2. kapitola. Aplikácie stredoškolskej matematiky

2. kapitola

APLIKÁCIE STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

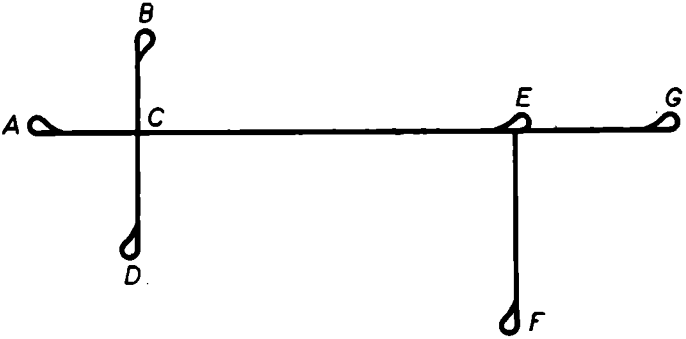
Po prečítaní tohto nadpisu si jedni čitatelia povedia, že takých aplikácií poznajú plno, stačí si vziať ktorúkoľvek slovnú úlohu zo stredoškolskej učebnice; druhí zas budú stredoškolskú matematiku považovať za príliš slabú na zdolanie problémov, s ktorými sa stretajú aplikovaní matematici.

S prvou námietkou nemožno súhlasiť, pretože slovné úlohy v stredoškolských učebniciach nesú na sebe príliš jasné znaky toho, ako vznikli. Sotva by sa našla medzi nimi taká, ktorá má pôvod v aplikovane-matematickej praxi. Naopak, tieto príklady si vytvorili autori učebníc na ilustráciu preberanej látky (je to opäť prístup od metódy k problému a nie naopak!)

Druhá námietka je vážnejšia, skutočne málo kedy sa možno stretnúť s praktickou úlohou, pri ktorej riešení by sa vystačilo len so stredoškolskou matematikou. Nie je to však vylúčené, ako ukazuje nasledujúci príklad. Je dosť zložitý a preto menej skúseným čitateľom doporučujeme ho vynechať, prejsť k III. kapitole a vrátiť sa sem až po prečítaní ostatných kapitol.

2.1. Úloha o sústave pravidelných mnohouholníkov na kružnici a jej aplikácia v doprave

2.1.1. Úvod. Na obr. 2 máme znázornenú sieť troch liniek mestskej dopravy: číslo 1 z A cez C a E do G, číslo 2 z B cez C a E do F a číslo 3 z D cez C do E. Vozy linky 1 premávajú v pravidelných 12-minútových intervaloch. Linky 2 v 8-minútových a linky 3 v 6-minútových intervaloch. Doprava na úsekoch AC, BC, CD,



Obr. 2

EF a EG je potom celkom pravidelná, kým na úseku CE nie. Cestujúci, ktorí cestujú len na tomto úseku, a teda môžu použiť voz ktorejkoľvek linky, musia raz čakať viac, inokedy menej.

Nech by odchody zo stanice C smerom na E boli takéto:

Linka 1: 6.00, 6.12, 6.24, 6.36, ...
Linka 2: 6.00, 6.08, 6.16, 6.24, 6.32, 6.40, ...
Linka 3: 6.02, 6.08, 6.14, 6.20, 6.26, 6.32, 6.38, ...

Intervaly medzi vozmi na tomto úseku by potom boli v minútach 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, ... Vidíme, že skupina 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, ktorá dáva v súčte 24 = [6, 8, 12] sa tu opakuje a svedčí o veľkej nerovnomernosti v odvoze cestujúcich na úseku

CE, a tým aj nerovnomernosti vyťaženia jednotlivých vozov (symbolom $[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ označujeme najmenší spoločný násobok čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$).

