Kapitola III.

HÖLDEROVA A MINKOWSKÉHO NEROVNOST

V obou předchozích kapitolách hrála významnou roli celkem elementární nerovnost

$$\sqrt{x_1x_2} \leqq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0,$$

kterou můžeme zapsat též takto:

$$x_1^{1/2}x_2^{1/2} \leqq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2. \tag{III.1}$$

Tuto nerovnost můžeme zobecnit:

Věta III.1. *Budiž $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Pak pro každou dvojici čísel $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ platí*

$$x_1^{1/p}x_2^{1/q} \leqq \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2. \tag{III.2}$$

Rovnost v (III.2) *platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2$.*

Důkaz: Vyjdeme z nerovnosti

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leqq 0, \tag{III.3}$$

která platí pro $0 < \alpha < 1$ a $t > 0$ a v níž nastane rovnost tehdy a jen tehdy, bude-li $t = 1$.*)

*) Připomeňme, že nerovnost (III.3) je nerovnost (P.2) z věty P.1. Zde poprvé použijeme této věty i pro jiná α než celá.

Je-li $x_2 = 0$, je nerovnost (III.2) zřejmě splněna. Můžeme tedy předpokládat $x_2 > 0$ a položit v (III.3)

$$t = \frac{x_1}{x_2}, \quad \alpha = \frac{1}{p} .$$

Pak je $\alpha - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = -\frac{1}{q}$ a (III.3) má tvar

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{q} \leqq 0 .$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $x_2 = x_2^{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}} = x_2^{1/q} . x_2^{1/p}$, dostaneme

$$x_1^{1/p} x_2^{1/q} - \frac{1}{p} x_1 - \frac{1}{q} x_2 \leqq 0 ,$$

což je ekvivalentní s (III.2). Protože rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $t = \frac{x_1}{x_2} = 1$, je tím věta dokázána.

Poznámka III.1. Protože $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p}$, jsou čísla p a q vázána symetrickým vztahem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 , \tag{III.4}$$

který budeme všude v této kapitole automaticky používat. Připomeňme, že pro $p = 2$ je také $q = 2$; nerovnost (III.1) je právě speciálním případem nerovnosti (III.2) pro $p = 2$. — Pravou stranu v (III.2) můžeme pomocí (III.4) zapsat takto:

$$\frac{1}{p}x_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)x_2 \quad \text{čili} \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)\,x_2\,, \quad \lambda = \frac{1}{p}.$$

Protože $p > 1$, je $0 < \lambda < 1$; bude-li se číslo λ měnit mezi 0 a 1, bude se bod $\lambda x_1 + (1 - \lambda)\,x_2$ pohybovat po úsečce o koncových bodech x_1 a x_2.

Poznámka III.2. Zvolíme-li v (III.2) $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, dostaneme nerovnost

$$ab \leqq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q\,, \tag{III.5}$$

která opět platí pro $a \geqq 0, b \geqq 0$, $p > 1, q = \dfrac{p}{p - 1}$. Rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $a^p = b^q$.

Poznámka III.3. Také nerovnost (III.2) lze dokazovat různým způsobem. Jedna důkazová metoda je založena na hledání minima funkce

$$f(x) = x^{1/p}y^{1/q} - \frac{x}{p} - \frac{y}{q}$$

a může ji použít ten, kdo ovládá základy diferenciálního počtu; jiný důkaz, využívající vlastnosti grafu logaritmu, je uveden v 35. svazku Školy mladých matematiků.

Otto Hölder byl německý matematik, který žil v letech 1859—1937. Jeho jménem je nazvána nerovnost (III.6), o níž pojednává tato věta:

Věta III.2. *Budiž* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$ a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Pak platí*

(III.6) $$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q};$$

rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\mathbf{x}^p$ *a* $\mathbf{y}^q$ *úměrné.*

Důkaz: Označme $X = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$, $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k^q$. Je-li $X = 0$ nebo $Y = 0$, je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ a nerovnost (III.6) zřejmě platí. Můžeme proto předpokládat, že $X > 0$ a $Y > 0$. Položíme-li v (III.5) $a = x_k/X^{1/p}$, $b = y_k/Y^{1/q}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), dostaneme n nerovností

(III.7) $$\frac{x_k y_k}{X^{1/p} Y^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} \cdot \frac{x_k^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_k^q}{Y}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

a sečtením všech těchto nerovností máme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{X^{1/p} Y^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s (III.6). — V poslední nerovnosti platí znaménko rovnosti tehdy a jen tehdy, platí-li rovnost ve všech nerovnostech v (III.7), tj. je-li $a^p = b^q$ čili

$$\frac{x_k^p}{X} = \frac{y_k^q}{Y} \quad \text{čili} \quad Y . x_k^p = X . y_k^q , \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

To však znamená, že $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{y}^q$.

Zvolíme-li $p = 2$, dostaneme z Hölderovy nerovnosti (III.6) nerovnost Cauchyovu, a to ve tvaru (II.2).

Hölderova nerovnost je tedy zobecněním Cauchyovy nerovnosti.

Vynásobíme-li nerovnost (III.6) číslem $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/q}$, můžeme ji zapsat v tomto tvaru:

$$A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p}\,[A_n(\mathbf{y}^q)]^{1/q}\,. \tag{III.8}$$

Je-li $0 < p < 1$, je $q = \frac{p}{p-1} < 0$. V tomto případě platí nerovnost, která se opět nazývá Hölderova a liší se od (III.6) pouze znaménkem nerovnosti:

Věta III.3. *Budiž* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) > \mathbf{0}$, $p < 1$, $p \neq 0$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}; \tag{III.9}$$

rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\mathbf{x}^p$ *a* $\mathbf{y}^q$ *úměrné.*

Důkaz: Je-li $p < 1$, $p \neq 0$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, je jedno z čísel p, q záporné. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to číslo q [v opačném případě využijeme symetrie vzorce (III.9) a zaměníme role vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a parametrů p a q]. Budiž tedy

$$0 < p < 1, \quad q < 0\,,$$

a položme

$$p^* = \frac{1}{p}, \quad q^* = -\frac{q}{p}\,.$$

Pak je $p^* > 1$ a $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q^*} = p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) =$ $= p\frac{1}{p} = 1$. Lze tedy použít věty III.2 pro p^*, q^* a pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$: Platí

$$\text{(III.10)} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^{p^*}\right)^{1/p^*} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{q^*}\right)^{1/q^*}$$

pro $u_k > 0$, $v_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Položíme-li zde

$$u_k = x_k^p y_k^p, \quad v_k = y_k^{-p},$$

bude $u_k v_k = x_k^p$, $u_k^{p^*} = x_k y_k$ a $v_k^{q^*} = y_k^q$ a (III.9) plyne z (III. 10) ekvivalentními úpravami.

