Princip matematické indukce

---

1. kapitola. Princip matematické indukce a jeho využití v důkazech

In: Antonín Vrba (author): Princip matematické indukce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 5–30.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403893

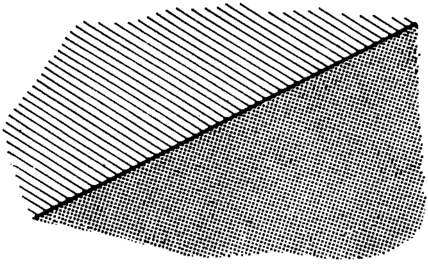
1. kapitola

PRINCIP MATEMATICKÉ INDUKCE A JEHO VYUŽITÍ V DŮKAZECH

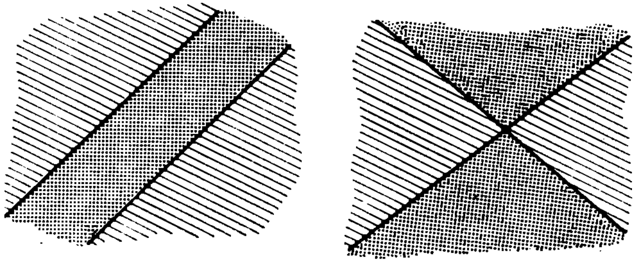
Začneme hned úlohou. Teoretické výklady si necháme na později.

Úloha 1. V rovině je dán konečný počet různých přímek. Ty ji rozdělují na části. Dokažte, že je tyto části možno vybarvit dvěma barvami tak, aby každá část byla celá vybarvena jednou barvou a aby žádné dvě sousední části (tj. části oddělené úsečkou, polopřímkou nebo přímkou) nebyly vybarveny stejnou barvou.

Je-li počet přímek hodně malý, snadno se přesvědčíme, že věta, kterou máme dokázat, v těchto jednotlivých případech platí. Tak např. jedna přímka rozděluje rovinu na dvě sousední poloroviny a ty můžeme obarvit různými barvami.

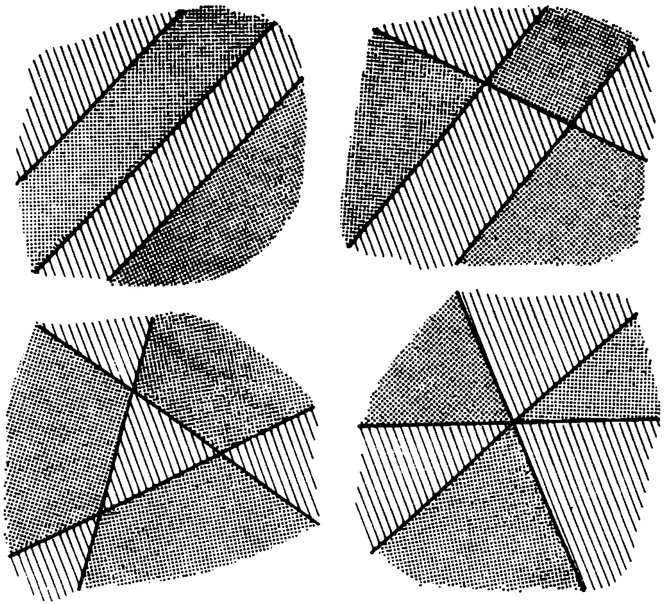


Jsou-li dány dvě přímky, mohou být buď rovnoběžné, nebo různoběžné. Na obrázku je znázorněno, jak lze vybarvit části, aby podmínka byla splněna.



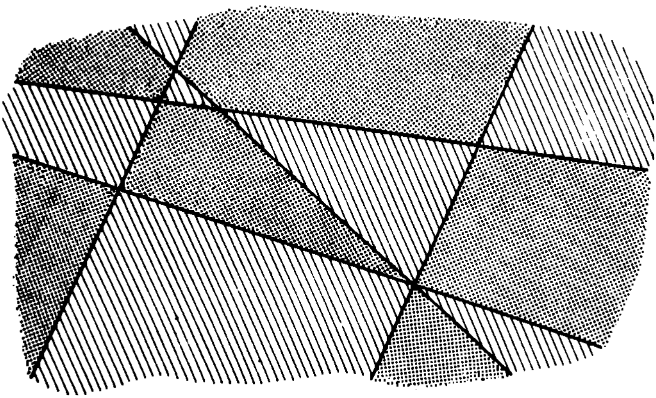
Na dalším obrázku jsou všechny čtyři vzájemné polohy tří přímek. I zde se podařilo části vybarvit náležitým způsobem.