Iné možné riešenie cestovných poriadkov je takéto:

Linka 1: 6.03, 6.15, 6.27, 6.39, ...
Linka 2: 6.01, 6.09, 6.17, 6.25, 6.33, 6.41, ...
Linka 3: 6.00, 6.06, 6.12, 6.18, 6.24, 6.30, 6.36, 6.42, ...

s opakujúcimi sa intervalmi medzi vozmi na úseku *CE* 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 6. Toto riešenie sa zdá byť lepšie, a to napríklad preto, že interval medzi najbližšími po sebe idúcimi vozmi je tu najmenej 1 minúta a nie 0, ako v predošlom prípade (nulový interval medzi vozmi je skutočne nevýhodný, vozy sa nevojdú na zastávku a zadný ide prázdny). Ak však chceme odpovedať na otázku, ktoré riešenie je najlepšie, musíme si presne stanoviť

1. aké cestovné poriadky možno uvažovať, tj. aká je množina prípustných riešení;

2. čo je kritériom kvality riešenia, tj. ako poznáme, že riešenie je najlepšie.

1. Za prípustný cestovný poriadok budeme považovať tri aritmetické postupnosti časových údajov v hodinách a minútach, pričom diferencie sú: pri prvej $d_1 = 12$, pri druhej $d_2 = 8$, pri tretej $d_3 = 6$ minút a prvý člen i-tej postupnosti je ($i = 1, 2, 3$) je medzi 6.00 a 6.00 + d_i.

2. Ak potom z týchto postupností vytvoríme jednu, usporiadanú podľa veľkosti, za kritérium kvality riešenia budeme považovať minimum z rozdielov po sebe nasledujúcich členov tejto postupnosti, tj. minimálny interval medzi vozmi na úseku *CE*. Cestovný poriadok bude tým lepší, čím je toto číslo väčšie.

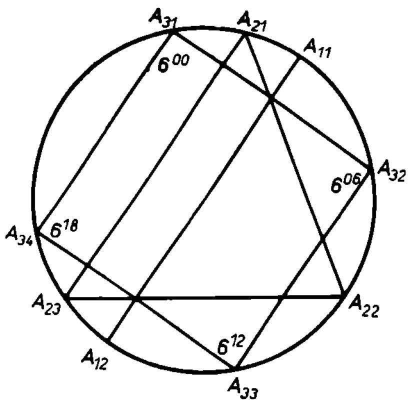
I keď úlohu už máme vlastne matematicky formulovanú, prevedieme si ju na formu, prístupnejšiu skúmaniu. Uvážme kružnicu dĺžky $24 = [6, 8, 12]$. Zvoľme na nej bod, ktorému priradíme čas 6.00 hodín, počínajúc týmto bodom si rozdeľme kružnicu na 24 rovnakých dielikov dĺžky 1 a v smere hodinových ručičiek priraďme deliacim bodom časy 6.01, 6.02, ... Keby sme takto pokračovali ďalej, je zrejmé, že časom, líšiacim sa o 24 minút by zodpovedali rovnaké body.

Zvoľme si z deliacich bodov tejto kružnice

1. dva body $A_{1.1}$ a $A_{1.2}$ tak, aby $\widehat{A_{1.1}A_{1.2}} = 12$ (tj. aby tvorili „pravidelný 2-uholník“);

2. tri body $A_{2.1}$, $A_{2.2}$, $A_{2.3}$ tak, aby $\widehat{A_{2.1}A_{2.2}} = \widehat{A_{2.2}A_{2.3}} = 8$ (pravidelný trojuholník);

3. štyri body $A_{3.1}, \ldots, A_{3.4}$ tak, aby tvorili pravidelný štvoruholník, štvorec.



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme výsledok takého rozmiestnenia (optimálny). Body $A_{i,j}$ plne určujú odchody i-tej linky a naopak. Podobne aj minimálna vzdialenosť dvoch bodov sa rovná minimálnemu časovému rozdielu v spoločnej postupnosti odchodov. Vyriešiť našu úlohu znamená teda vpísať do celočíselných bodov kružnice dĺžky 24 pravidelný 2-uholník, 3-uholník a 4-uholník tak, aby minimálna vzdialenosť dvoch susedných bodov bola maximálna. Úlohu môžeme formulovať aj všeobecne, pričom vynecháme nie príliš podstatnú požiadavku celočíselnosti:

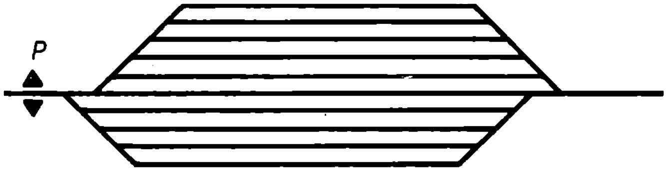
2.1.2. Základná úloha. Daná je kružnica $k = (S; r)$ a prirodzené čísla $m_1, \ldots, m_s$, $s > 1$. Vpísať do k pravidelný m_1-uholník $\mathscr{A}_1 = \{A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}\}, \ldots,$ pravidelný m_s-uholník $\mathscr{A}_s = \{\mathscr{A}_{s,1}, \ldots, A_{s,m_s}\}$ tak, aby číslo $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) = d = \min \widehat{A_{i,j}A_{\bar{i},\bar{j}}}$ bolo maximálne, pričom $i, \bar{i} = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, m_i$; $\bar{j} = 1, \ldots, m_{\bar{i}}$, $\bar{i} \neq i$.

Poznamenávame, že požiadavka $\bar{i} \neq i$ je v poriadku, pretože minimálna vzdialenosť d sa nadobúda skutočne vždy medzi bodmi dvoch rôznych mnohouholníkov a nie medzi dvoma bodmi toho istého mnohouholníka.

Každú sústavu $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ vpísanú do k (pričom pre všetky i je $\mathscr{A}_i$ pravidelný m_i-uholník) nazveme riešením. Ak naviac maximalizuje $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s)$, nazveme ju optimálnym riešením.

K aplikácii základnej úlohy prichádzame zväčša v tých praktických situáciách, keď viaceré deje prebiehajú v pravidelných rytmoch, ale s rôznou frekvenciou a časť svojho vplyvu sústreďujú na jedno miesto, alebo na jedno miesto kladú požiadavky.

2.1.3. Príklad. Uvažujme smerové koľajisko zriaďovacej stanice z obr. 4. Zo zvážneho pahrbku sa tu spúšťajú vozne na jednotlivé koľaje podľa nasledujúceho určenia.

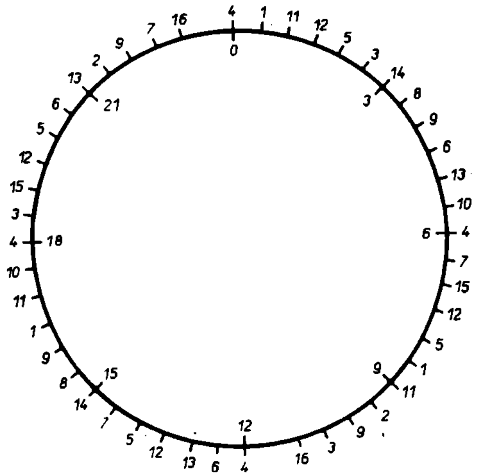


Obr. 4

Číslo koľaje	Počet vlakov denne	Odporúčaný čas ukončenia zhromažďovania			
1	3	0^{30}	8^{30}	16^{30}	
2	2	9^{30}	21^{30}		
3	3	2^{30}	10^{30}	18^{30}	
4	4	0^{00}	6^{00}	12^{00}	18^{00}
5	4	2^{00}	8^{00}	14^{00}	20^{00}
6	3	4^{30}	12^{30}	20^{30}	
7	3	6^{30}	14^{30}	22^{30}	
8	2	3^{30}	15^{30}		
9	4	4^{00}	10^{00}	16^{00}	22^{00}
10	2	5^{30}	17^{30}		
11	3	1^{00}	9^{00}	17^{00}	
12	4	1^{30}	7^{30}	13^{30}	19^{30}
13	3	5^{00}	13^{00}	21^{00}	
14	2	3^{00}	15^{00}		
15	2	7^{00}	19^{00}		
16	2	11^{00}	23^{00}		

Tab. 1

Časť z nich zostáva v stanici (vozne do depa, na vlečky apod.) a časť, zhromažďovaná na tzv. smerových koľajách, odchádza do iných staníc. Na to, aby sa z vozňov na smerovej koľaji utvoril vlak, treba vykonať nie