Úloha III.1. Pro *komplexní* vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ má Hölderova nerovnost tvar

$$\text{(III.11)} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

$\left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Dokažte (III.11) pomocí (III.6). Platí pro $p < 1$ $(p \neq 0)$ opět obrácená nerovnost podobně jako v (III.9)?

V Hölderově nerovnosti (III.6) a (III.9) vystupují dva parametry p a q, vázané vztahem (III.4). Chceme-li Hölderovu nerovnost (III.6) zapsat pomocí jediného parametru, stačí dosadit za q výraz $\frac{p}{p-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}.$$

Po umocnění odtud máme nerovnost

$$\text{(III.12)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^p \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{p-1},$$

která platí pro $p > 1$ a je zobecněním Cauchyovy nerovnosti v tvaru (II.1). — Pro $p < 1$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ je situace poněkud složitější: Hölderovu nerovnost (III.9) lze opět zapsat pomocí jediného parametru ve tvaru

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p},$$

ale nyní už je třeba rozlišovat:

(a) Je-li $0 < p < 1$, plyne z (*) umocněním nerovnost

$$\text{(III.12a)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^p \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{p-1},$$

která je protějškem nerovnosti (III.12).

(b) Je-li $p < 0$, změní se při „umocnění“ nerovnosti (*) znaménko nerovnosti a dostaneme opět nerovnost (III.12).

Lze tedy shrnout: Nerovnost (III.12) platí pro $p > 1$ a pro $p < 0$; pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost (III.12a).

Poznámka III.4. Cauchyovu nerovnost lze geometricky interpretovat; u Hölderovy nerovnosti to není tak jednoduché. Zachováme-li označení z kapitoly II, můžeme pomocí nerovností (III.6) a (III.9) odvodit tento vztah, který platí pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $p > 1$ a $r < 1$:

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}} \leqq \cos \widehat{\mathbf{xy}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}}.$$

Úloha III.2. Velice užitečná je nerovnost

$$\text{(III.13)} \qquad |u+v|^p \leqq 2^{p-1}(|u|^p + |v|^p)\,,$$

která platí pro komplexní čísla u, v a pro $p \geqq 1$. Dokažte tuto nerovnost.

Úloha III.3. Zvolte v (III.6) a (III.9) $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$ a zapište takto vzniklé nerovnosti.

Úloha III.4. Zvolte v (III.9) $p = \frac{1}{2}$ a zapište odpovídající dolní odhad pro $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Úloha III.5. Jak vypadají Hölderovy nerovnosti, volíme-li $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{x}}$? Uvědomte si, že jde o zobecnění úlohy z příkladu I.1 resp. II.2. Zvolte speciálně $p = \frac{1}{2}$.

Úloha III.6. Dokažte, že pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ a $p \geqq 1$ platí

$$\text{(III.14)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^p}{y_k^{p-1}} \geqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p}{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^{p-1}}$$

a že rovnost zde nastává pro $p > 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$. (Pro $p = 2$ jsme tuto nerovnost vyšetřovali v úloze II.5.)

Úloha III.7. Budiž $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Dokažte, že nerovnost (III.14) platí také pro $p < 0$, zatímco pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost.

Budiž $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$. Zvolíme-li v (III.5) $a = x_k$, $b = y_k$, dostaneme n nerovností $x_k y_k \leqq \frac{1}{p} x_k^p + \frac{1}{q} y_k^q$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a jejich sečtením pak nerovnost

$$\text{(III.15)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q$$

$$\left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Poznámka III.5. V řadě matematických problémů je třeba odhadnout výraz $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, ale tak, aby se zdůraznil podíl, kterým přispívá např. vektor $\boldsymbol{x}$, a aby se naopak potlačil podíl, kterým přispívá vektor $\boldsymbol{y}$. Pak se někdy hodí odhad (III.15), v němž provedeme tento obrat: Je-li $\varepsilon > 0$, je

$$x_k y_k = (\varepsilon x_k) \left(\frac{y_k}{\varepsilon}\right)$$

a z (III.15), kde ovšem uvažujeme εx_k místo x_k a $\frac{y_k}{\varepsilon}$ místo y_k, dostáváme

$$\text{(III.16)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \varepsilon^p \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q \sum_{k=1}^{n} y_k^q .$$

Je-li nyní ε dosti velké číslo, bude $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q$ dosti malé a druhý sčítanec vpravo v (III.16) bude malý, takže příspěvek vektoru $\mathbf{y}$ bude malý ve srovnání s příspěvkem vektoru $\mathbf{x}$; pro $\varepsilon > 0$ dosti malé tomu bude naopak. Připomeňme, že tento „trik" jsme už použili, ovšem pro $p = 2$, v třetím důkazu věty II.1.

Poznámka III.6. Nerovnost (III.15) lze ovšem „vylepšit" Mezi její pravou a levou stranu lze vložit výraz

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q} ,$$

tj. platí

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q} \leqq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q .$$

První nerovnost je Hölderova nerovnost (III.6), druhou nerovnost dostaneme z (III.5), položíme-li tam $a = (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p}$, $b = (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q}$. — Poslední nerovnost současně říká, že odhad výrazu $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ pomocí (III.15) je „horší" než odhad pomocí Hölderovy nerovnosti.

Uvedeme nyní několik příkladů použití Hölderovy nerovnosti (III.6).

