikov. Nemyslíme tým však, že by matematik, ktorý úlohu sformuloval, musel ihneď stanoviť aj metódu. Takého odborníka, ktorý by ovládal všetky metódy zo všetkých matematických disciplín, by sme sotva našli. Dobrý aplikovaný matematik iste pozná mnoho metód, najmä z tých, ktoré sú v jeho práci najúžitočnejšie, ale namôže ich vedieť ani zďaleka všetky. Stačí ak vie, v ktorej knihe ju má hľadať, alebo na ktorého odborníka (i spomedzi „čistých matematikov“) sa má obrátiť.

Záverečným momentom fázy *C* je rozhodnutie, či sa úloha bude riešiť na počítači (a ak áno, tak na akom), alebo „ručne“. Pritom pod ručným výpočtom rozumieme i výpočet s pomocou kalkulačky alebo logaritmického pravítka. Pod počítačom rozumieme buď samočinný počítač analogový, alebo číslicový.

Nie je cieľom tejto knižky, popisovať jednotlivé typy počítačov, tejto téme sa napokon venuje dostatok inej literatúry. Poznamenávame len, že počítače nie sú vhodné na všetko a je mnoho úloh, ktoré je lepšie riešiť ručne, či už z dôvodov časových, alebo finančných. Časové dôvody sa uplatňujú najmä vtedy, keď ide o úlohu jednorázovú, neštandartnú, na ktorú treba vypracovať nový program, čo spolu s čakaním na pridelenie strojového času a s časom, potrebným na odladenie programu trvá dlhšie, než ručný výpočet. Niekedy zas sa môže stať, že použitie počítača by bolo síce z časového hľadiska výhodnejšie, ale úloha nie je taká urgentná a pri pomerne veľkej cene strojového času (až niekoľko tisíc Kčs za hodinu) je lacnejšie, aby ju niektorý (zvyčajne stredoškolsky vzdelaný) pracovník vypočítal ručne.

Pri úvahách o fázach *D*, *E* resp. *G*, si treba uvedomiť, že aplikovaní matematici sú vysoko kvalifikovaní odborníci, ktorých je a dlho bude veľký nedostatok. Bolo by preto nerozumné plytvať ich časom a nechať ich tieto fázy vykonávať, na to sú „nižšie" kádre. Na druhej strane je však potrebné, aby týmto prácam rozumeli, vedeli na ne dohliadnuť a najmä poradiť, ak sa vyskytnú problémy.

Záverečná fáza *F* — interpretácie výsledkov — má síce podobné postavenie, ako bodka vo vete, ale treba, aby ju aplikovaní matematici dobre strážili a radšej nepúšťali z rúk, pretože inak by mohla celá ich predchádzajúca práca vyjst navnivoč chybnou interpretáciou, alebo nesprávnym použitím výsledkov. Pritom aj praktici majú radšej, keď im matematik vypracuje hotové uzávery, alebo pokyny, než aby ich zo „surových" výsledkov museli pracne dedukovať.

1.4. Kde sa najviac uplatňujú aplikovaní matematici a akú majú perspektívu

Najširšie uplatnenie aplikovaných matematikov v súčasnosti je a v budúcnosti pravdepodobne bude v súčinnosti s výpočtovými strediskami, v príprave úloh pre riešenie na počítačoch. U nich sa okrem spomínaného dobrého prehľadu o matematike vyžadujú dobré znalosti o počítačoch, ich stavbe, operačných systémoch a programovacích jazykoch.

Ďalšie široké uplatnenie nachádzajú a budú nachádzať títo odborníci vo výrobných podnikoch a výskumných ústavoch ako členovia tímov (skupín) odborníkov rôzneho zamerania. Tieto tímy sa zostavujú na riešenie takých úloh, na aké nestačí jeden odborník sám. Prítomnosť matematika vo väčšine takýchto tímov zvýrazňuje snahu postaviť riešenie väčšiny technických i ekonomicko-organizačných úloh na exaktný základ.

V menšej, ale nie celkom zanedbatelnej miere aplikovaní matematici pracujú a budú pracovať vo výskumnej a pedagogickej práci na vysokých školách technického a ekonomického zamerania.