Obr. 5

koľko úkonov, pospájať, skontrolovať brzdu, spísať vozne atď. Tieto úkony vyžadujú istý čas a nie je vhodné, aby ich bolo treba robiť s viacerými vlakmi naraz, pretože by vyžadovali viac pracovníkov, alebo by niektoré vlaky museli čakať. Okamihy ukončenia zhromažďovania vozňov na smerových koľajách treba preto rozvrhnúť čo najrovnomernejšie, aby medzi najbližšími dvoma po sebe nasledujúcimi bol čo najväčší odstup.

Ak máme s takých koľají, pričom z i-tej koľaje odchádza za 24 hodín m_i vlakov a na každej koľaji sa žiada pravidelný rytmus, prichádzame opäť k našej základnej úlohe. Tu býva vhodné voliť k s obvodom 24.

Napríklad v zriaďovacej stanici Přerov-pravé máme situáciu opísanú v tab. 1, pričom v treťom stĺpci už máme riešenie úlohy, kde $d = 30$minút. Na obr. 5 vidíme toto riešenie na kružnici k. Zvonku sú čísla koľají, zvnútra čas.

2.1.4. Niektoré vlastnosti sústavy pravidelných mnohouholníkov vpísaných do kružnice. Poznamenávame, že pravidelným 1-uholníkom budeme nazývať ľubovoľný bod kružnice, 2-uholníkom jej ľubovolný priemer.

Lema 1. Nech m_1 a m_2 sú prirodzené čísla, nech $[m_1, m_2]$ je ich najmenší spoločný násobok. Nech $k = (S; o/2\pi)$ je kružnica a nech $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}$ a $A_{2,1}, \ldots, A_{2,m_2}$ sú vrcholy pravidelného m_1-uholníka $\mathscr{A}_1$ a m_2-uholníka $\mathscr{A}_2$ vpísaných do k. Potom

$$\text{(D)} \quad d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = \min_{\substack{i=1,\ldots,m_1 \\ j=1,\ldots,m_2}} \widehat{A_{1,i}A_{2,j}} \leqq \frac{o}{2[m_1, m_2]}$$

pričom existujú $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ také, že vo vzťahu (D) platí rovnosť.

Dôkaz, tejto lemy je trochu zdĺhavý, preto ho neuvádzame.

Lema 1 nám priamo opisuje postup, ktorým môžeme získať optimálne riešenie našej základnej úlohy, ak $s = 2$:

Najprv stotožníme niektorý vrchol m_1-uholníka s niektorým vrcholom m_2-uholníka, a potom m_2-uholník otočíme okolo stredu ktorýmkoľvek smerom o uhol

$\pi/[m_1, m]_2$. Žiaľ, tento postup sa pre $s > 2$ nedá zovšeobecniť. Následujúca lema nám dá aspoň hrubý odhad pre $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s)$.

Lema 2. Nech $k = (S; o/2\pi)$ je daná kružnica a $m_1 \geqq \geqq m_2 \ldots \geqq m_s$ sú prirodzené čísla. Nech $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ je optimálne riešenie základnej úlohy. Potom, ak označíme $m = m_1 + \ldots + m_s$, platí

$$\frac{o}{s.[m_1, \ldots, m_s]} \leqq d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leqq \min\left(\frac{o}{2[m_1, m_2]}; \frac{o}{m}\right)$$

Dôkaz. Označme $n = [m_1, \ldots, m_s]$. Pre $\bar{m}_1 = \ldots = \bar{m}_s = n$ dostaneme optimálne riešenie našej úlohy zrejme takto: n-uholník $\mathscr{B}_1$ umiestnime na kružnicu ľubovolne a $\mathscr{B}_{i+1}$ získame otočením $\mathscr{B}_1$ v smere hodinových ručičiek o uhol $i.o/s.n$. Vtedy zrejme $d(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s) = o/s.n$. Keďže $\mathscr{A}_i$ vznikne z $\mathscr{B}_i$ vynechánim $n - m_i$ vrcholov, nutne $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \geqq o/s.n$. Ľavá nerovnosť je dokázaná.