Příklad III.1. Nechť je $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; dále zvolme čísla α a β tak, aby bylo $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Pak je

$$x_k y_k = (x_k^{\alpha} y_k^{\beta})\,(x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta})\,.$$

Použijeme-li Hölderovy nerovnosti (III.6) pro vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, kde $u_k = x_k^{\alpha} y_k^{\beta}$ a $v_k = x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta}$, bude $u_k v_k = x_k y_k$ a

$$\text{(III.17)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha p} y_k^{\beta p}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{(1-\alpha)q} y_n^{(1-\beta)q}\Big)^{1/q}\,.$$

Každý z obou činitelů na pravé straně lze opět odhadnout pomocí Hölderovy nerovnosti: u prvního volíme $r > 1$ a $s > 1$ tak, aby bylo $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$, a užijeme (III.6) s r místo p, s s místo q, s $\mathbf{x}^{\alpha p}$ místo $\mathbf{x}$ a s $\mathbf{y}^{\beta p}$ místo $\mathbf{y}$ a máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha p} y_k^{\beta p} \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha p r}\Big)^{1/r} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{\beta p s}\Big)^{1/s}\,;$$

podobně bude pro druhý činitel

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(1-\alpha)q} y_k^{(1-\beta)q} \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{(1-\alpha)q\varrho}\Big)^{1/\varrho} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{(1-\beta)q\sigma}\Big)^{1/\sigma}\,,$$

kde je $\varrho > 1$, $\sigma > 1$ a $\dfrac{1}{\varrho} + \dfrac{1}{\sigma} = 1$. Obě poslední nerovnosti spolu s (III.17) dávají odhad

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha p r}\Big)^{1/rp} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{(1-\alpha)q\varrho}\Big)^{1/\varrho q} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{\beta p s}\Big)^{1/ps} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{(1-\beta)q\sigma}\Big)^{1/\sigma q}\,.$$

Zvolme speciálně $\beta = 1 - \alpha$, $p = q = 2$, $r = \dfrac{1}{\alpha}$

$\left(\text{a tedy } s = \frac{1}{1-\alpha}\right)$ a $\varrho = \frac{1}{\beta}\left(\text{a tedy } \sigma = \frac{1}{1-\beta}\right)$; přitom je podle předpokladu $0 < \alpha < 1$. Pak je $\alpha pr = (1-\alpha)q\varrho = \beta ps = (1-\beta)q\sigma = 2$ a máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{(2-2\alpha)}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{(2-2\alpha)} y_k^{2\alpha}\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\alpha/2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{(1-\alpha)/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{(1-\alpha)/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha/2}$$

[první nerovnost je nerovnost (III.17)]. Po umocnění dostáváme vztah

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2-2\alpha}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2\alpha}\right) \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Nerovnost mezi prvním a třetím členem je Cauchyova nerovnost (II.1). Prostřední výraz je tedy jedním z výrazů, které můžeme vložit mezi krajní výrazy v Cauchyově nerovnosti a o nichž hovoříme v poznámce II.3. Poznamenejme ještě, že prostřední výraz se mění se změnou parametru α v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Příklad III.2. Buďte a, b, c, A, B, C nezáporná čísla, $p > 1$, a nechť platí

(III.18) $\quad a^{1/(p-1)} + c^{1/(p-1)} \leqq b^{1/(p-1)}, \; A^{1/p} + C^{1/p} \geqq B^{1/p}.$

Pak platí

(III.19) $\quad Abc - Bca + Cab \geqq 0 .$

Důkaz: Užijeme Hölderovy nerovnosti (III.6) pro $n = 2$, přičemž zvolíme

$$x_1 = (Ac)^{1/p}, \; x_2 = (Ca)^{1/p}, \; y_1 = a^{1/p}, \; y_2 = c^{1/p}.$$

Z nerovnosti

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} \, (y_1^{p/(p-1)} + y_2^{p/(p-1)})^{(p-1)/p}$$

máme

$$(Aac)^{1/p} + (Cac)^{1/p} \leqq (Ac + Ca)^{1/p} \, (a^{1/(p-1)} + c^{1/(p-1)})^{(p-1)/p}.$$

Užijeme-li zde nerovností (III.18), dostaneme

$$(ac)^{1/p} \, B^{1/p} \leqq (Ac + Ca)^{1/p} \, b^{1/p}$$

a odtud už plyne (III.19).

Příklad III.3. Buďte x, y, z kladná čísla, α reálné číslo. Pak platí tzv. *Schurova nerovnost*

(III.20) $$x^\alpha(x - y)(x - z) + y^\alpha(y - x)(y - z) + \\ + z^\alpha(z - x)(z - y) \geqq 0 \, .$$

Tato nerovnost je speciálním případem nerovnosti (III.19): Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $0 < x \leqq y \leqq z$. Zvolíme-li pak $p = 2$, $a = z - y$, $b = z - x$, $c = y - x$, bude platit první z nerovností (III.18) (dokonce nastane rovnost); zvolíme-li $A = x^\alpha$, $B = y^\alpha$, $C = z^\alpha$, bude platit i druhá z nerovností (III.18) (pro $\beta \geqq 0$ je $z^\beta \geqq y^\beta$, pro $\beta < 0$ je $x^\beta \geqq y^\beta$, a pro všechna reálná α je tedy $x^{\alpha/2} + z^{\alpha/2} \geqq y^{\alpha/2}$).

Příklad III.4. Budiž $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \boldsymbol{0}$, $p > 1$, a označme $A_k = \dfrac{1}{k}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pak platí

(III.21) $$\sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n} x_k^p \, .$$

Důkaz: Protože je $x_k = kA_k - (k-1)A_{k-1}$ (klademe $A_0 = 0$), je

$$A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} x_k =$$

$$= A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} [kA_k - (k-1) A_{k-1}] =$$

$$= A_k^p \left(1 - \frac{kp}{p-1}\right) + \frac{(k-1)p}{p-1} A_k^{p-1} A_{k-1}.$$