Se vzrůstajícím počtem přímek však rychle rostou technické potíže. Zvětšuje se počet případů vzájemné polohy přímek a nastává problém s tím, aby se na žádný z nich nezapomnělo. Kromě toho obrázky také ztrácejí na přehlednosti a jejich barvení je čím dále složitější. I kdybychom se s těmito obtížemi dokázali vypořádat a dařilo se nám ověřovat platnost věty v dalších jednotlivých konkrétních případech, nebude to mít pro důkaz věty valný význam. Věta totiž tvrdí, že části lze vybarvit popsaným způsobem při jakémkoliv počtu přímek a jakékoliv jejich poloze. Ať ověříme platnost věty v sebevíce jednotlivých případech, zůstane stále nekonečně mnoho případů nevyšetřeno a o platnosti obecné věty stále nemůžeme nic říci. Tento postup by měl smysl pouze tehdy, podařilo-li by se ukázat, že se v určitém případě nedají části roviny vybarvit popsaným způso-

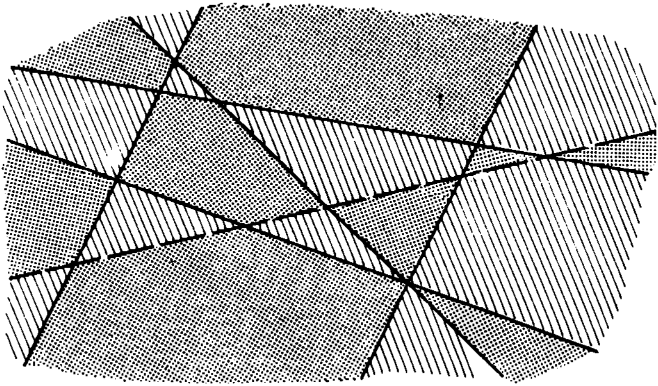


bem. Tak bychom dokázali, že věta neplatí. Jak se však brzy přesvědčíme, věta platí a k jejímu důkazu budeme tedy musit přistoupit z jiné strany.

Zachrání nás tato spásná myšlenka: Dejme tomu, že jsme se o platnosti věty přesvědčili ještě pro p přímek. Což vyjít z vybarvení částí v tomto případě, vést $(p + 1)$-tou přímku a pokusit se nějak upravit původní obarvení tak, aby z něho vzniklo náležité obarvení pro $p + 1$ přímek? Když se nám to podaří, budeme tak mít větu ověřenu i pro $p + 1$ přímek. Pokud však tato metoda přechodu od případu p přímek k případu $p + 1$ přímek bude univerzální, tj. půjde použít pro jakékoliv přirozené číslo p, bude věta vlastně dokázána. Můžeme si totiž představit, jak metodu dále opakovaně používáme: na základě toho, že jsme větu ověřili pro $p + 1$ přímek, ji ověříme i pro $p + 2$ přímek, na základě toho pak pro $p + 3$ přímek atd.



Zbývá jen to hlavní — najít, jak z vybarvení pro p přímek sestrojit vybarvení pro $p + 1$ přímek. Není však tak těžké na to přijít. Představme si, že je v rovině p přímek a že jsou její části vybarveny dvěma barvami tak, aby sousední části měly vždy různé barvy. (Je to znázorněno na obrázku.) Veďme nyní $(p + 1)$-tou přímku (na druhém z obrázků je znázorněna čárkovaně). Ta rozdělí rovinu na dvě poloroviny. V jedné z nich barvy ponecháme tak, jak byly původně, a ve druhé je navzájem vyměníme. Pokud je mezi dvěma sousedními částmi roviny při tomto novém dělení hranice tvořená některou z původních p přímek (nebo její částí), pak byly části obarveny různými barvami a jsou v téže polorovině určené $(p + 1)$-tou přímkou. Zůstaly tedy buď beze změny, nebo se navzájem vyměnily a jsou opět různé. Jsou-li dvě sousední části odděleny $(p + 1)$-tou přímkou (nebo její částí), pak zřejmě vznikly z některé původní



části tak, že ji $(p + 1)$-tá přímka rozetla. Původní barva této části na jedné straně zůstala a na druhé se změnila. I tyto sousední části jsou tedy vybarveny různými barvami.

Důkaz, který jsme právě dokončili, byl založen na tzv. *principu matematické indukce*:

Buď M množina, která má tyto dvě vlastnosti:

(I) $1 \in M$.

(II) Pro každé přirozené číslo p platí: Jestliže $p \in M$, potom je též $p + 1 \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

O platnosti tohoto principu se přesvědčíme snadno: Podle (I) je $1 \in M$. Podle (II) z toho plyne, že $2 \in M$. Z toho opět podle (II) plyne, že $3 \in M$, odtud je pak $4 \in M$ atd. Tak můžeme zřejmě postupně dojít ke kterémukoliv přirozenému číslu; množina M tedy obsahuje všechna přirozená čísla.

Jinak si to můžeme ukázat také takto:

Dejme tomu, že existují přirozená čísla, která do M nepatří; nejmenší z nich označme t. Podle (I) je $t > 1$. Číslo $t - 1$ je tedy přirozené a podle definice čísla t platí $t - 1 \in M$. Podle (II) z toho plyne, že $t \in M$ a to je spor.

K oběma úvahám se ještě vrátíme na str. 59 a budeme je podrobněji analyzovat.

Principu matematické indukce lze mj. užít k dokazování vět tak, jak jsme to učinili při řešení úlohy 1. **Chceme-li dokázat platnost nějaké věty, která má tvar** (nebo se dá přeformulovat tak, aby tohoto tvaru nabyla) **„Pro každé přirozené číslo platí...“, stačí dokázat tyto dvě pomocné věty:**

(1) **Věta platí pro číslo 1.**

(2) **Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro číslo p, pak platí také pro číslo $p + 1$.**

To plyne bezprostředně z principu matematické indukce, vezmeme-li za M množinu všech čísel, pro něž věta platí.