Zrejme $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leqq d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ kde $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ je optimálne riešenie základnej úlohy pre m_1 a m_2. Podľa lemy 1 je potom $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leqq o/2[m_1, m_2]$. Zostáva nám teda už len dokázať, že $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leqq o/m$, čo je však priamym dôsledkom toho, že sústava má spolu m bodov. Lema je dokázaná.

Vráťme sa teraz k našim dvom príkladom. V prvom sme mali $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ a našli sme pravidelný 2-uholník, 3-uholník a 4-uholník ako na obr. 2. Lema 2 nám ohraničuje $d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3) \leqq 24/2.12 = 1$, pre naše riešenie platí rovnosť, je teda optimálne. V druhom príklade sme našli $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{16}$ ako na obr. 4. Podľa lemy 2 $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{16}) \leqq 24/46 = 0{,}52$, kým my sme dosiahli 0,50, čo je iste výsledok veľmi uspokojivý.

Nasledujúce odstavce sú matematicky náročnejšie, možno ich vynechať a prejsť k III. kapitole.

Sústavu pravidelných mnohouholníkov $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$, vpísaných do kružnice k tak, že žiadne dva vrcholy sústavy nesplývajú, môžeme charakterizovať vektorom $(i_1, \ldots, i_m)$, kde $m = m_1 + \ldots + m_s$ a čísla $i_1, \ldots, i_m$ dostaneme takto: Zvolíme si ľubovoľný bod $A_{i,j}$ sústavy a položíme $i_1 = i$. Ak už máme $i_1, \ldots, i_t$ definované přičom sme ich definovali ako prvé indexy vrcholov $A_{i_1, j_1}, \ldots, A_{i_t, j_t}$, potom nájdeme v smere hodinových ručičiek susedný vrchol $A_{i,j}$ k vrcholu A_{i_t, j_t} a položíme $i_{t+1} = i$. Vektor $(i_1, \ldots, i_m)$ nazveme charakteristickým vektorom sústavy $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$.

Charakteristický vektor sústavy určuje, v akom poradí sa na kružnici striedajú vrcholy jednotlivých mnohouholníkov sústavy, tj., že existuje taký vrchol mnohouholníka $\mathscr{A}_i$, že k nemu susedný v smere hodinových ručičiek je vrchol mnohouholníka $\mathscr{A}_{i_2}$, za ním $\mathscr{A}_{i_3}$ atď. Každé i sa v charakteristickom vektore vyskytuje práve m_i-krát. Podľa toho, ktorý vrchol je ako prvý, by sústava mohla mať až m rôznych charakteristických vektorov (jeden z druhého odvedené cyklickou zámenou). Charakteristickým vektorom sústavy z nášho prvého príkladu je napríklad (1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 2).

Na množine charakteristických vektorov si definujeme niektoré zobrazenia do seba (unárne operácie):

o_1 — cyklická zámena,

o_2 — obrátenie poradia zložiek vektora,

o_3 — výmena rovnako početných indexov — ak sa prirodzené čísla p a $\bar{p}$ vyskytujú v charakteristickom vektore rovnaký počet krát, nahradíme pri tejto operácii všade p číslom $\bar{p}$ a naopak.

Tak napríklad $o_1(1, 2, 3, 4, 1) = (2, 3, 4, 1, 1)$,

$o_2(1, 2, 3, 4, 1) = (1, 4, 3, 2, 1)$, $o_3(1, 2, 3, 4, 1) = = (1, 3, 2, 4, 1)$.

Dve sústavy $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s; \mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s$ nazveme topologicky ekvivalentné (jednej topologickej triedy), ak možno charakteristický vektor jednej previesť na charakteristický vektor druhej konečným počtom operácií o_1 — o_3.

Zaujímavú úlohu zatiaľ nevyriešenú, dostaneme, ak definujeme číslo $K(m_1, \ldots, m_s)$ ako maximálny počet navzájom topologicky neekvivalentných sústav z m_1-uholníka $\mathscr{A}_1$, ..., m_s-uholníka $\mathscr{A}_s$. Napríklad platí $K(3, 3, 1, 1) = 2$ a je hypotéza $K(m_1, m_2) = 1$ pre všetky m_1, m_2.