Zvolíme-li v nerovnosti (III.5) $a = A_{k-1}$ a $b = A_k^{p-1}$, bude

$$A_{k-1} A_k^{p-1} \leqq \frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} (A_k^{p-1})^{p/(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} A_k^p$$

a odtud máme

$$A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} x_k \leqq$$

$$\leqq A_k^p \frac{p-1-kp}{p-1} + \frac{(k-1)p}{p-1} \left(\frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} A_k^p\right) =$$

$$= \frac{1}{p-1} [(k-1) A_{k-1}^p - kA_k^p].$$

Zde je $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. máme n nerovností, a jejich sečtením dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p - \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p-1} [-1 . A_1^p + 1 . A_1^p - 2 . A_2^p + 2 . A_2^p - 3A_3^p +$$

$$+ \ldots + (n-1) A_{n-1}^p - nA_n^p] = -\frac{nA_n^p}{p-1} \leqq 0$$

čili

$$\text{(III.22)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \, ;$$

je zřejmé, že rovnost zde platí právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Součet na pravé straně v (III.22) odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (III.6), v níž položíme $y_k = A_k^{p-1}$. Pak je $y_k^q = (A_k^{p-1})^{p/(p-1)} = A_k^p$ a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^p\right)^{1-1/p}$$

čili z (III.22) máme

$$\text{(III.23)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^p\right)^{1-1/p} .$$

Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, nerovnost (III.21) zřejmě platí, neboť také $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$. Je-li alespoň jedno z čísel x_i kladné, je $A = \sum_{k=1}^{n} A_k^p > 0$ a (III.21) plyne z (III.23) ekvivalentními úpravami: vynásobením nerovnosti (III.23) číslem $A^{-1+1/p}$ a umocněním.

Je-li číslo $A > 0$ (tj. je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), je nerovnost v (III.21) ostrá; konstanta $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ je však nejlepší možná.

Hölderovu nerovnost lze zapsat ještě v jiném tvaru: Označíme-li $x_k^p = a_k$, $y_k^q = b_k$, bude $x_k = a_k^{1/p}$, $y_k = b_k^{1/q}$ a po dosazení do (III.6) máme nerovnost

$$\text{(III.24)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^{1/p} b_k^{1/q} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/q} ,$$

která platí pro $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$; rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ úměrné.

Označíme-li ještě $\dfrac{1}{p} = \alpha$, $\dfrac{1}{q} = \beta$, dostáváme vzorec

$$\text{(III.25)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} b_k^{\beta} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{\beta},$$

který platí pro $\boldsymbol{a} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$.

S Hölderovou nerovností ve tvaru (III.25) se pracuje někdy pohodlněji než s tvarem (III.6). Ukazuje to i následující úloha.

Úloha III.8. Dokažte vzorec (III.25) indukcí. Dokažte analogicky i nerovnost (III.6) a porovnejte pracnost a přehlednost obou výpočtů.

Hölderova nerovnost se týká součinu dvou vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; je to vidět např. ze zápisu (III.8). Lze ji však zobecnit i pro součin většího počtu vektorů:

Věta III.4. *Budte* $\boldsymbol{x}_{(i)} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \geqq \boldsymbol{0}$ *vektory*, $p_i > 1$ *čísla* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a *nechť je*

$$\text{(III.26)} \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1\,.$$

Pak platí

(III.27)

$$\sum_{k=1}^{n} x_{1k} x_{2k} \ldots x_{mk} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{2k}^{p_2}\right)^{1/p_2} \ldots \left(\sum_{k=1}^{n} x_{mk}^{p_m}\right)^{1/p_m}.$$

Hölderovu nerovnost (III.6) dostaneme, volíme-li $m = 2$, $\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{y}$, $p_1 = p$, $p_2 = q$.

Nerovnost (III.27) lze zapsat ve tvaru

$$A_n(\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} \dots \boldsymbol{x}_{(m)}) \leqq$$
$$\leqq [A_n(\boldsymbol{x}_{(1)}^{p_1})]^{1/p_1} [A_n(\boldsymbol{x}_{(2)}^{p_2})]^{1/p_2} \dots [A_n(\boldsymbol{x}_{(m)}^{p_m})]^{1/p_m}.$$

Tato nerovnost je však stále dosti nepřehledná, a právě zde vyniknou výhody zápisu Hölderovy nerovnosti ve tvaru (III.25): Zavedeme-li totiž vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, ..., $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ předpisy

$$\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{a}^{1/p_1} \text{ (tj. } x_{1k} = a_k^{1/p_1}), \ \boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{b}^{1/p_2}, \ \dots, \ \boldsymbol{x}_{(m)} = \boldsymbol{d}^{1/p_m},$$

a označíme-li ještě

$$\alpha = \frac{1}{p_1}, \ \beta = \frac{1}{p_2}, \ \dots, \ \delta = \frac{1}{p_m},$$

bude $\alpha + \beta + \dots + \delta = 1$ a z (III.27) dostáváme

(III.28) $$\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta \dots d_k^\delta \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\alpha (\sum_{k=1}^{n} b_k)^\beta \dots (\sum_{k=1}^{n} d_k)^\delta .$$

Důkaz věty III.4 lze provést indukcí přes m. Nebudeme zde zabíhat do detailů; ukážeme jen na tvaru (III.28), jak lze od $m = 2$ přejít k $m = 3$. Čtenář pak už důkaz snadno dokončí.

Předpokládejme tedy, že platí (III.27) resp. (III.28) pro $m = 2$; ukážeme, že pro $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$, a pro $\boldsymbol{a} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqq \boldsymbol{0}$ je

(III.29) $$\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta c_k^\gamma \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\alpha (\sum_{k=1}^{n} b_k)^\beta (\sum_{k=1}^{n} c_k)^\gamma .$$

Označme $\alpha + \beta = \varepsilon$; pak je $\varepsilon + \gamma = 1$ a tedy $0 < \varepsilon < 1$. Užijeme-li nerovnosti (III.25) [což je (III.28) pro $m = 2$!] s ε místo α, s γ místo β, s $\boldsymbol{a}^{\alpha/\varepsilon}\boldsymbol{b}^{\beta/\varepsilon}$ místo $\boldsymbol{a}$ a s $\boldsymbol{c}$ místo $\boldsymbol{b}$, máme

(III.30)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} b_k^{\beta} c_k^{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} (a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^{\varepsilon} c_k^{\gamma} \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^{\varepsilon} (\sum_{k=1}^{n} c_k)^{\gamma}.$$

První činitel v posledním výrazu opět odhadneme pomocí (III.25), kde ovšem místo α a β užijeme α/ε a β/ε; je $\dfrac{\alpha}{\varepsilon} + \dfrac{\beta}{\varepsilon} = 1$, neboť $\alpha + \beta = \varepsilon$:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^{\varepsilon} \leqq [(\sum_{k=1}^{n} a_k)^{\alpha/\varepsilon} (\sum_{k=1}^{n} b_k)^{\beta/\varepsilon}]^{\varepsilon} = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^{\alpha} (\sum_{k=1}^{n} b_k)^{\beta}.$$

Odtud a z (III.30) máme (III.29).