Pomocné větě (2) se často říká *indukční krok* a jejímu předpokladu „věta platí pro číslo p“ se říkává *indukční předpoklad.*

Ukážeme si ještě na několika typických příkladech, jak se provádějí důkazy metodou matematické indukce.

Úloha 2. Dokažte, že číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ není pro žádné přirozené k dělitelno číslem 73.

Řešení. Pro $k = 1$ věta platí, neboť $2^3 + 3^4 = 89$ a to není dělitelno číslem 73. Pomocná věta (1) je dokázána.

Přistupme k důkazu pomocné věty (2). Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že $2^{3p} + 3^{4p}$ není dělitelno číslem 73. Vyšetřme číslo $2^{3(p+1)} + 3^{4(p+1)}$. To je rovno

$$2^{3p+3} + 3^{4p+4} = 2^3 . 2^{3p} + 3^4 . 3^{4p} =$$
$$= 8 . 2^{3p} + 81 . 3^{4p} = 8(2^{3p} + 3^{4p}) + 73 . 3^{4p} .$$

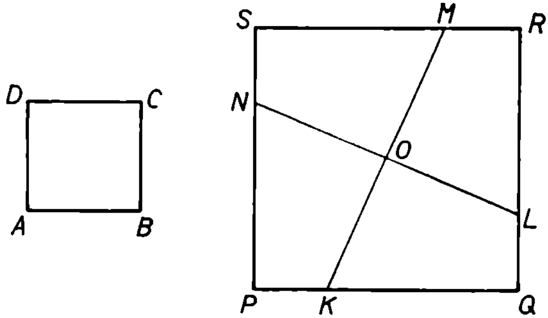
První z obou sčítanců není podle indukčního předpokladu dělitelný číslem 73 a druhý je. Součet tedy číslem 73 dělitelný není.

Tím je důkaz proveden a úloha vyřešena.

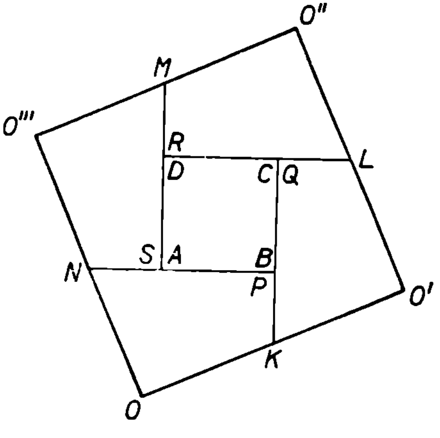
Úloha 3. Je dáno n čtverců. Dokažte, že je lze rozdělit na části tak, aby z nich bylo možno sestavit jediný čtverec.

Řešení. Je-li dán jen jeden čtverec, je možno ho rozdělit jakkoliv. Ze vzniklých částí lze pak vždy sestavit původní čtverec. Pomocná věta (1) je dokázána.

Buď nyní p přirozené číslo. Předpokládejme, že pro p čtverců věta platí, a dokažme, že pak platí i pro $p + 1$ čtverců. Vezmeme si nějaké dva z nich (je $p + 1 \geqq 2$). Označme je $ABCD$, $PQRS$ (sledujte obrázek) tak, aby $AB \leqq PQ$. Na stranách PQ, QR, RS, SP sestrojme po řadě body K, L, M, N tak, aby platilo $KQ = LR =$ $= MS = NP = \dfrac{AB + PQ}{2}$. Označme O společný bod úseček KM, LN a rozdělme čtverec $PQRS$ podle těchto



úseček na čtyři shodné části. Přiložíme-li je ke čtverci $ABCD$ tak, jak ukazuje další obrázek, vznikne čtverec, o čemž se snadno přesvědčíte. Tento čtverec spolu se zbylými $p - 1$ čtverci umíme podle indukčního předpokladu dále rozdělit tak, aby vzniklé části dávaly jeden



čtverec. Nyní je již zřejmé, jak rozdělit původních $p + 1$ čtverců. Dokázali jsme pomocnou větu (2).

Tím je úloha vyřešena.

Věty, které jsme zatím dokazovali, měly velmi jednoduché předpoklady. V další úloze bude lépe vidět, jak se využívá při důkaze matematickou indukcí předpokladů dokazované věty.

Úloha 4. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla, pro něž platí

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1 ,$$

potom je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n .$$

Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ věta platí (nastává rovnost).