Okrem doteraz spomínaných možností sa nájdu ešte ďalšie ustanovizne, ktoré tiež matematikov potrebujú, ako napríklad peňažne a geodetické ústavy, ministerstvá apod. Rozhodne možno povedať, že aplikovaní matematici majú v súčasnosti (r. 1974) širšie možnosti uplatnenia, ako matematici „čistí" (ak medzi čistých nerátame stredoškolských profesorov a učiteľov matematiky), ktorí zväčša pôsobia len v sídlach vysokých škôl. Majú dobré platové i (zväčša) bytové podmienky a jediné, čo zatiaľ majú ťažšie, ako „čistí" matematici, je možnosť získať vedecké hodnosti. Ale i v tomto sa ľady pohli a než dnešní adepti aplikovanej matematiky doštudujú, bude asi aj tento problém vyriešený.

1.5. Kto sa hodí na aplikovanú matematiku?

Mnohých gymnazistov matematika zaujíma, radi by si ju zvolili za svoje životné povolanie a radi by sa už teraz rozhodli, na ktorú z troch možností (učiteľský smer, čistá matematika, aplikovaná matematika) sa budú orientovať. Nie je to otázka ľahká, veľa pri nej záleží na záľubách a vnútornom sebahodnotení každého študenta. Zväčša je tiež možné, najmä počas prvých ročníkov vysokoškolského štúdia, zmeniť svoju orientáciu.

Zásadne možno povedať, že na štúdium aplikovanej matematiky sa hodia najmä študenti, ktorí dobre riešia slovné úlohy a najmä úlohy Matematickej olympiády a úlohy netypické, ktorí celkom radi odvodzovali fyzikálne a chemické vzorce, dobre sa citia v kolektíve a ľahko sa prispôsobujú novým podmienkam.

Nakoniec pre tých, čo sa chcú trochu pobaviť, pridávame malý test (veď móda testov svetom vládne), na pomoc pri rozhodovaní. Netreba ho brať celkom vážne, skôr ako hru, ale samozrejme nie je zakázané viac sa zamyslieť ako nad zmyslom jednotlivých otázok, tak aj nad celkovým výsledkom.

Kto z čitateľov sa chce pohrať, nech si po každéj kladnej odpovedi zapíše písmeno, uvedené za otázkou (po odpovedi „nie“ netreba písať nič).

1. Máte radšej algebru, ako geometriu? . . . . . . b
2. Zo školských predmetov vás zaujíma temer výhradne len matematika? . . . . b
3. Ide vám ťažko štúdium cudzích rečí? . . . . . . a

4. Je pravda, že ste zatiaľ neprečítali do konca žiadnu matematickú knihu (okrem učebnice)? c
5. Články v „Matematických rozhľadoch“ vás zaujímajú menej, ako príklady v nich? c
6. Mali ste v škole radi tzv. „slovné“ úlohy? . . . c
7. Je pravda, že ste v Matematickej olympiáde neboli ani raz v II. kole úspešným riešiteľom? . . . . a
8. Ak ste dosiahli úspech v MO, bolo to viac vďaka vášmu dôvtipu ako vedomostiam? c
9. Domnievate sa, že metodická príprava učiteľa matematiky je aspoň tak dôležitá, ako jeho vedomosti? . . . . a
10. Študujete najradšej večer? . . . . b
11. Hráte sa ešte teraz radi s detskými vláčikmi, alebo konštrukčnými stavebnicami? c
12. Pestujete vášnivo turistiku? . . . . a
13. Máte radi samotu? . . . . b
14. Ťažko sa prispôsobujete novým podmienkam? . . b
15. Radšej by ste pretekali v behu na 1000 m ako na 60 m? . . . . b
16. Považujete dva mesiace učiteľských prázdnin za ťažko nahraditeľnú výhodu oproti iným povolaniam? . . . . a
17. Hľadáte dobre v cestovnom poriadku? c
18. Ste dievča? . . . . a

Tak, a teraz si sčítajte počty písmen, ktoré ste si zapísali za kladné odpovede. Väčšina písmen „a“ znamená, že by ste mohli uvažovať najmä o učiteľskom povolaní, „b“ o vedeckej práci v čistej matematike a „c“ o aplikovane-matematickej životnej dráhe. Ale, ako sme už povedali, celkom vážne to neberte!