2.1.5. Problém algoritmu. Našu základnú úlohu by sme mohli riešiť v dvoch častiach:

1. topologickej — určiť topologickú triedu
2. metrickej — vybrať konkrétneho predstaviteľa v rámci topologickej triedy.

Optimálny algoritmus (v praxi sotva použiteľný) je napríklad tento: Prebrať všetky topologické triedy pre dané $m_1, \ldots, m_s$ a v rámci každej triedy nájsť reprezentanta s najväčším d (napríklad metódou hľadania extrémov funkcie $s - 1$ premenných $\xi_2, \ldots, \xi_s$, kde ξ_i vyjadruje uhlové natočenie i-tého mnohouholníka voči prvému). Pochybnosti o praktickom význame takéhoto algoritmu sa týkajú najmä jeho prvej časti, pri väčšom s bude asi ťažké vyhľadať všetky topologické triedy, či už pre ich veľký počet, alebo komplikovanú štruktúru. Uvedieme si preto algoritmus, ktorý nevedie vždy k riešeniu optimálnemu, ale dáva dobré výsledky. Úspešný býva najmä vtedy, keď je s pomerne veľké, kým $n = [m_1, \ldots, m_s]$ pomerne malé. I v našom druhom príklade ($s = 16$, $n = 12$), sme ním dosiahli pekný výsledok.

Najprv si definujeme pojmy, ktoré v ňom budú hrať významnú úlohu: Predovšetkým vyslovíme induktívnu definíciu tzv. prípustného rozkladu prirodzeného čísla.

1. Prípustným rozkladom čísla n je každý vektor $\nu = (n_1, \ldots, n_q)$, ktorého zložkami sú prirodzené čísla $n_1 = \ldots = n_q$ a $q . n_1 = n$.

2. Ak $(n_1, \ldots, n_q)$ je prípustným rozkladom čísla n a $(n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i})$ je prípustným rozkladom čísla n_i, potom $(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i}, n_{i+1}, \ldots, n_q)$ je prípustným rozkladom čísla n.

Prípustnými rozkladmi čísla 6 sú napríklad (3, 3), (2, 2, 2), (3, 1, 1, 1).

Lema 3. Nech $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sú vrcholy pravidelného n-uholníka a nech $(n_1, \ldots, n_q)$ je prípustný rozklad čísla n. Potom existuje rozklad množiny $\mathscr{A} = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ na množiny $\mathscr{A}_i = \{A_{i,0}, \ldots, A_{i,n_i-1}\}$ $(i = 1, \ldots, q)$, tak, že body $\mathscr{A}_i$ sú vrcholmi pravidelného n_i-uholníka.

Dôkaz lemy plynie priamo z definície prípustného rozklada, indukciou cez počet použití časti 2 tejto definície.

Vektor $(n_1, \ldots, n_q)$ nazveme n-prípustným, ak existujú prirodzené čísla $n_{q+1}, \ldots, n_p$ také, že $(n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}, \ldots, n_p)$ je prípustný rozklad čísla n. (Prípustný rozklad je teda špeciálnym prípadom n-prípustného vektora.)

Nasledujúcu lemu uvedieme bez dôkazu.

Lema 4. Nech $m_1, \ldots, m_s$ sú dané prirodzené čísla. Nech $n = [m_1, \ldots, m_s]$ a nech $\nu_i = (n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i})$, $i = 1, \ldots, t$ sú n-prípustné vektory, pričom $(n_{1,1}, \ldots, n_{1,q_1}, \ldots, n_{t,q_t})$ je permutáciou vektora $(m_1, \ldots, m_s)$. Potom na danej kružnici $k = (S; o/2\pi)$ existuje sústava z pravidelného m_1-uholníka $\mathscr{A}_1$, ..., m_s-uholníka $\mathscr{A}_s$ taká, že $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) = o/t.n$.