Buď nyní p přirozené číslo. Předpokládejme, že pokud je součin nějakých p kladných čísel roven 1, potom je jejich součet větší nebo roven p. Uvažujme nyní $p + 1$ kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ takových, že

$$x_1 x_2 \ldots x_{p+1} = 1 .$$

Můžeme předpokládat, že jsou označena tak, aby

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{p+1} .$$

Pro p kladných čísel

$$x_1 x_{p+1}, x_2, \ldots, x_p$$

platí, že jejich součin je 1 a podle indukčního předpokladu je tedy

$$x_1 x_{p+1} + x_2 + \ldots + x_p \geqq p .$$

Odtud dostáváme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} = (x_1 x_{p+1} + x_2 + \ldots + x_p) +$$
$$+ x_1 + x_{p+1} - x_1 x_{p+1} \geqq p + x_1 + x_{p+1} - x_1 x_{p+1} =$$
$$= p + (1 - x_1)(x_{p+1} - 1) + 1 \geqq p + 1 \,.$$

Poslední nerovnost vznikla takto:

Kdyby bylo $x_1 > 1$, bylo by také (protože x_1 je nejmenší z uvažovaných čísel) $x_2 > 1, \ldots, x_{p+1} > 1$ a tedy $x_1 x_2 \ldots x_{p+1} > 1$, což odporuje předpokladu*). Je tedy $x_1 \leqq 1$. Analogicky se dokáže, že $x_{p+1} \geqq 1$. Součin $(1 - x_1)(x_{p+1} - 1)$ je tedy nezáporný.

Tím je důkaz proveden.

I když důkaz pomocné věty (1) bývá většinou podstatně snazší než důkaz indukčního kroku (2) (není tomu tak vždycky), není radno tuto etapu důkazu metodou matematické indukce odbývat nebo dokonce vynechávat. Představme si, že bychom se pokoušeli dokázat tuto větu:

Pro každé přirozené k je číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ dělitelno číslem 73.

Z úlohy 2 víme, že to není pravda. Pokud bychom se však zmýlili a důkaz pomocné věty (1) (která ve skutečnosti neplatí) se nám podařil, nebo bychom případ $k = 1$ vůbec nezkoumali, podařilo by se nám nepravdivou větu „dokázat“. Pomocná věta (2) totiž platí: Předpokládáme-li, že $2^{3p} + 3^{4p}$ je dělitelno číslem 73, pak z toho vyplývá, že i $2^{3(p+1)} + 3^{4(p+1)} = 8(2^{3p} + 3^{4p}) + 73 \, . \, 3^{4p}$ je dělitelno číslem 73.

*) Předpokladu dokazované věty, nikoliv indukčnímu předpokladu.

Ještě na jednom odstrašujícím příkladě si ukažme, jak důležitá jsou slova „pro každé přirozené číslo" ve formulaci pomocné věty (2). „Dokážeme" si, že pro každé přirozené číslo n platí: Každých n přirozených čísel si je navzájem rovno. Provedeme to metodou matematické indukce.

Pro $n = 1$ to platí — každé přirozené číslo je samo sobě rovno. Pomocná věta (1) je dokázána.

Buď dále p přirozené číslo a předpokládejme, že každých p přirozených čísel je si navzájem rovno. Mějme nyní $p + 1$ přirozených čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}$. Podle indukčního předpokladu je

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_p$$

a také

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_{p+1}\,.$$

Je tedy

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_p = c_{p+1}\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Omyl tentokrát spočívá v tom, že pomocná věta (2) neplatí pro $p = 1$. Z toho, že každé číslo je rovno samo sobě neplyne, že každá dvě čísla jsou si rovna.

Uvědomme si dále, že na principu matematické indukce vůbec není podstatné, že se začíná od čísla 1. Zcela analogicky jako u původního znění (I)—(II) lze ověřit pravdivost následující obecnější verse:

Buď M množina, která má tyto vlastnosti:

(III) Pro celé číslo k platí $k \in M$.

(IV) Pro každé celé číslo $c \geqq k$ platí: Jestliže $c \in M$, potom také $c + 1 \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna celá čísla větší nebo rovná číslu k.

To plyne také přímo z původního znění principu matematické indukce: Označme L množinu, která vznikne z množiny M odečtením čísla $k - 1$ ode všech celých čísel, která jsou obsažena v množině M. Z předpokladů (III) a (IV) pro množinu M plyne, že jsou splněny předpoklady (I) a (II) pro množinu L. Množina L tedy obsahuje všechna přirozená čísla a tedy množina M obsahuje všechna celá čísla větší nebo rovná číslu k.

Toto znění principu matematické indukce umožňuje mj. **dokazovat věty typu „Pro každé celé číslo větší než číslo k, nebo rovné číslu k platí…“ tak, že dokážeme následující dvě pomocné věty:**

(3) Věta platí pro celé číslo k.

(4) Pro každé celé číslo $c \geqq k$ platí: Pokud věta platí pro číslo c, pak platí i pro číslo $c + 1$.

Tuto metodu si budeme demonstrovat na několika úlohách.

Úloha 5. Dokažte, že pro každé reálné číslo α, které není celočíselným násobkem čísla π, a pro každé nezáporné celé číslo n platí

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Řešení. Pro $n = 0$ se dokazovaná rovnost redukuje na

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha},$$

což je pravda vzhledem ke známému vzorci pro sinus dvojnásobného úhlu. Pomocná věta (3) je dokázána.

Předpokládejme, že $c \geqq 0$ je celé číslo a že pro

$n = c$ dokazovaná rovnost platí. Dokážeme ji pro $n = c + 1$. Postupně dostáváme

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^c\alpha \cos 2^{c+1}\alpha =$$

$$= \frac{\sin 2^{c+1}\alpha}{2^{c+1}\sin\alpha} \cos 2^{c+1}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\sin 2 \,.\, 2^{c+1}\alpha}{2^{c+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{c+2}\alpha}{2^{c+2}\sin\alpha}\,.$$

(První rovnost je důsledkem indukčního předpokladu a druhá plyne ze zmíněného goniometrického vzorce.)