Příklad III.5. Budiž $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$. Pak platí

(III.31) $\quad (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geqq (1 + G_n(\boldsymbol{x}))^n$;

rovnost nastává tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Důkaz: Použijeme vzorce (III.28), a to pro n dvoučlenných vektorů: $\boldsymbol{a} = (1, x_1)$, $\boldsymbol{b} = (1, x_2)$, ..., $\boldsymbol{d} = (1, x_n)$, a pro $\alpha = \beta = \dots = \delta = \dfrac{1}{n}$. Pak má (III.28) tvar

$$1^{1/n}1^{1/n} \dots 1^{1/n} + x_1^{1/n}x_2^{1/n} \dots x_n^{1/n} \leqq$$
$$\leqq (1 + x_1)^{1/n} (1 + x_2)^{1/n} \dots (1 + x_n)^{1/n},$$

odkud plyne (III.31) umocněním. Důkaz tvrzení o rovnosti přenecháváme čtenáři.

Úloha III.9. Dokažte nerovnost (III.31) pomocí nerovnosti (I.40).

Nerovnost (III.31) lze zapsat též takto:

$$[G_n(\mathbf{1} + \mathbf{x})]^n \geqq [1 + G_n(\mathbf{x})]^n .$$

Porovnáme-li příklad III.5 s příkladem I.2, zjistíme, že jsme ukázali

$$[1 + G_n(\mathbf{x})]^n \leqq (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \leqq$$
$$\leqq [1 + A_n(\mathbf{x})]^n .$$

Úloha III.10. Nerovnost (III.27) je zobecněním nerovnosti (III.6). Lze analogicky zobecnit také nerovnost (III.9) pro více než dva vektory?

Se jménem německého matematika Hermanna Minkowského (1864—1909) jsme se setkali už v kapitole II. Je po něm nazvána nerovnost (III.32), kterou odvodíme z Hölderovy nerovnosti:

Věta III.5. *Budiž* $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ *a* $p \geqq 1$. *Pak platí*

$$\text{(III.32)} \qquad [\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{1/p} \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p} ;$$

rovnost zde nastává pro $p > 1$ *tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *úměrné. — Je-li* $0 < p < 1$ *nebo je-li* $p < 0$ *a* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, *platí obrácená nerovnost.*

Důkaz: Využijeme identity

$$(x_k + y_k)^p = (x_k + y_k)(x_k + y_k)^{p-1} =$$
$$= x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1} ,$$

která platí pro $k = 1, 2, \dots, n$. Sečtením všech těchto identit máme

(III.33)

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}.$$

Pro $p > 1$ odhadneme oba sčítance vpravo pomocí Hölderovy nerovnosti:

(III.34)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q}\right]^{1/q},$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p} \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q}\right]^{1/q}.$$

Ale $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy je $(p - 1)q = p$. Z (III.33) a (III.34) nyní plyne

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right]^{1/q}.$$

Je-li číslo $X = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p$ rovno nule, nerovnost (III.32) zřejmě platí; je-li $X > 0$, můžeme poslední nerovnost dělit číslem $X^{1/q}$ a dostáváme (III.32), neboť vlevo pak bude $X . X^{-1/q} = X^{1-1/q} = X^{1/p}$.

Rovnost v (III.32) nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li rovnost v obou nerovnostech (III.34), tedy podle věty III.2 tehdy a jen tehdy, bude-li vektor $\mathbf{x}^p$ úměrný vektoru $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^{(p-1)q}$ a současně vektor $\mathbf{y}^p$ úměrný témuž vektoru. Pak však je $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

Pro $p = 1$ platí v (III.32) vždy rovnost. Pro $p < 1$ $(p \neq 0)$ užijeme věty III.3: Nerovnosti v (III.34) je pak třeba obrátit a z identity (III.33) dostaneme obrácenou nerovnost v (III.32).

Nerovnost (III.32) můžeme po zřejmé úpravě zapsat takto:

(III.35)
$$[A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^p)]^{1/p} \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p} \ (p \geqq 1) \, .$$

V kapitole I jsme odvodili jistou analogii této nerovnosti pro geometrické průměry — viz (I.40). Metodu, které jsme tam použili (tj. vlastně větu I.2), lze upravit tak, že dostaneme jiný důkaz nerovnosti (III.35) a tedy jiný důkaz Minkowského nerovnosti (III.32).

Věta III.6. *Budiž* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ *a nechť je* $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$. *Pak je pro každý vektor* $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

$$A_n(\mathbf{x}\mathbf{z}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} \, . \tag{III.36}$$

Je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ *takový vektor, že* $A_n(\mathbf{x}^p) > 0$, *existuje vektor* $\mathbf{z}$ *(závislý na* $\mathbf{x}$*) tak, že je* $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$ *a že v* (III.36) *platí rovnost.*

Důkaz: Z Hölderovy nerovnosti ve tvaru (III.8) plyne, že $A_n(\mathbf{x} \, . \, \mathbf{z}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p}[A_n(\mathbf{z}^q)]^{1/q}$, odtud plyne (III.36), neboť $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$. — Je-li $\mathbf{x}$ daný vektor, pro který je číslo $A = A_n(\mathbf{x}^p)$ kladné, zvolíme $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ takto:

$$z_i^q = \frac{1}{A} x_i^p \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{III.37}$$

Pak je $A_n(\mathbf{z}^q) = \dfrac{1}{A} A_n(\mathbf{x}^p) = 1$ a platí (III.36). To je však Hölderova nerovnost, a protože (III.37) znamená, že $\mathbf{z}^q \sim \mathbf{x}^p$, platí v ní podle věty III.2 rovnost.