Lema 4 nám umožňuje nájsť riešenie (nie nutne optimálne) v dvoch krokoch:

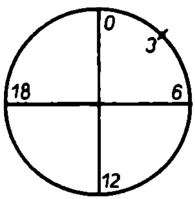
1. Z čísel $m_1, \ldots, m_s$ skombinovať čo najmenší počet n-prípustných vektorov pre $n = [m_1, \ldots, m_s]$. Nech je tento počet t.

2. Rozdeliť kružnicu k na $t.[m_1, \ldots, m_s]$ dielikov a zostaviť z deliacich bodov pravidelný m_1-uholník, ..., m_s-uholník.

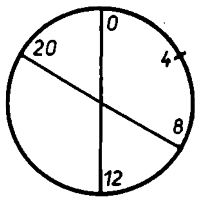
Riešenie, ktoré dostaneme, bude mať $d \geqq o/t.n$.

Návrh rozpisu dôb ukončenia zhromažďovania záťaže v zriaďovacej stanici Přerov-pravé v tab. 1 je príkladom použitia spomínaného postupu. Mali sme $n = 12$, $t \doteq 4$ a použité 12-prípustné vektory boli (4, 4, 4), (3, 3, 3, 3), (3, 3, 2, 2, 2), (4, 2, 2, 2). Vidíme, že okrem posledného sú to všetko aj prípustné rozklady čísla 12.

2.1.6. Niektoré príbuzné úlohy. Kritérium, ktoré sme použili v našej základnej úlohe, nie je jediné, s ktorým sa môžeme v praxi stretnúť. Tak napríklad pri navrhovaní cestovných poriadkov mestskej dopravy sa môže žiadať, aby úhrnná čakacia doba cestujúcich bola minimálna, čo podľa [1] vedie na minimalizáciu súčtu štvorcov rozdie-



Obr. 6a



Obr. 6b

lov medzi po sebe nasledujúcimi odchodmi. Toto kritérium sa od nášho pôvodného líši, ako vidno na obr. 6. Ide o dva 2-uholníky a jeden 1-uholník na kružnici obvodu 24. Podľa nášho pôvodného kritéria je variant b) lepší, nakoľko $d = 4$, kým pri a) je $d = 3$. Podľa súčtu štvorcov je však lepší a), pretože $9 + 9 + 36 + 36 + 36 + 36 = 126 < 16 + 16 + 64 + 16 = 128$.

K zaujúmavej úlohe dôjdeme, keď sa snažíme minimalizovať celkovú čakaciu dobu v celej sieti (napr. na obr. 2), ale pripustíme narušenie pravidelnosti i na jednotlivých linkách. Touto problematikou sa zaoberajú práce [1] a [2].

Cvičenia

1. Nech na kružnici $k = (S; o/2\pi)$ je $\mathscr{A}_1$ pravidelný 6-uholník, $\mathscr{A}_2$ a $\mathscr{A}_3$ štvorce, $\mathscr{A}_4$ a $\mathscr{A}_5$ rovnostranné trojuholníky, $\mathscr{A}_6$ a $\mathscr{A}_7$ priemery kružnice. Dokážte, že $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_7$ možno zvoliť tak, že

$$d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_7) = \frac{o}{24}$$

2. Nech na kružnici $k = (S; o/2\pi)$ je $\mathscr{A}_1$ pravidelný m_1-uholník a $\mathscr{A}_2$ pravidelný m_2-uholník, ktoré nemajú spoločný vrchol.

Dokážte, že pre $m_1 = 3$, $m_2 = 7$ a pre každý charakteristický vektor $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_{m_1+m_2})$ sústavy $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ existujú racionálne čísla p_1, r_1, p_2, r_2 také, že

$$i_j = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow j = \operatorname{int}[p_1(k + nm_1) + r_1] - n(m_1 + m_2) \\ \qquad k = 1, \ldots, m_1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ 2 \Leftrightarrow j = \operatorname{int}[p_2(k + nm_2) + r_2] - n(m_1 + m_2) \\ \qquad k = 1, \ldots, m_2,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

int x tu znamená celú časť z x, čiže najväčšie také celé číslo, ktoré neprevýši x.

Platí toto tvrdenie pre ľubovoľné m_1 a m_2?