Tím je proveden důkaz pomocné věty (4) a úloha je vyřešena.

Úloha 6. Na poště mají známky pouze v hodnotách 0,30 Kčs a 2,50 Kčs. Dokažte, že jimi lze ofrankovat jakoukoliv zásilku, jejíž poštovné činí alespoň 4,80 Kčs. (Poštovné je vždy zaokrouhleno na desetihaléře.)

Řešení. Užijeme-li matematického vyjadřování místo poštovního, jde o to dokázat následující větu:

Ke každému přirozenému číslu $a \geqq 48$ existují celá nezáporná čísla u, v taková, že

$$a = 3u + 25v\,.$$

(Čísla u, v odpovídají počtu známek za 0,30 Kčs, resp. 2,50 Kčs.) K tomu, abychom ji dokázali, bude stačit dokázat pomocné věty (3) a (4) pro $k = 48$.

Vzhledem k tomu, že $48 = 3 \,.\, 16 + 25 \,.\, 0$, pomocná věta (3) platí.

Předpokládejme, že $c \geqq 48$ je přirozené číslo*) a že

---

*) Zde je jedno, zda řekneme „přirozené“ nebo „celé“, neboť $c > 0$.

pro ně věta platí, tj. pro jistá nezáporná celá čísla u, v platí

$$c = 3u + 25v\,.$$

Hledejme nyní podobné vyjádření pro číslo $c + 1$. Všimněme si, že

$$1\,.\,25 - 8\,.\,3 = 1$$

a také

$$17\,.\,3 - 2\,.\,25 = 1\,.$$

Z toho plyne:
Je-li $u \geqq 8$, můžeme psát

$$c + 1 = 3(u - 8) + 25(v + 1)\,.$$

Je-li $v \geqq 2$, můžeme psát

$$c + 1 = 3(u + 17) + 25(v - 2)\,.$$

V případech $u \geqq 8$ a $v \geqq 2$ jsme s důkazem pomocné věty (4) hotovi. Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali $c \geqq 48$, jiný případ už nenastane. Kdyby totiž bylo současně $u \leqq 7$ i $v \leqq 1$, bylo by

$$c = 3u + 25v \leqq 3\,.\,7 + 25\,.\,1 = 46.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

Uveďme si ještě jiné velmi užitečné znění principu matematické indukce.

Buď M množina, která má tyto vlastnosti:
(V) **$1 \in M$.**
(VI) **Pro každé přirozené číslo p platí: Je-li $k \in M$ pro všechna přirozená $k \leqq p$, pak je též $p + 1 \in M$.**
Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

O jeho platnosti se můžeme přesvědčit podobně jako u principu (I)—(II). Princip (V)—(VI) je však důsledkem principu (I)—(II): Buď M' množina všech přirozených čísel n takových, že $1 \in M$, $2 \in M$, ..., $n \in M$. Zřejmě platí $M' \subseteq M$. Podle (V) je $1 \in M'$. Buď dále p přirozené číslo, $p \in M'$. Podle (VI) je pak též $p + 1 \in M$ a tedy $p + 1 \in M'$. Vidíme, že podle principu (I)—(II) obsahuje množina M' všechna přirozená čísla a tedy též množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

Principu (V)—(VI) odpovídá následující schéma, podle něhož se dají **dokazovat matematické věty** nám již známého **typu „Pro každé přirozené číslo platí...“ tak, že dokážeme následující dvě pomocné věty:**

(5) **Věta platí pro číslo 1.**

(6) **Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro všechna přirozená čísla menší než $p + 1$, pak platí i pro číslo $p + 1$.**

Užitečnost tohoto principu si budeme demonstrovat na následujících dvou úlohách.

Úloha 7. Je-li $a + \dfrac{1}{a}$ celé číslo, pak $a^m + \dfrac{1}{a^m}$ je pro každé přirozené m také celé číslo. Dokažte.

Řešení. Pro $m = 1$ věta triviálně platí. Pomocná věta (5) je dokázána.

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená $m \leqq p$ věta platí. Podle binomické věty je

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} = a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p \frac{1}{a} + \binom{p+1}{2} a^{p-1} \frac{1}{a^2} + \\ + \ldots + \binom{p+1}{p} a \frac{1}{a^p} + \frac{1}{a^{p+1}}.$$

Využijeme-li známého vzorce

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s},$$

který platí pro všechna přirozená čísla r, s, $r \geqq s$, dostaneme odtud pro sudé p

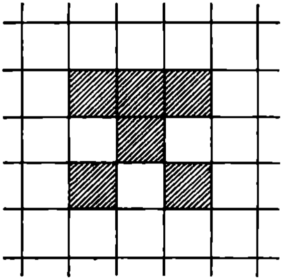
$$a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} - \binom{p+1}{1}\left(a^{p-1} + \frac{1}{a^{p-1}}\right) - \binom{p+1}{2}\left(a^{p-3} + \frac{1}{a^{p-3}}\right) - \ldots - \binom{p+1}{\frac{p}{2}}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