Pomocí věty III.6 nyní snadno dokážeme (III.35): Budiž $\mathbf{z}^*$ vektor, který je podle věty III.6 přiřazen vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Pak je

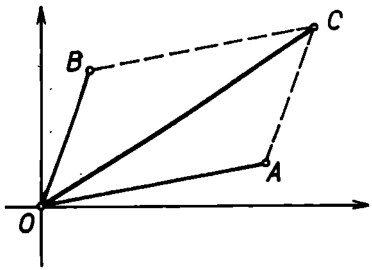
$$[A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^p)]^{1/p} = A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z}^*) = A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}^*) + \\ + A_n(\mathbf{y}\,.\,\mathbf{z}^*) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p}\,;$$

přitom jsme použili vzorce (I.37) (u druhé rovnosti) a vzorce (III.36) (v poslední nerovnosti).

Úloha III.11. Dokažte Minkowského nerovnost (III.32) pro $n = 3$ za předpokladu, že platí pro $n = 2$.

Poznámka III.7. Minkowského nerovnosti lze dát geometrický význam: Uvažujme $n = 2$ a $p = 2$; pak má (III.32) tvar

$$\text{(III.38)} \quad \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}\,.$$



Obr. 6

Budiž A bod o souřadnicích $[x_1, x_2]$, B bod o souřadnicích $[y_1, y_2]$ a C bod o souřadnicích $[x_1 + y_1, x_2 + y_2]$ (viz obr. 6). Protože pro bod $[a_1, a_2]$ v rovině je $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

vzdálenost tohoto bodu od počátku, lze nerovnost (III.39) zapsat takto:

$$\overline{OC} \leqq \overline{OA} + \overline{OB}\,.$$

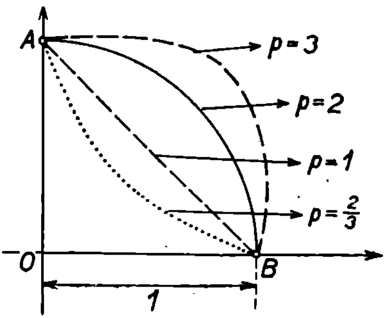
Ale $\overline{OB} = \overline{AC}$, takže máme nerovnost

$$\overline{OC} \leqq \overline{OA} + \overline{AC}\,,$$

kterou lze vyjádřit takto: *Součet dvou stran v trojúhelníku není menší než strana třetí.* Nerovnost (III.38) — čili Minkowského nerovnost pro $p = 2$ — tedy není nic jiného než tzv. *trojúhelníková nerovnost.* — A podobný význam má Minkowského nerovnost i pro ostatní $p \geqq 1$: Výraz

$$(x_1^p + x_2^p)^{1/p} = v_p(x_1, x_2) \tag{III.39}$$

lze považovat za jakousi „deformovanou" vzdálenost bodu o souřadnicích $[x_1, x_2]$ v rovině od počátku a Minkowského nerovnost pak říká, že trojúhelníková nerovnost platí i tehdy, měříme-li délky stran trojúhelníka pomocí této „deformované" vzdálenosti. Pro srovnání:



Obr. 7

Je-li $p = 2$, tvoří body v prvním kvadrantu, jejichž vzdálenost $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ od počátku je rovna jedné, čtvrtkružnici; pro $p = 1$ je „vzdálenost" dána číslem $x_1 + x_2$ a body o „vzdálenosti" $v_1 = 1$ od počátku vyplní úsečku $\overline{AB}$ na obr. 7; konečně pro $p = 3$ je „vzdálenost" dána číslem $\sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$ a body o jednotkové „vzdálenosti" v_3 od počátku vyplní čerchovaný oblouk $\widehat{AB}$.

Nerovnost (III.9) říká, že při měření pomocí vzdáleností $v_p(x_1, x_2)$ s $p < 1$ trojúhelníková nerovnost neplatí, naopak, součet dvou stran v trojúhelníku je *menší* než strana třetí. Pro $p = \frac{2}{3}$ je na obr. 7 tečkovaně vyznačena množina těch bodů, pro které je $v_{2/3}(x_1, x_2) = 1$ — je to část tzv. *astroidy*.

Úloha III.12. Dokažte, že pro komplexní vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a pro $p \geqq 1$ platí Minkowského nerovnost ve tvaru

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Úloha III.13. Rozšiřte Minkovského nerovnost na případ součtu více než dvou vektorů.

Z Hölderovy nerovnosti lze odvodit, jak se chová výraz $[A_n(\boldsymbol{x}^p)]^{1/p}$ pro pevný vektor $\boldsymbol{x}$ při měnícím se p.

Buďte tedy r, s čísla, $0 < r < s$, a $\boldsymbol{x}$ vektor, $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$. Je $r = s\alpha$, kde $0 < \alpha < 1$. Užijeme-li nyní nerovnosti (III.25), kde položíme $a_k = x_k^s$, $b_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a $\beta = 1 - \alpha$, máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^r = \sum_{k=1}^{n} (x_k^s)^\alpha \,.\, 1^{1-\alpha} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{1-\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^\alpha . n^{1-\alpha}$$

neboli
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^{\alpha}.$$

Protože $\alpha = \frac{r}{s}$, plyne z poslední nerovnosti umocněním na $\frac{1}{r}$ vztah

$$\text{(III.40)} \qquad [A_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r} \leqq [A_n(\boldsymbol{x}^s)]^{1/s} \quad \text{pro } 0 < r < s.$$

Poznámka III.8. Na rozdíl od nerovnosti (III.40) nemusí platit nerovnost

$$A_n(\boldsymbol{x}^r) \leqq A_n(\boldsymbol{x}^s) \quad \text{pro} \quad 0 < r < s:$$

Stačí zvolit $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; pak je $A_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}$ a $A_2(\boldsymbol{x}^2) = \frac{1}{8} < A_2(\boldsymbol{x})$. Pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ je ovšem $A_2(\boldsymbol{x}) = 1$ a $A_2(\boldsymbol{x}^2) = 2 > A_2(\boldsymbol{x})$.