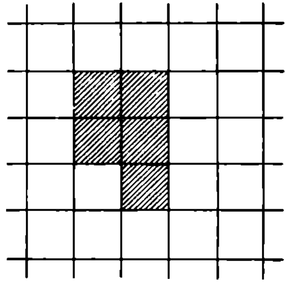
a pro liché p

$$a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} - \binom{p+1}{1}\left(a^{p-1} + \frac{1}{a^{p-1}}\right) - \binom{p+1}{2}\left(a^{p-3} + \frac{1}{a^{p-3}}\right) - \ldots - \binom{p+1}{\frac{p-1}{2}}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}.$$

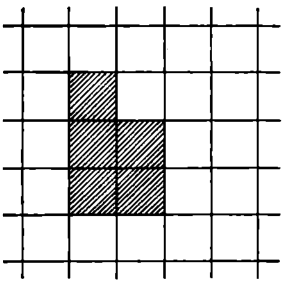
Z indukčního předpokladu vyplývá, že v obou případech jsou všechny sčítance na pravé straně celá čísla a tedy i na levé straně je celé číslo. Věta tedy platí i pro $m = p + 1$, pomocná věta (6) je dokázána a úloha je vyřešena.

Úloha 8. Na bílém čtverečkovém papíře je n čtverečků začerněno. Čtverečky se přebarvují (najednou) podle následujícího pravidla: Každý čtvereček získá takovou

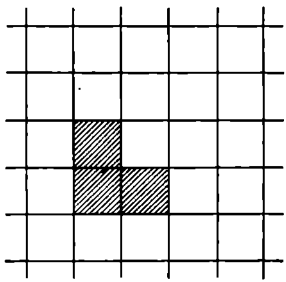




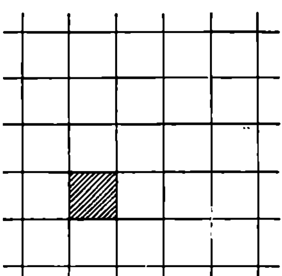
po 1. přebarvení



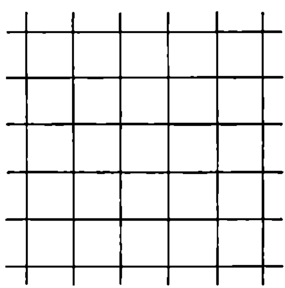
po 2. přebarvení



po 3. přebarvení



po 4. přebarvení



po 5. přebarvení

barvu, jakou měla většina z těchto tří čtverečků: uvažovaný čtvereček, čtvereček bezprostředně vpravo od něho a čtvereček bezprostředně nad ním. Dokažte, že nejvýše po n přebarveních budou všechny čtverečky bílé. (Obrázek ukazuje, jak se při postupném přebarvování mění jedna konfigurace čtverečků.)

Řešení. Pro $n = 1$ je to zřejmě pravda. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla menší než $p + 1$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro číslo $p + 1$.

Nechť je tedy právě $p + 1$ čtverečků černých. Uvažujme první svislou řadu čtverečků zleva, která ještě obsahuje černé čtverečky. Ty nemají zřejmě žádný vliv na přebarvování čtverečků v ostatních svislých řadách. V nich je nejvýše p černých čtverečků a podle indukčního předpokladu*) v nich po p krocích už žádný černý čtvereček nebude.

Analogicky dokážeme, že po p krocích nebude žádný černý čtvereček ve vodorovných řadách s výjimkou té, která byla z řad, obsahujících původně černé čtverečky, nejníže. Po p krocích může být tedy černý jediný čtvereček, totiž ten, v němž se kříží uvažovaná levá svislá a dolní vodorovná řada. Po $(p + 1)$-tém kroku bude bílý i ten. Tím je důkaz proveden.

Princip matematické indukce se dá obměňovat nejrůznějšími způsoby. Uveďme si jedno velice speciální znění:

Buď M množina, která má následující vlastnosti:
(VII) **$1 \in M$, $2 \in M$, ..., $r \in M$.**

---

*) Zde by nám schéma (1)—(2) nepomohlo, neboť počet čtverečků v ostatních řadách je jen nejvýše p, nemusí být právě p, a o jejich počtu nemůžeme nic přesnějšího říci.

(VIII) Pro každé přirozené číslo p platí: Jestliže $p \in M$, $p + 1 \in M$, ..., $p + r - 1 \in M$, pak je také $p + r \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

Tomu ovšem odpovídá příslušné důkazové schéma.

Chceme-li dokázat, že nějaká věta (obvyklého typu) platí pro každé přirozené číslo, stačí dokázat následující dvě pomocné věty:

(7) **Věta platí pro čísla 1, 2, ..., r.**

(8) **Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro čísla p, $p + 1$, ..., $p + r - 1$, pak platí i pro číslo $p + r$.**

Podle tohoto schématu budeme postupovat v další úloze (bude tam $r = 2$).

Úloha 9. Je-li $\cos \alpha = \frac{s}{t}$, kde s, t jsou celá čísla, potom pro každé přirozené n je $t^n \cos n\alpha$ číslo celé. Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ je

$$t \cos \alpha = t \frac{s}{t} = s .$$

Pro $n = 2$ dostáváme podle známého vzorce

$$t^2 \cos 2\alpha = t^2(2 \cos^2 \alpha - 1) =$$
$$= t^2 \left(2 \frac{s^2}{t^2} - 1\right) = 2s^2 - t^2 .$$

Pomocná věta (7) je tím dokázána.

Přistupme k důkazu pomocné věty (8). Není těžké odvodit goniometrický vzorec

$$\cos (k + 2) \alpha = 2 \cos \alpha \cos (k + 1) \alpha - \cos k\alpha$$

platný pro všechna přirozená k a reálná α. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ a pro $n = p + 1$ věta platí. Podle uvedeného vzorce je

$$t^{p+2} \cos (p + 2)\, \alpha = 2(t \cos \alpha)\,(t^{p+1} \cos (p + 1)\, \alpha) - t^2(t^p \cos p\alpha)\,.$$

Podle indukčního předpokladu jsou sčítance vpravo celá čísla a vlevo tedy také. Pomocná věta (8) tedy platí a tím je důkaz proveden.

Zatím jsme formulovali několik variant principů matematické indukce, v nichž se tvrdilo, že jistá množina M obsahuje všechna přirozená čísla, resp. všechna celá čísla od určitého počínaje. Někdy se však hodí následující verze, v níž se tvrdí, že jistá množina M obsahuje všechna přirozená čísla až po jistou horní mez.

Buď k přirozené číslo a M množina, která má tyto vlastnosti:
(IX) $1 \in M$.
(X) **Pro každé přirozené číslo $p < k$ platí: Jestliže $p \in M$, potom též $p + 1 \in M$.**
Potom množina M obsahuje přirozená čísla 1, 2, ..., k.

Příslušné důkazové schéma zní pak takto: **Máme-li dokázat, že věta platí pro přirozená čísla 1, 2, ..., k, pak stačí dokázat:**
(9) **Věta platí pro číslo 1.**
(10) **Pro každé přirozené číslo $p < k$ platí: Jestliže věta platí pro číslo p, potom platí i pro číslo $p + 1$.**

Podle tohoto schématu budeme postupovat v následující úloze.

Úloha 10. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $t \leqq n$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^t < 1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{n^2}.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle t. Pro $t = 1$ je nerovnost zřejmá, pomocná věta (9) je dokázána.

Buď $p < n$ přirozené číslo a nechť pro $t = p$ věta platí. Dokážeme její platnost pro $t = p + 1$. Postupně dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{1}{n}\right) <$$

$$< \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2 + p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3} =$$

$$= 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2} + \frac{p^2}{n^3} - \frac{p+1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.$$

První nerovnost plyne z indukčního předpokladu a druhá je pak důsledkem nerovnosti

$$\frac{p^2}{n^3} < \frac{p+1}{n^2},$$

která zřejmě platí pro každá dvě přirozená čísla $p \leqq n$. Tím je dokázána pomocná věta (10) a úloha je vyřešena.

V nerovnosti z úlohy 10 se vyskytují dvě proměnné, n a t. Nejprve jsme museli rozhodnout, podle které z nich budeme indukci provádět. Uvědomte si, že indukce podle n by patrně nevedla k cíli.

Pět různých znění principu matematické indukce, která jsme si postupně uvedli, bychom mohli ještě dále doplňovat, obměňovat a kombinovat, např. (V)—(VI), (VII)—(VIII) a (IX)—(X) zobecnit v duchu (III)—(IV) tak, aby začínaly od nějakého celého čísla a ne právě od čísla 1, dále (VII)—(VIII) a (IX)—(X) upravit v duchu (V)—(VI) tak, aby se indukční krok neprováděl z p na $p + 1$, ale z 1, 2, ..., p na $p + 1$ apod.

Závěrem ještě několik poznámek praktického rázu. Někdy se setkáváme s indukčním krokem nikoliv z p na $p + 1$, ale z $p - 1$ na p. Tak třeba (II) v této podobě zní: „Pro každé přirozené číslo $p > 1$ platí: Jestliže $p - 1 \in M$, potom též $p \in M$." Uvědomte si, že tento rozdíl je jen formální a není podstatný.

V důkazech vět „Pro každé přirozené číslo n platí..." se často setkáváme s takovouto formulací indukčního kroku: „Předpokládejme, že věta platí pro číslo n, a dokážeme ji pro číslo $n + 1$". Zde není pevně zvolené přirozené číslo, ze kterého při indukčním kroku vycházíme, označeno zvláštním symbolem (my jsme je většinou značili písmenem p), ale užívá se pro ně stejný symbol, který se vyskytuje ve znění věty (v našem případě n). Dva různé symboly se zavádějí spíše z metodických důvodů (a my to v této knížce budeme důsledně dělat), podstatné to však není. Kromě toho užívání stejného symbolu je někdy z čistě praktického hlediska výhodnější, neboť umožňuje stručnější vyjadřování. Není totiž třeba to, co už je ve znění věty zformulováno pro n (např. nějaký vzorec, nerovnost nebo pod.) znovu opisovat pro jiné písmeno (např. pro p) pro potřeby indukčního kroku, stačí jen odkaz.