Označme

$$\text{(III.41)} \qquad S_n(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

je tedy $S_n(\boldsymbol{x}) = nA_n(\boldsymbol{x})$. Výraz $S_n(\boldsymbol{x}^p)$ se pro pevné $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ chová zcela jinak než výraz $A_n(\boldsymbol{x}^p)$: Pro $0 < r < s$ platí

$$\text{(III.42)} \qquad [S_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r} \geqq [S(\boldsymbol{x}^s)]^{1/s}.$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že vektor $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ je zvolen tak, aby platilo $S_n(\boldsymbol{x}^r) = 1$. Pak musí být $x_k \leqq 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, a tedy je

$$x_k^s \leqq x_k^r \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, máme $S_n(\boldsymbol{x}^s) \leqq S_n(\boldsymbol{x}^r) = 1$ a odtud plyne (III.42) odmocněním. —

Budiž nyní $\mathbf{x}$ takový vektor, že $S_n(\mathbf{x}^r) > 0$, a definujme vektor $\mathbf{y}$ takto:

$$y_i = \frac{x_i}{[S_n(\mathbf{x}^r)]^{1/r}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Pak je $S_n(\mathbf{y}^r) = 1$ a podle první části důkazu platí (III.42) pro vektor $\mathbf{y}$, tj. $[S_n(\mathbf{y}^s)]^{1/s} \leqq 1$; současně však je $1 \geqq [S_n(\mathbf{y}^s)]^{1/s} = \dfrac{1}{[S_n(\mathbf{x}^r)]^{1/r}}\,[S_n(\mathbf{x}^s)]^{1/s}$, a odtud plyne (III.42).

Úloha III.14. Ukažte, že pro některé vektory $\mathbf{x}$ je $S_n(\mathbf{x}^r) \geqq S_n(\mathbf{x}^s)$, kdežto pro jiné je $S_n(\mathbf{x}^r) \leqq S_n(\mathbf{x}^s)$ $(0 < r < s)$.

Předcházející výsledky ukazují, že u výrazů z (III.40) a (III.42) je důležitý exponent $\dfrac{1}{r}$ resp. $\dfrac{1}{s}$. Lze se nyní ptát, co se stane, když v (III.32) „zapomeneme" na exponenty $\dfrac{1}{p}$. Pak se tato nerovnost obrátí:

Budiž $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ a $p \geqq 1$. Pak platí

$$\text{(III.43)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,;$$

pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost

$$\text{(III.44)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,.$$

Důkaz tohoto tvrzení plyne z (III.42): Zvolme tam $n = 2$ a místo dvojice x_1, x_2 uvažujme dvojici x_k, y_k; pak má tato nerovnost tvar $(x_k^r + y_k^r)^{1/r} \geqq (x_k^s + y_k^s)^{1/s}$. Zvolíme-li ještě (pro $p > 1$) $r = 1$ a $s = p$, máme

$$x_k + y_k \geqq (x_k^p + y_k^p)^{1/p} \quad \text{čili} \quad (x_k + y_k)^p \geqq x_k^p + y_k^p$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Sečtením těchto n nerovností dostáváme (III.43). — Případ $p < 1$ se dokáže analogicky.

Současně je vidět, že tohoto postupu lze užít i pro více než dva vektory, takže pro $p \geqq 1$ např. platí:

$$A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}]^p) \geqq A_n(\mathbf{x}^p) + A_n(\mathbf{y}^p) + A_n(\mathbf{z}^p)\,.$$

V Minkowského nerovnosti (III.32) tedy nelze beztrestně vynechat exponenty $\dfrac{1}{p}$. Pokud chceme vzorec „bez odmocnin" se stejným znaménkem nerovnosti jako v (III.32), musíme použít úlohy III.2: Položíme-li v (III.13) $u = x_k$ a $v = y_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), dostaneme n nerovností $(x_k + y_k)^p \leqq 2^{p-1}(x_k^p + y_k^p)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) a po jejich sečtení máme žádanou nerovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)$$

pro $p > 1$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$.

Bez „odmocňování" se obejdeme i v tzv. *Beckenbachově nerovnosti*, o níž pojednává úloha III.16. Nejprve však budeme potřebovat tvrzení, které je obsahem následující úlohy.

Úloha III.15. Budiž $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dokažte, že pro všechny vektory $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ takové, že $S_n(\mathbf{z}^q) = 1$, platí

$$[S_n)\mathbf{x}\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{x}^p)\,, \tag{III.45}$$

a že existuje vektor $\mathbf{z}^*$ (závislý na $\mathbf{x}$) tak, že v (III.45) platí rovnost.

Úloha III.16. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $1 < p \leqq 2$. Dokažte, že pro $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ platí nerovnost

$$\text{(III.46)} \quad \frac{[S_n((\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z})]^p}{S_n((\mathbf{x}+\mathbf{y})^{p-1})} \leqq \frac{[S_n(\mathbf{x}\mathbf{z})]^p}{S_n(\mathbf{x}^{p-1})} + \frac{[S_n(\mathbf{y}\mathbf{z})]^p}{S_n(\mathbf{y}^{p-1})},$$

a pomocí (III.46) dokažte Beckenbachovu nerovnost

$$\text{(III.47)} \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}} \leqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p-1}}.$$

Proč zde předpokládáme, že $1 < p \leqq 2$?

Úloha III.17. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $1 < p \leqq 2$. Dokažte, že

$$\text{(III.48)} \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}} \geqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{p-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p-1}};$$

porovnejte tento odhad s odhadem (III.47).

Úloha III.18. Pro $0 < p \leqq 1$ se v (III.47) změní znaménko nerovnosti v opačné. Dokažte to.

V kapitole II jsme odvodili nerovnost, která v jistém smyslu zobecňovala Cauchyovu nerovnost — místo součtů $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ jsme uvažovali rozdíly $x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n$ (věta II.2). Protože Cauchyova nerovnost je speciálním případem Hölderovy nerovnosti (dostaneme ji pro $p = 2$), lze očekávat, že nějaké podobné tvrzení bude platit i pro obecné p.