Konečně si uvědomte, že metodou matematické indukce se dají dokazovat nejen věty „Pro každé přirozené číslo n platí...", ale i jejich speciální případy pro konkrétní hodnoty n. Tak např. skutečnost, že číslo $2^{51} + 3^{68}$ není dělitelno číslem 73 bychom dokazovali tak, že bychom dokázali více, totiž obecnou větu z úlohy 2.

Cvičení

1. V rovině je dáno 7 přímek a ty ji rozdělují na části. Vybarvěte tyto části dvěma barvami tak, aby žádné dvě sousední části neměly stejnou barvu.
2. Nakreslete obrázek k úloze 3 pro případ $AB = PQ$.
3. Zhotovte si z papíru tři čtverce a pak je rozstříhejte tak, aby složením všech částí vznikl jeden velký čtverec.
4. Určete, kdy nastává rovnost v nerovnosti z úlohy 4.
5. Uvažujme množinu všech obdélníků o daném obvodu. Který z nich má největší obsah?
6. Navrhněte krabice ve tvaru kvádru tak, aby měly předepsaný objem a aby se na jejich výrobu spotřebovalo co nejméně materiálu.
7. Uvažujte množinu všech trojúhelníků o daném obvodu. Který z nich má největší obsah?
8. Buď n přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla. Potom platí
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n\,.$$
Dokažte.
9. Kolika způsoby lze ofrankovat zásilku známkami v hodnotě 0,30 a 2,50 Kčs, činí-li poštovné 12,70 Kčs?
10. Existují takové n-tice černých čtverečků, že při přebarvování podle úlohy 8 jsou po $n - 1$ krocích ještě nějaké čtverečky černé?

11. Dokažte, že věta z úlohy 7 platí pro každé celé číslo m.
12. Dokažte větu z úlohy 7 podle schematu (7)—(8).
13. Dokažte metodou matematické indukce následující věty:

a) V rovině je dán konečný počet kružnic. Části, na něž je jimi rozdělena, lze vybarvit dvěma barvami tak, aby sousední části měly různou barvu.

b) V rovině je dáno n přímek tak, že žádné tři z nich nemají společný bod a žádné dvě nejsou nerovnoběžné. Rovina je jimi rozdělena na právě $\frac{n(n+1)}{2}+1$ částí.

c) Číslo $11^{n+1}+12^{2n-1}$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné číslem 133.

d) Pro každých r reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_r$ platí $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^2 \leqq r(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2)$.

e) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ a reálné číslo α, pro něž tq má smysl, platí

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \ldots + \operatorname{tg} (n-1) \alpha \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n\,.$$

f) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\,.$$

g) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,.$$

h) Pro každý konvexní n-úhelník je maximální počet úhlopříček, které se uvnitř něho neprotínají, roven $n - 3$. Každá taková soustava $n - 3$ úhlopříček dělí n-úhelník na $n - 2$ trojúhelníků.

i) Pro každé přirozené číslo n a pro libovolná komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$a_1 + (a_1 + 1)\,a_2 + (a_1 + 1)\,(a_2 + 1)\,a_3 + \ldots +$$
$$+ (a_1 + 1)\,(a_2 + 1) \ldots (a_{n-1} + 1)\,a_n =$$
$$= (a_1 + 1)\,(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) - 1\,.$$

14. Kdy nastane rovnost v nerovnosti ze cvič. 13d)?
15. Jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky takové, že první leží uvnitř druhého. Dokažte, že obvod prvního není větší než obvod druhého.
16. Najděte chybu v této úvaze: Dokažme podle principu (1)—(2) následující větu: Pro každé přirozené číslo n platí: Je-li v autobuse n cestujících, pak je poloprázdný. Pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Je-li autobus poloprázdný při k cestujících, pak přistoupením $(k + 1)$-tého cestujícího nepřestane být poloprázdný.
17. Uvědomte si, že každou větu, kterou jde dokázat pomocí principu (1)—(2), jde dokázat též pomocí principu (5)—(6).
18. Odvoďte přímo (bez použití jiné varianty) ta znění principu matematické indukce, u nichž to není provedeno v textu.
19. Uvědomte si, že principy (I)—(II) a (V)—(VI) jsou ekvivalentní. Princip (V)—(VI) jsme totiž odvodili z principu (I)—(II), ale též princip (I)—(II) vyplývá z principu (V)—(VI).
20. Uvědomte si, že principy (I)—(II) a (1)—(2) jsou ekvivalentní. Vyjdeme-li totiž z principu (1)—(2), pak pomocí něho lze dokázat platnost jisté věty, která tvrdí totéž co princip (I)—(II). Zformulujte a dokažte tuto větu.
21. Uvědomte si, že všech 10 formulací principu matematické indukce, které jsou uvedeny v textu, je navzájem ekvivalentních.

22. Buď n přirozené číslo a M buď množina, která má tyto dvě vlastnosti:

(α) $n \in M$.

(β) Pro každé přirozené číslo p takové, že $1 < p \leqq n$, platí: Jestliže $p \in M$, potom též $p - 1 \in M$.

Dokažte, že množina M pak obsahuje čísla $1, 2, \ldots, n$.