Příklad III.6. Buďte $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ vektory, $x_0 \geqq 0$, $y_0 \geqq 0$ čísla, $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ a nechť je splněna alespoň jedna z podmínek

$$\text{(III.49)} \qquad x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p\,, \quad y_0^q \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^q\,.$$

Pak platí

(III.50)

$$x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \left(x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(y_0^q - \sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\tilde{\boldsymbol{x}}^p$ a $\tilde{\boldsymbol{y}}^q$ úměrné [je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{\boldsymbol{y}} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$].

Důkaz: Označme $X = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}$, $Y = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}$. Podmínky (III.49) můžeme zapsat takto:

$$\text{(III.51)} \qquad x_0 \geqq X\,, \quad y_0 \geqq Y\,,$$

a nerovnost (III.50) má tvar

$$\text{(III.52)} \qquad x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq (x_0^p - X^p)^{1/p} (y_0^q - Y^q)^{1/q}\,.$$

Předpokládejme, že nerovnost (III.50) platí pro $n = 1$. To znamená, že je

$$\text{(III.53)} \qquad x_0 y_0 - XY \geqq (x_0^p - X^p)^{1/p} (y_0^q - Y^q)^{1/q}\,,$$

pokud je splněna alespoň jedna z podmínek (III.51). Ale z (III.53) už plyne (III.52), neboť podle Hölderovy nerovnosti (III.6) je

$$\text{(III.54)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq X \,.\, Y\,,$$

a tedy $x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqq x_0y_0 - XY$. Rovnost v (III.52) nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li rovnost v (III.53) i v (III.54). Rovnost v (III.54) znamená, že $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{y}^q$ (věta III.2), rovnost v (III.53) znamená, že vektory (x_0^p, X^p) a (y_0^q, Y^q) jsou úměrné (stále předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = 1$!); to dohromady dává vztah $\tilde{\mathbf{x}}^p \sim \tilde{\mathbf{y}}^q$.

Zbývá tedy dokázat tvrzení našeho příkladu pro $n = 1$. To však už je důsledkem Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$: Uvažujeme-li totiž v (III.6) pro $n = 2$ číslo X místo x_1, číslo $(x_0^p - X^p)^{1/p}$ místo x_2 a podobně Y a $(y_0^q - Y^q)^{1/q}$ místo y_1 a y_2, máme:

$$XY + (x_0^p - X^p)^{1/p}(y_0^q - Y^q)^{1/q} \leqq$$
$$\leqq (X^p + x_0^p - X^p)^{1/p}.(Y^q + y_0^q - Y^q)^{1/q} = x_0y_0$$

a odtud plyne (III.53). Má-li platit v poslední nerovnosti znaménko rovnosti, musí být podle věty III.2 vektory $(X^p, x_0^p - X^p)$ a $(Y^q, y_0^q - Y^q)$ úměrné, a odtud už plyne úměrnost vektorů (x_0^p, X^p), (y_0^q, Y^q).

Důkaz, který jsme právě provedli, byl jakýmsi „testem čtenářovy pozornosti“. *Nebyl totiž zcela v pořádku:* Když jsme použili Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$ a pro čísla X, $(x_0^p - X^p)^{1/p}$, Y, $(y_0^q - Y)^{1/q}$, předpokládali jsme, že je splněna alespoň jedna z podmínek (III.51) [což jsou podmínky (III.49) pro $n = 2$]; proto může být jedno z těchto čtyř čísel *záporné* (případně nemusí být vůbec reálné — např. pro $x_0^p < X^p$ a $p = 2$). Ve větě III.2 však výslovně předpokládáme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou *nezáporné*. Musíme proto tvrzení z příkladu III.6 opravit: *Nerovnost* (III.50) *umíme dokázat jen za předpokladu, že platí*

$$\text{(III.55)} \qquad x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p \quad \text{a současně} \quad y_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^p \,.$$

Nestačí tedy jedna z podmínek (III.49), musí být splněny *obě*!

Úloha III.19. Porovnáte-li výsledek příkladu III.6 [už opravený, tj. za předpokladu (III.55)] s větou II.2, zjistíte, že u této věty skutečně stačilo, aby byla splněna alespoň jedna z podmínek (III.49) (kde ovšem klademe $p = 2$). Lze tedy dokázat nerovnost (III.50) nějakým jiným způsobem za využití jen jedné z podmínek (III.49), nebo je požadavek (III.55) podstatný?

Úloha III.20. Nerovnost (III.50) je jistou analogií Hölderovy nerovnosti. Dokažte, že analogicky lze „rozšířit" i Minkowského nerovnost, tj. dokažte toto tvrzení: Je-li $p \geqq 1$, $\tilde{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$ a je-li

$$\text{(III.56)} \qquad x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p \quad \text{a} \quad y_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^p \,,$$

je

$$\text{(III.57)} \qquad [(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{1/p} \geqq$$

$$\geqq (x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (y_0^p - \sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p} \,.$$

Kdy nastane v (III.57) rovnost?

Úloha III.21. Nechť je v předchozí úloze $p = 2$; platí pak nerovnost (III.57), když je splněna jen jedna z podmínek (III.56)?

Na závěr této kapitoly se vraťme ještě k Hölderově nerovnosti. Z ní totiž plyne toto tvrzení, ukazující, že pravá strana v (III.6) udává v jistém smyslu *nejlepší* horní odhad výrazu $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$:

Budiž $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, A nezáporné číslo. Pak k tomu, aby platilo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq A \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q} \quad \text{pro všechna } \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \tag{III.58}$$

je nutné a stačí, aby bylo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p \leqq A^p . \tag{III.59}$$

Podrobný důkaz přenecháme čtenáři s tímto návodem. Postačitelnost podmínky (III.59) plyne ihned z Hölderovy nerovnosti (III.6), nutnost lze dokázat sporem: předpokládáme-li, že $\sum_{k=1}^{n} x_k^p > A^p$, vede (III.58) ke sporu s Hölderovou nerovností, jakmile zvolíme $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$.

Část tvrzení, jehož důkaz jsme právě přenechali čtenáři, lze zformulovat takto: Je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k^p > A^p$, existuje vektor $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ tak, že $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k > A \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q}$. Pišme nyní x_0 místo A a označme $y_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q}$. Pak tedy je $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k > x_0 y_0$ čili $x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k < 0$. Tento výsledek dává opět jistou odpověď na otázku z úlohy III.19.